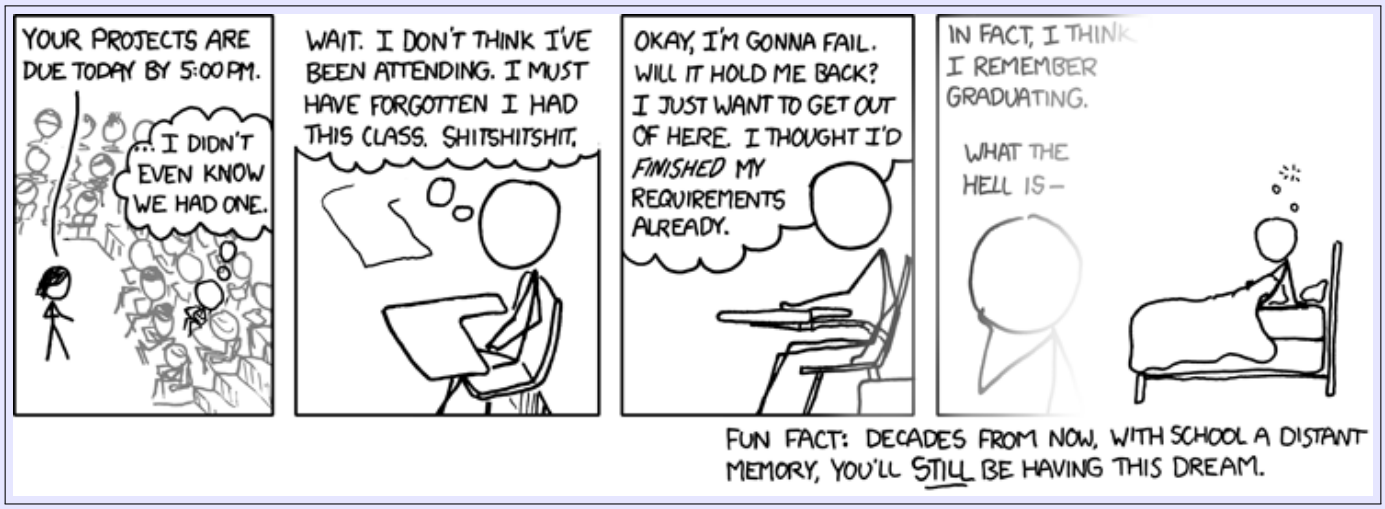
∀fter – maths

Επαναληπτικά διαγωνίσματα με λύσεις στα

Μαθηματικα Προσανατολισμου

της Γ' Λυκείου

Εφ' όλης της ύλης!



Αθηνα 2019
Πρόχειρη έκδοση
Γεμάτη λάθ ;

Περιεχόμενα

Αντί προλόγου 4

1 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις 5

2 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις 12

3 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις με...λίγα όρια. 18

4 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης 24

5 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης 31

6 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης 39

7 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης 46

8 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης 54

Αντί προλόγου

Σε αυτήν την έκδοση του $\forall fter - maths$ θα βρείτε κάποια λυμένα διαγωνίσματα σε σχέση με την ύλη των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Λυκείου. Τα πρώτα τρία διαγωνίσματα δεν καλύπτουν όλη την ύλη, αλλά, κυρίως, το πρώτο μέρος της (συναρτήσεις και ολίγα όρια) ενώ όλα τα υπόλοιπα (5) διαγωνίσματα αφορούν όλη την έκταση της ύλης, όπως αυτή προβλέπεται από το τρέχον πρόγραμμα σπουδών. Οι λύσεις συνοδεύονται συχνά με σχήματα και σχόλια τα οποία δεν είναι πάντα απαραίτητο να συμπρειλάβει ένας μαθητής στη λύση που θα παρουσιάσει, αλλά ασποσκοπούν στην ενίσχυση της εποπτείας και της διαίσθησής του σε σχέση με το εκάστοτε ζήτημα που πραγματεύεται το θέμα.

Όπως πάντα,περισσότερα διαγωνίσματα, σημειώσεις, ασκήσεις και άλλα πολλά μπορεί κανείς να βρει στο https://aftermathsgr.wordpress.com/ (στην ενότητα του διδακτικού υλικού).

Καλό διάβασμα!

1 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις

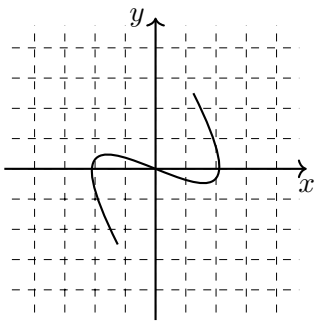
Θέμα 1 (25 μονάδες)

1. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το A. (5 μονάδες)
2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1; (3 μονάδες)
3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως *Σωστές* ή *Λανθασμένες* (χωρίς αιτιολόγηση) σημειώνοντας στο χαρτί σας τον αριθμό της πρόταση και δίπλα την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, αντίστοιχα (10 μονάδες):

   (α′) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.

   (β′) Στην παρακάτω σχέση:
   $$x^3 + y^3 = 4,$$
   το y δεν μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του x.

   (γ′) Δεν υπάρχει συνάρτηση του x με γραφική παράσταση όπως στο παρακάτω σχήμα:



   (δ′) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο γνησίως αύξουσες συναρτήσεις, η εξίσωση:
   $$f(x) + g(x) = \pi^e$$
   έχει ακριβώς μία λύση.

