

Αντίστροφη συνάρτηση και Εξισώσεις - Ανισώσεις

Μπάμπης Στεργίου, Σεπτέμβριος 2010

Για τη λύση εξισώσεων ή ανισώσεων που περιέχουν την αντίστροφη μιας συνάρτησης f οι παρακάτω ισοδυναμίες είναι αρκετά χρήσιμες, αφού βοηθάνε να τεθούν οι σωστοί περιορισμοί. Η αναγκαιότητα των περιορισμών φαίνεται στην εφαρμογή που ακολουθεί.

ΜΕΘΟΔΟΣ

A. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε :

$$f^{-1}(g(x)) < h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g, x \in D_h \\ h(x) \in D_f, g(x) \in f(D_f) \\ g(x) < f(h(x)), \text{αν } f \uparrow \text{ ή } g(x) > f(h(x)), \text{αν } f \downarrow \end{cases}$$

B. Αν μια συνάρτηση f αντιστρέφεται, τότε :

$$f^{-1}(g(x)) = h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g, x \in D_h \\ h(x) \in D_f, g(x) \in f(D_f) \\ g(x) = f(h(x)) \end{cases}$$

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} + x^2$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- γ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2 - 1) < x$ και την εξίσωση $f^{-1}(x^2 + x - 2) = x$

Λύση

Τη λύση και τα σχόλια επιμελήθηκε ο συνάδελφος Χρήστος Κανάβης

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f = [0, +\infty)$.

Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται πρέπει να δείξουμε ότι είναι 1-1.

Προσοχή Δεν μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι η συνάρτηση είναι 1-1 με τον ορισμό. Γνωρίζουμε όμως από την θεωρία ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1. Έπομένως μελετάμε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \quad (1) \\ x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της (1) και (2) έχουμε :

$$\sqrt{x_1} + x_1^2 < \sqrt{x_2} + x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Επομένως υπάρχει η αντίστροφη της, δηλαδή η συνάρτηση αντιστρέφεται.

β) Επειδή η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και η f γνησίως αύξουσα τότε το σύνολο τιμών της ισούται με

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} και το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} . Άρα $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

γ) Θα αποδείξουμε μια γενικότερη θεωρητική πρόταση :

Πρόταση: Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι συνάρτηση γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Ας υποθέσουμε ότι η αντιστροφή της δεν είναι γνησίως αύξουσα στο A . Τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Επειδή η f γνησίως αύξουσα έχουμε

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)).$$

Άρα $y_1 \geq y_2$ άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$. Ομοίως εργαζόμαστε, αν η $f : A \rightarrow R$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

Άρα, στην άσκηση μας, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, αφού και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Για την απόδειξη της πρότασης αυτής υπάρχει και άλλος τρόπος, αλλά αυτός με την απαγωγή σε άτοπο αποτυπώνεται ίσως πιο εύκολα στη μνήμη του μαθητή.

δ) i) Θα λύσουμε την ανίσωση :

Σύμφωνα με την μεθοδολογία που παρατάθηκε στην αρχή, αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$, και της f^{-1} είναι το $[0, +\infty)$ πρέπει $x \geq 0$ και $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq -1$. Άρα είναι $x \geq 1$.

Η ανίσωση γίνεται:

$$f^{-1}(x^2 - 1) < x \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x^2 - 1)) < f(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 < \sqrt{x} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} > -1$$

που ισχύει για κάθε $x \geq 1$.

ΣΧΟΛΙΟ:

Ενώ το $x = 0$ επαληθεύει την ανίσωση, την απορρίψαμε γιατί για $x = 0$ δεν ορίζεται το $f^{-1}(-1)$, αφού το -1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

ii) Θα λύσουμε την εξίσωση.

Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$ και της f^{-1} είναι το $[0, +\infty)$, πρέπει $x \geq 0$ και

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

Πρέπει λοιπόν $x \geq 1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x^2 + x - 2) = x &\stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x^2 + x - 2)) = f(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = f(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{x} + x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2 \stackrel{x \geq 2}{\Leftrightarrow} x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4 \text{ ή } x_2 = 1 \end{aligned}$$

Η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών, οπότε λύση της εξίσωσης είναι μόνο η τιμή $x = 4$