   (ε′) Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ τότε:
   $$(g \circ f)(x) = x, \ x \in \mathbb{R}.$$

4. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα. (4 μονάδες)
5. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* και **να αιτιολογήσετε την απάντησή σας** $(1 + 2$ μονάδες):

   Η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

1. Σ.Β., σελ. 15.
2. Σ.Β., σελ. 33.
3. Παρατίθενται οι απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση:
   (α′) Σωστό,
   (β′) Λάθος,
   (γ′) Σωστό,
   (δ′) Λάθος,
   (ε′) Λάθος.
4. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά:
$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \\ \overset{f:\gamma\nu.}{\Rightarrow}{}^{\varphi\vartheta.} \; & f(x_1) > f(x_2) \\ & -f(x_1) < -f(x_2) \\ & g(x_1) < g(x_2), \end{aligned}$$
   άρα, εξ ορισμού, η g είναι γνησίως αύξουσα.
5. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**, διότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και παρατηρούμε ότι, ενώ $0 < 2$:
$$f(0) = -1 < 1 = f(2),$$
   επομένως η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα αφού θα έπρεπε να ισχύει:
$$0 < 2 \Rightarrow f(0) > f(2).$$

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \frac{x}{x-3}.$$
1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (1 μονάδα)
2. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία (4 μονάδες).
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της ($3 + 3$ μονάδες).
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (3 μονάδες)
5. Να λύσετε την ανίσωση (5 μονάδες):
$$f^{-1}(x-2) > 4.$$
6. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f|$. (6 μονάδες)

Λύση

1. Πρέπει $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$, επομένως:
$$D_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty).$$

2. Ξαναγράφουμε τον τύπο της f (όπως έχουμε κάνει τόσες φορές) ως εξής:
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x}{x-3}=\frac{x-3+3}{x-3}=\\&=\frac{x-3}{x-3}+\frac{3}{x-3}=1+\frac{3}{x-3}.\end{aligned}$$
Έστω, τώρα, $x_1,x_2\in(3,+\infty)$. Διαδοχικά:
$$\begin{aligned}&x_1<x_2\\\Rightarrow\ &x_1-3<x_2-3\\\Rightarrow\ &\frac{1}{x_1-3}>\frac{1}{x_2-3}\\\Rightarrow\ &\frac{3}{x_1-3}>\frac{3}{x_2-3}\\\Rightarrow\ &1+\frac{3}{x_1-3}>1+\frac{3}{x_2-3}\\\Rightarrow\ &f(x_1)>f(x_2),\end{aligned}$$
επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,+\infty)$. Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3)$.

3. *Πριν προχωρήσουμε στη λύση να παρατηρήσουμε ότι το επιχείρημα «γνησίως φθίνουσα, άρα 1-1» δεν έχει εδώ εφαρμογή, αφού η f δεν είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της!*

   Με βάση τον ορισμό[1], έστω $x,y\in D_f$ με $f(x)=f(y)$. Διαδοχικά:
$$\begin{aligned}&f(x)=f(y)\\\Rightarrow\ &\frac{x}{x-3}=\frac{y}{y-3}\\\Rightarrow\ &x(y-3)=y(x-3)\\\Rightarrow\ &xy-3x=xy-3y\\\Rightarrow\ &-3x=-3y\\\Rightarrow\ &x=y,\end{aligned}$$
άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Για την εύρεση της αντίστροφης, διαδοχικά έχουμε:
$$\begin{aligned}&f(x)=y\\\Rightarrow\ &\frac{x}{x-3}=y\\\Rightarrow\ &x=y(x-3)\\\Rightarrow\ &x=xy-3y\\\Rightarrow\ &x-xy=-3y\\\Rightarrow\ &x(1-y)=-3y\\\Rightarrow\ &x=\frac{3y}{y-1}\end{aligned}$$
;ρα $f^{-1}(x)=\frac{3x}{x-1}$.

[1]Για την ακρίβεια, το *αντιθετοαντίστροφο* του ορισμού.

4. Το σύνολο τιμών της f, $f(D_f)$, είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως, εύκολα βλέπουμε ότι $(x-1\neq 0)$:
$$D_{f^{-1}}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty),$$
επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

5. Εδώ θέλει λίγη προσοχή. Ένας τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε τον τύπο της f^{-1} και να κάνουμε κανονικά τις πράξεις, όπως ξέρουμε από την πρώτη λυκείου. Αναλυτικά:
$$\begin{aligned} f^{-1}(x-2)&>4\\ \Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{x-3}&>4\\ \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-3}-4&>0\\ \Leftrightarrow \frac{3x-6-4(x-3)}{x-3}&>0\\ \Leftrightarrow \frac{3x-6-4x+12}{x-3}&>0\\ \Leftrightarrow \frac{-x+6}{x-3}&>0\\ \Leftrightarrow (-x+6)(x-3)&>0\\ \Leftrightarrow x&\in(3,6). \end{aligned}$$

   Αν όμως θέλουμε να εκμεταλλευτούμε όσα έχουμε ως τώρα (μονοτονία κ.λπ.), πρέπει να προσέξουμε τα παρακάτω [2]:

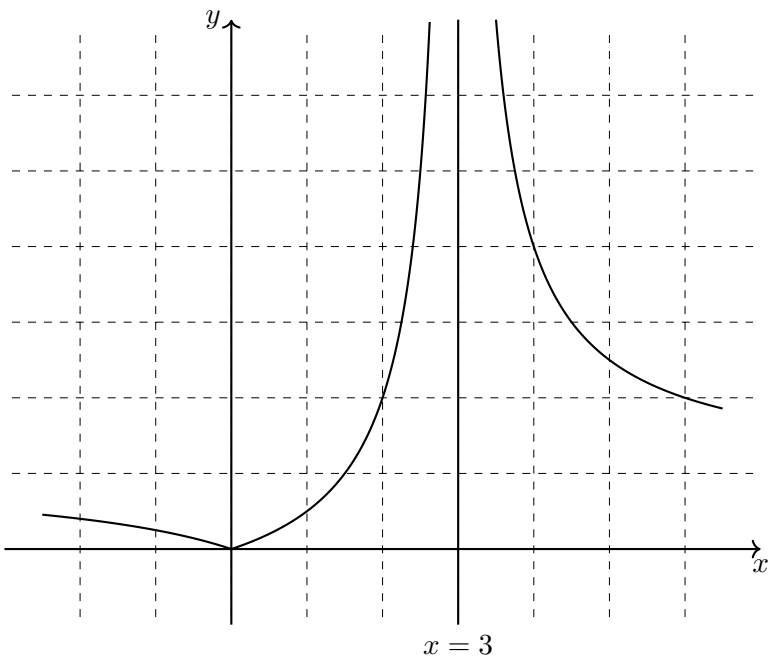
   - Πρώτα ελέγχουμε πότε $x-2\in D_{f^{-1}}$, οπότε πρέπει $x-2\neq 1$, δηλαδή $x\neq 3$.
   - Στη συνέχεια, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις, διότι, η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα δεν μπορούμε, «αέρα, πατέρα», να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της.

6. Σχεδιάζουμε, διαδοχικά, τις γραφικές παραστάσεις των $\frac{3}{x}$, $\frac{3}{x-3}$, $1+\frac{3}{x-3}$, $-1-\frac{3}{x-3}$ και, τέλος την $|f|$. Στο σχήμα 1 φαίνεται μόνο η $|f|$.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:
$$f(x)=\ln\left(x+e^x\right)+2x.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (5 μονάδες)
2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την εξίσωση (3 + 2 μονάδες):
$$f(x)=\ln\left(e^2+e^3\right).$$
3. Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να δείξετε ότι (2 + 4 μονάδες):
$$f^{-1}(\ln 12)<1.$$

[2] Στην προκειμένη, θα κάνουμε, απλά, τη ζωή μας δύσκολη, για μια τόσο απλή ανισότητα. Γενικά, πάντα να έχετε κατά νου ότι δεν είναι μονόδρομος αυτά που μαθαίνουμε φέτος και, το σημαντικότερο, να μην ξεχνάτε τα όσα έχετε μάθει, απλά επειδή φέτος «δίνουμε Πανελλήνιες»!



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $|f|$.

4. Θεωρούμε τώρα την εξίσωση:
$$xe^{2x} + e^{3x} - 1 = 0. \tag{†}$$
(α′) Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης (†) είναι και ρίζα της f. (4 μονάδες)
(β′) Να λύσετε την εξίσωση (†). (5 μονάδες)

Λύση

1. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}, \tag{1}$$
οπότε, αφού $x_1 < x_2$, προσθέτοντας κατά μέλη:
$$x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + e^{x_1}) < \ln(x_2 + e^{x_2}). \tag{2}$$
Επίσης,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2, \tag{3}$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3), έχουμε ότι:
$$f(x_1) < f(x_2),$$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Μετά από λίγη προσπάθεια, παρατηρούμε ότι:
$$f(x) = \ln(x + e^x) + 2x = \ln(x + e^x) + \ln e^{2x} = \ln(xe^{2x} + e^{3x}).$$
Τώρα είναι εμφανές ότι $f(1) = \ln(e^2 + e^3)$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:
$$f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$
Επομένως, η εξίσωση έχει μία και μοναδική λύση — αφού η f είναι 1-1, την $x = 1$.

3. Από τη γενική θεωρία γνωρίζουμε ότι οι f και f^{-1} «μοιράζονται» την ίδια μονοτονία, επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο [3] $\mathbb{R}$. Για τη ζητούμενη ανισότητα, παρατηρούμε ότι:

   - αφού $e > 2$, έπεται ότι $e^2 > 4$ και $e^3 > 8$, άρα $e^2 + e^3 > 12$, άρα,
   $$\ln(e^2 + e^3) > \ln 12.$$
   - από το προηγούμενο ερώτημα:
   $$f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) = 1.$$
   - από την μονοτονία της f^{-1}:
   $$f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) > f^{-1}(\ln 12).$$

   Από όλα τα παραπάνω, έχουμε:
   $$f^{-1}(\ln 12) < f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) = 1.$$

4. Έχουμε:

   (α′) Αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (†), τότε:
   $$x_0 e^{2x_0} + e^{3x_0} = 1,$$
   άρα:
   $$f(x_0) = \ln\left(x_0 e^{2x_0} + e^{3x_0}\right) = \ln 1 = 0,$$
   δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της f.

   (β′) Για να δούμε... Από το προηγούμενο, οι μόνοι αριθμοί που είναι και υποψήφιες ρίζες της (†) είναι οι ρίζες της f. Όμως, αφού $f(0) = 0$ και η f είναι 1-1, η μοναδική ρίζα της f είναι το 0. ;ρα, αρκεί να εξετάσουμε αν το 0 είναι λύση της (†). Αντικαθιστώντας βλέπουμε ότι:
   $$0 \cdot e^0 + e^0 - 1 = 0,$$
   που ισχύει, άρα, η μοναδική λύση της (†) είναι η $x = 0$.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 1, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι $f(0) = 1$. (2 μονάδες)
2. Να δείξετε ότι $f(-x) = 2 - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (4 μονάδες)
3. Γίνεται η f να είναι άρτια; Γίνεται η f να είναι περιττή; Αν ναι, ποιος είναι ο τύπος της f; Αν όχι, γιατί; $(3 + 3$ μονάδες$)$
4. Να δείξετε ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (2 μονάδες):
   $$f(x - y) = f(x) - f(y) + 1.$$

[3] Αν θέλετε, αν και δεν χρειάζεται, μπορείτε εύκολα να το δείξετε μέσω του ορισμού, με απαγωγή σε άτοπο.

5. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση:

   (α′) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (άρα και αντιστρέψιμη). (6 μονάδες)

   (β′) Να βρείτε το $f^{-1}(1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση (1 + 4 μονάδες):

$$f\left(x^2 f^{-1}(x)\right) = 1.$$

Λύση

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση $x = y = 0$, οπότε:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) - 1 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση όπου $y = -x$, οπότε:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) - 1 \Leftrightarrow f(-x) = 1 + f(0) - f(x) = 2 - f(x).$$

Για να είναι η f άρτια, πρέπει να ισχύει $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, από το προηγούμενο ερώτημα θα είχαμε:

$$f(x) = f(-x) = 2 - f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 1,$$

επομένως, γίνεται, αρκεί η f να έχει τύπο $f(x) = 1$.

Για να είναι περιττή, πρέπει να ισχύει $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x) = -f(-x) = -(2 - f(x)) \Leftrightarrow 0 = 2,$$

άρα, για να είναι η f περιττή, πρέπει να ισχύει $0 = 2$. Επειδή αυτό δε φαίνεται να ισχύει, μάλλον η f δεν μπορεί να είναι περιττή[4].

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση όπου y το $-y$, οπότε, από τα προηγούμενα:

$$f(x-y) = f(x) + f(-y) - 1 = f(x) + 2 - f(y) - 2 = f(x) - f(y) + 1.$$

Έχουμε:

1. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε $f(x) - f(y) = 0$, οπότε, από το προηγούμενο:
$$f(x-y) = f(x) - f(y) + 1 = 0 + 1 = 1.$$
Όμως, η εξίσωσης $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση και, αφού $f(0) = 1$, η λύση αυτή είναι το $x = 0$. Αφού $f(x-y) = 1$, έπεται ότι $x - y = 0$, δηλαδή, $x = y$, οπότε η f είναι 1-1.

2. Αφού $f(0) = 1$, άμεσα έπεται ότι $f^{-1}(1) = 0$. Για τη δοσμένη εξίσωση, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται:
$$f\left(x^2 f^{-1}(x)\right) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2 f^{-1}(x) = 0,$$
οπότε είτε $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ είτε $f^{-1}(x) = 0$, δηλαδή $x = 1$, αφού η f^{-1} είναι 1-1. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Μία συνάρτηση με όλες αυτές τις ιδιότητες που δεν είναι άρτια είναι η $f(x) = x + 1$.

[4] Εναλλακτικά, μπορείτε να παρατηρήσετε ότι για κάθε περιττή συνάρτηση ισχύει $f(0) = 0$, που στην προκειμένη δεν ισχύει.

2 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι «1-1»; (4 μονάδες)

Σ.Β., σελ. 33.

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$; Ποιο είναι αυτό το ελάχιστο; (4 μονάδες)

Σ.Β., σελ. 32.

3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (3×1 μονάδες) και **να αιτολογήσετε** την απάντησή σας (3 × 3 μονάδες):

(α′) Κάθε «1-1» συνάρτηση είναι και γνησίως μονότονη.

Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 3-x & x \in (1,2) \end{cases}$$

(β′) Δύο μεταβλητές x, y με $x \in [0,\pi]$ και $y \in [e^{-1}, e]$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\ln y = \text{συν}\, x.$$

Τότε η x μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση της y.

Η πρόταση είναι **Σωστή**. Πράγματι, για κάθε $y \in [e^{-1}, e]$ το $\ln y$ είναι μοναδικό και, μάλιστα:

$$e^{-1} \le y \le e \Leftrightarrow -1 \le \ln y \le 1.$$

Τώρα, για κάθε αριθμό $\ln y$ στο $[-1,1]$ υπάρχει μοναδικός αριθμός $x \in [0,\pi]$ τέτοιος ώστε $\text{συν}\, x = \ln y$ — αφού η $\text{συν}\, x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$, άρα και «1-1». Επομένως, το x μπορεί να περιγραφεί σαν συνάρτηση του y.

(γ′) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία «1-1» συνάρτηση και το σημείο $M(3,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $N(-2,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της αντίστροφης της f, f^{-1}.

Η πρόταση είναι **Σωστή**. Πράγματι, αν το σημείο $M(3,-2)$ ανήκει στη C_f, τότε, δεδομένου ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, θα πρέπει το σημείο $N(-2,3)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $C_{f^{-1}}$.

4. Αν $f(x) = e^x - 1$, με $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1)$, με $D_g = (-1,+\infty)$ και $h(x) = e^x - 1$ με $D_h = (0,+\infty)$, τότε, από τις παρακάτω προτάσεις, σωστή είναι η (5 μονάδες):

(α′) $f \circ g = g \circ f$, (β′) $f \circ h = h \circ f$, (γ′) $g \circ h = f \circ g$, (δ′) Καμία από τις παραπάνω.

Η σωστή απάντηση είναι η (β′).

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (3 μονάδες)

   Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Επομένως:

   $$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (7 μονάδες)

   Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

   $$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} > 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

   επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$.

   Ομοίως, έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

   $$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} > 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

   επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$.

3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1}. (6 μονάδες)

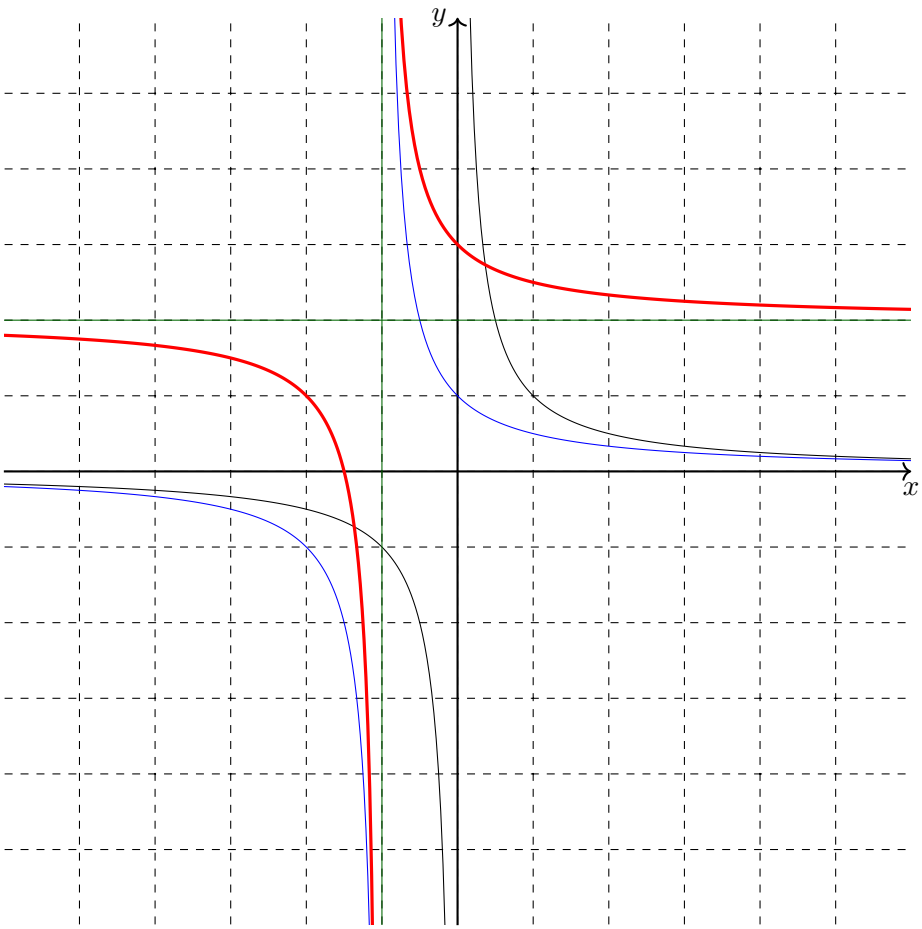
   Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι η f είναι «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Διαδοχικά, έχουμε:

   $$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} = 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

   επομένως η f είναι «1-1».

   Για να βρούμε την αντίστροφη της f, έστω $y \in \mathbb{R}$ και $x \in D_f$. Τότε:

   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = y - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{y-2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Οι γραφικές παράστασεις των $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$ και $f(x)$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y-2} - 1,$$

επομένως, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$ με $x \neq 2$.

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (4 μονάδες)

   Έχουμε:
   $$f(D_f) = D_{f^{-1}} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

   Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$ (ισοσκελής υπερβολή), με μία μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x+1}$ και με μία μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 10.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με:

- $g(x) = e^x + x^3 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$,
- $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία. (5 μονάδες)

   Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

   $$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \quad (1)$$
   $$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}. \quad (2)$$

   Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

   $$e^{x_1} + x1^3 - 1 < e^{x_2} + x_2^3 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

   επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Να λύσετε την εξίσωση (4 μονάδες):

   $$e^x + x^3 - 1 = 0.$$

   Παρατηρούμε ότι η δοσμένη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

   $$g(x) = g(0),$$

   αφού $f(0 = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Επομένως, δεδομένου ότι η g είναι «1-1» (ως γνησίως αύξουσα), έπεται ότι:

   $$g(x) = g(0) \overset{g:\text{«1-1»}}{\Longleftrightarrow} x = 0.$$

3. Να λύσετε την ανίσωση (4 μονάδες):

   $$e^x < e + 1 - x^3.$$

   Παρατηρούμε ότι η ανίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

   $$e^x + x^3 - 1 < e \Leftrightarrow g(x) < g(1),$$

   δεδομένου ότι $g(1) = e^1 + 1 - 1 = e$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

   $$g(x) < g(1) \Leftrightarrow x < 1.$$

4. Να λύσετε την εξίσωση (6 μονάδες):

   $$\frac{f(0)x^{2020} + f(e)x^2 - 1}{x + 1} = 0.$$

   Αντικαθιστώντας στη σχέση $g(f(x)) = x$ διαδοχικά όπου $x = 0$ και όπου $x = e$, έχουμε:

   $$g(f(0)) = 0 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \overset{g:\text{«1-1»}}{\Longleftrightarrow} f(0) = 0,$$
   $$g(f(e)) = e \Leftrightarrow g(f(e)) = g(1) \overset{g:\text{«1-1»}}{\Longleftrightarrow} f(e) = 1,$$

   οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

   $$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

   Επειδή πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, έχουμε $x = 1$.

5. Να δείξετε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα (2 μονάδες) και να λύσετε την ανίσωση (4 μονάδες):
$$f\left(e^{g(x)}+g^3(x)-1\right)\geq 0.$$

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\geq f(x_2)$. Τότε, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:
$$f(x_1)\geq f(x_2)\Leftrightarrow g(f(x_1))\geq g(f(x_2))\Leftrightarrow x_1\geq x_2,$$
άτοπο, αφού $x_1<x_2$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για τη δοσμένη ανισότητα, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται στη μορφή:
$$f(g(g(x)))\geq 0\Leftrightarrow f(g(g(x))\geq f(0).$$
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα:
$$g(g(x))\geq 0\Leftrightarrow g(g(x))\geq g(0).$$
Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα:
$$g(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq g(0).$$
Τέλος, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα:
$$x\geq 0.$$

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^5+2x^3}{3}$ με $x\in[-1,1]$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολό τιμών της. $(4+3$ μονάδες)

Έστω $x_1,x_2\in[-1,1]$ με $x_1<x_2$. Τότε:
$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 2x1^3<2x_2^3 \tag{3}$$
$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^5<x_2^5, \tag{4}$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 3 έχουμε:
$$x_1^5+2x_1^3<x_2^5+2x_2^3\Leftrightarrow\frac{x_1^5+2x_1^3}{3}<\frac{x_2^5+2x_2^3}{3}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2),$$
οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

Για το σύνολο τιμών της f, παρατηρούμε ότι:
$$-1\leq x\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x^3\leq 1\Leftrightarrow -2\leq 2x^3\leq 2 \tag{5}$$
$$-1\leq x\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x^5\leq 1, \tag{6}$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 3 έχουμε:
$$-3\leq x^5+2x^3\leq 3\leftrightarrow -1\leq f(x)\leq 1,$$
επομένως, $f([-1,1])=[-1,1]$.

2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη (1 μονάδα) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με αυτήν της f^{-1} (6 μονάδες).

   Η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη, επομένως είναι και αντιστρέψιμη. Δεδομένου ότι είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται επί της διχοτόμου $y = x$, επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$:

   $$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x^5 + 2x^3}{3} = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^5 + 2x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x^4 + 2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^4 + 2x^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

   Για την εξίσωση $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ θέτουμε $y = x^2$, οπότε:

   $$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -3.$$

   Δεδομένου ότι $y = x^2 \geq 0$, η $y = -3$ απορρίπτεται, επομένως έχουμε:

   $$y = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

   Επομένως, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα:

   $$A(0, f(0)) = (0, 0), B(1, f(1)) = (1, 1), C(-1, f(-1)) = (-1, -1).$$

3. Να λύσετε την εξίσωση (5 μονάδες):

   $$f^{-1}(f(x + 1) - 1) = 0,$$

   όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της f.

   Η f^{-1} είναι «1-1» (εξ ορισμού), και $f^{-1}(0) = 0$, αφού $f(0) = 0$, οπότε η δοσμένη εξίσωση ξαναγράφεται ως εξής:

   $$f^{-1}(f(x + 1) - 1) = f^{-1}(0) \xLeftrightarrow{f^{-1}:\text{«1-1»}} f(x + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x + 1) = 1.$$

   Επειδή $f(1) = 1$ και η f είναι «1-1», έπεται ότι $x + 1 = 1 \leftrightarrow x = 0$. *Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι το 0 είναι όντως λύση της εξίσωσης.*

4. Να δείξετε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε (6 μοναδες):

   $$\frac{\text{συν}^5\theta + 2\,\text{συν}^3\theta}{3} = \frac{\pi}{8}.$$

   Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη σχέση γράφεται ως:

   $$f(\text{συν}\,\theta) = \frac{\pi}{8}.$$

   Δεδομένου ότι $\frac{\pi}{8} \in [-1, 1] = f([-1, 1])$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε:

   $$f(x_0) = \frac{\pi}{8}.$$

   Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της $\text{συν}\,x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το $[-1, 1]$, επομένως, αφού $x_0 \in [-1, 1]$, υπάρχει κάποιο $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε:

   $$\text{συν}\,\theta = x_0.$$

   Έτσι, έχουμε ότι:

   $$f(\text{συν}\,\theta) = f(x_0) = \frac{\pi}{8},$$

   που ήταν το ζητούμενο.

3 Επαναληπτικό διαγώνισμα στις συναρτήσεις με...λίγα όρια.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (4 μονάδες)
2. Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ μία πολυωνυμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει (7 μονάδες):
$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$
3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες**, σημειώνοντας στο χαρτί σας δίπλα από κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό ή Λάθος, αντίστοιχα (10 μονάδες):
   (α′) Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε είναι και αντιστρέψιμη.
   (β′) Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με ℓ αν και μόνον αν
   $$\lim_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$
   .
   (γ′) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι:
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -5 \text{ και } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = 5,$$
   τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
   (δ′) Αν $f(x) = e$ και $g(x) = \ln x$ τότε:
   $$(f \circ g)(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}.$$
   (ε′) Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$ υπάρχει το όριο:
   $$\lim_{x\to 0} f(x)$$
   αν και δεν έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε (1+3 μονάδες):
   Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

Λύση

1. Σ.Β., σελ. 31.

2. Σ.Β., σελ. 49.
   (α′) Σωστό
   (β′) Σωστό
   (γ′) Λάθος
   (δ′) Λάθος
   (ε′) Σωστό
3. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση:
$$f(x) = -x^2,$$
για $x_0 = 0$, καθώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 (\geq 0)$ και $f(x) < 0$ κοντά[5] στο $x_0 = 0$. *Σχόλιο: Η σωστή μορφή της πρότασης είναι η ακόλουθη:*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

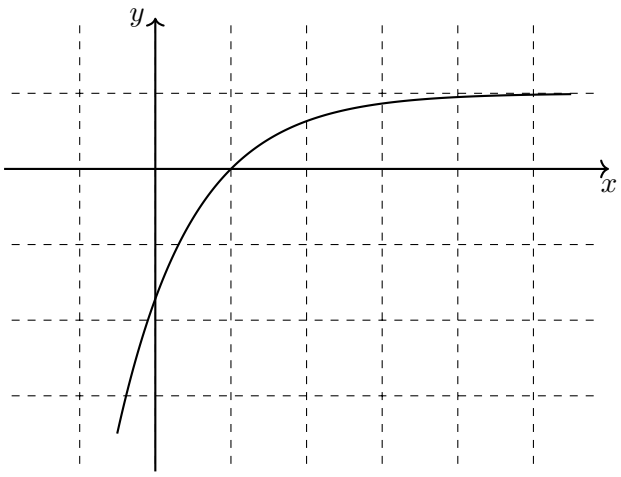
Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία (5 μονάδες).
2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της (1+4 μονάδες).
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (3 μονάδες).
4. Να υπολογίσετε τα όρια (3+3 μονάδες):
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to +\infty} f(x).$$
5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (6 μονάδες).

Λύση

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:
$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \\ \Rightarrow & -x_1 > -x_2 \\ \Rightarrow & 1 - x_1 > 1 - x_2 \\ \Rightarrow & e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & -e^{1-x_1} < -e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & 1 - e^{1-x_1} < 1 - e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[5] Να θυμηθούμε ότι «κοντά» στο 0 σημαίνει εκεί γύρω και *όχι* 0.



2. Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για τον υπολογισμό της αντίστροφης έχουμε:

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & 1 - e^{1-x} = y \\ \Leftrightarrow\ & -e^{1-x} = -1 + y \\ \Leftrightarrow\ & e^{1-x} = 1 - y \\ \Leftrightarrow\ & 1 - x = \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow\ & -x = -1 + \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 - \ln(1-y), \end{aligned}$$

άρα $f^{-1}(x) = 1 - \ln(1-x)$.

3. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως (οι πράξεις παραλείπονται ως εύκολες):

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1).$$

4. Για το πρώτο όριο, θέτουμε $y = 1 - x$, οπότε, αφού:

$$\lim_{x \to -\infty} (1 - x) = 1 - (-\infty) = 1 + \infty = +\infty,$$

έπεται ότι:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} (1 - e^y) = 1 - (+\infty) = -\infty.$$

Μπορούμε, όμοια, να βρούμε και το άλλο όριο, αλλά, για λόγους ποικιλίας, θα το λύσουμε με ποιο στοιχειώδη μέσα, χωρίς αλλαγή μεταβλητής:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - e^{1-x}) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e}{e^x}\right) = 1 - \frac{e}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

5. Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της e^x, περνάμε στην e^{-x} και μετά στην e^{1-x} και μετά στην $-e^{1-x}$ και, τέλος, στην $f(x)$. Η τελική γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 10.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της (3 μονάδες).
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (6 μονάδες).
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το (1+4 μονάδες)
$$f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e)).$$
4. Να λύσετε την ανισότητα (6 μονάδες):
$$f(e^{x^2-4x+5}) - \ln e > \ln(1 + e).$$
5. Να υπολογίσετε το όριο (5 μονάδες):
$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x^2}{\text{συν}\, x}\right).$$

Λύση

1. Αρχικά, πρέπει $x \geq 0$, αφού έχουμε υπόρριζη παράσταση. Έπειτα, για τον λογάριθμο απαιτούμε:
$$x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) > 0.$$
Το τελευταίο είναι γινόμενο ενός θετικού αριθμού $(\sqrt{x} + 1)$ με την $\sqrt{x}$. Επομένως, αυτό που πρέπει (και αρκεί) να ισχύει είναι[6]:
$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$
Τελικά:
$$D_f = (0, +\infty).$$
2. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Διδαοχικά, έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$$
και, προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$ έχουμε:
$$x_1 + \sqrt{x_2} < x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + \sqrt{x_1}) < \ln(x_2 + \sqrt{x_2}) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
3. Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για το $f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e))$ παρατηρούμε ότι:
$$f(e^2) = \ln(e^2 + \sqrt{e^2}) = \ln(e^2 + e) = \ln(e(e + 1)) = \ln e + \ln(e + 1),$$
οπότε:
$$f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e)) = f^{-1}(f(e^2)) = e^2.$$

[6] Μπορείτε να λύσετε αυτήν την ανισότητα με 1002 τρόπους, όπως να θέσετε κ.λπ.. . .

4. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f\left(e^{x^2-4x+5}\right) > \ln e + \ln(1+e) = f(e^2).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$e^{x^2-4x+5} > e^2,$$

οπότε λογαριθμίζοντας, παίρνουμε:

$$x^2 - 4x + 5 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0,$$

η οποία λύνεται κατά τα γνωστά και μας δίνει:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η ποσότητα e^{x^2-4x+5} είναι πάντα θετική (> 0), άρα το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f\left(e^{x^2-4x+5}\right)$ είναι όλο το $\mathbb{R}$, οπότε δεν προκύπτει επιπλέον περιορισμός για τις λύσεις μας.

5. Εδώ θέλει λίγη δουλίτσα. Αρχικά, με κάτι τόσο άσχημο μπροστά μας, δεν αντέχουμε άλλο και θέτουμ απευθείας:

$$y = \frac{x^2}{\text{συν}\, x}.$$

Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε, λοιπόν, το όριο[7]:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\text{συν}\, x} = \frac{0}{\text{συν}\, 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x^2}{\text{συν}\, x}\right) = \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \ln(y + \sqrt{y}).$$

Εδώ, τώρα, ξαναθέτουμε:

$$u = y + \sqrt{y}$$

και, αφού:

$$\lim_{y\to 0}(y + \sqrt{y}) = 0 + 0 = 0,$$

έπεται ότι:

$$\lim_{y\to 0} \ln(y + \sqrt{y}) = \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty.$$

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = x^{2017} + x^{2019}$$

και η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y - 1) > x + y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

[7] Μην ψαρώνετε, άμα βλέπετε τέτοια, θέσιμο θέλουν συνήθως!

1. Να δείξετε ότι $f(x) > x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (5 μονάδες).
2. Να υπολογίσετε το όριο (4 μονάδες):
$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$
3. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία (4 μονάδες).
4. Να αποδείξετε την ανισότητα (6 μονάδες):
$$(g \circ f)(x^2 + 1) > g(x^2 + 2).$$
5. Να υπολογίσετε το όριο (6 μονάδες):
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(g(-x))}.$$

Λύση

1. Θέτουμε $y = 1$ στη δοσμένη ανισότητα, οπότε:
$$f(x + 1 - 1) > x + 1 \Leftrightarrow f(x) > x + 1.$$
2. Αφού $f(x) > x + 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 + x) = +\infty$, έπεται ότι:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
3. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2017} < x^{2017}$$
και
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2019} < x^{2019},$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη:
$$x_1^{2017} + x_1^{2019} < x_2^{2017} + x_2^{2019} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$
άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
4. Ξεκινώντας από τη δοσμένη ανισότητα, θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει προχωρώντας με ισοδυναμίες (χρησιμποιούμε την μονοτονία της g):
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x^2 + 1) &> g(x^2 + 2)\\ \Leftrightarrow g(f(x^2 + 1)) &> g(x^2 + 2)\\ \Leftrightarrow f(x^2 + 1)) &> x^2 + 2.\end{aligned}$$
Το τελευταίο ισχύει διότι από το πρώτο ερώτημα ισχύει $f(x) > x + 1$, οπότε, για x^2 στη θέση του x προκύπτει το ζητούμενο.

5. Θέτουμε $y = g(-x)$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^{2017} - x^{2019}) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^{2019}\left(-1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty\cdot(-1-0) = +\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(g(-x))} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{f(y)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Γενική παρατήρηση: Όταν δεν ξέρουμε τι να κάνουμε, αλλάζουμε μεταβλητή! Σώζει ζωές!

4 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Σ. Β., σελ. 142-143.

2. Σ. Β., σελ. 155.

3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

   (α′) Λάθος

   (β′) Σωστό

   (γ′) Σωστό

   (δ′) Λάθος

   (ε′) Σωστό

4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (1 + 2 μονάδες):

   «Μία παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει θετική παράγωγο».

   Η πρόταση είναι **Λάθος**. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, όμως $f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$. Αυτό που ισχύει είναι ότι μία παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση έχει *μη αρνητική* παράγωγο.

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (1 μονάδα) και τα σημεία τομής της με τους άξονες (2 μονάδες).

   Πρέπει να ισχύει $x + 1 \neq 0$, επομένως $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Για τα σημεία τομής με τους άξονες, έχουμε:

   - Για τον $x'x$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε η f τέμνει τον $x'x$ σε ένα σημείο, το $A(0, f(0)) = (0, 0)$.
   - Για τον $y'y$: $f(0) = 0$, οπότε, και πάλι, η f τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, 0)$.

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (6 μονάδες)

   Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και μάλιστα:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

   Επιλύουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2.$$

   Ο πίνακας προσήμου της f' — μονοτονίας της f, είναι:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	T. μεγ.	↘	‖	↘	T. ελ.	↗	

   Επομένως, η f παρουσιάζει:

   - τοπικό μέγιστο στο -2, το $f(-2) = -4$ και,
   - τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$.

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μονάδες)

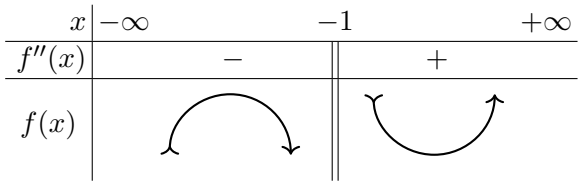
   Η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2+2x)'(x+1)^2 - (x^2+2x)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x^2+2x)(x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(x+1)\left((2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)\right)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{2}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

   Παρατηρούμε ότι $f''(x) \neq 0$ και μάλιστα:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3} > 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -1,$$

επομένως, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' — κυρτότητας της f:



4. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. (6 μονάδες)

   Για τις ασύμπτωτες της f έχουμε:

   - Στο $+\infty$, υπολογίζουμε πρώτα το όριο:

   $$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

   και, έπειτα, το όριο:

   $$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} =$$
   $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = -1,$$

   επομένως η f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x - 1$.

   - Στο $-\infty$, υπολογίζουμε πρώτα το όριο:

   $$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

   και, έπειτα, το όριο:

   $$\beta = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+1} =$$
   $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = -1,$$

   επομένως η f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x - 1$.

   - Στο -1, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

   $$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty,$$
   $$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty,$$

   αφού ο πίνακας προσήμου της f είναι:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

   Επομένως, η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -1$.

5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

Για να κατασκευάσουμε τον πίνακα μεταβολών της f, μένει να υπολογίσουμε τα όρια της f στα $\pm\infty$.

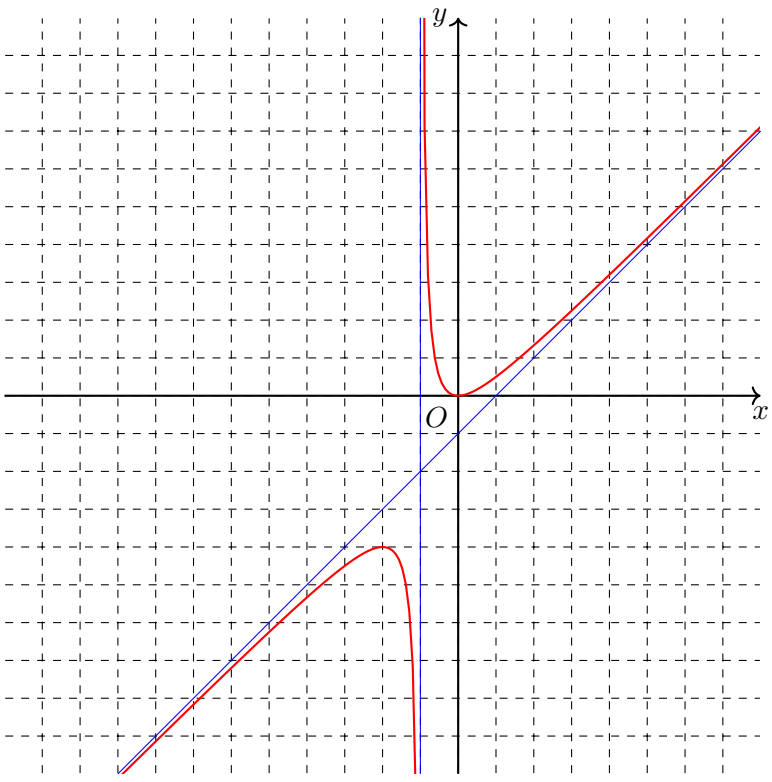
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Τώρα, κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	‖	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
							0		

Σχεδιάζουμε, τώρα, τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της f.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) + 2xf(x) = e^{2x-x^2},\ \forall\ x\in\mathbb{R},$$

με $f(0)=1$.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$\phi(x) = e^{x^2} f(x) - \frac{1}{2} e^{2x},$$
είναι σταθερή. (6 μονάδες)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\phi'(x) = 0$. Πράγματι,
$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \left(e^{x^2}\right)' f(x) + e^{x^2} f'(x) - \frac{1}{2}(2x)' e^{2x} = \\
&= 2x e^{x^2} f(x) + e^{x^2} f'(x) - e^{2x} = \\
&= e^{x^2} \left(2x f(x) + f'(x)\right) - e^{2x} = \\
&= e^{x^2} e^{2x - x^2} - e^{2x} = \\
&= e^{2x} - e^{2x} = 0,
\end{aligned}$$
επομένως, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\phi(x) = c$.

2. Να δείξετε ότι (2 μονάδες)
$$f(x) = \frac{e^{-x^2} + e^{2x - x^2}}{2}.$$

Εφ' όσον $f(0) = 1$, για $x = 0$, έχουμε:
$$\phi(x) = c \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) - \frac{1}{2} e^{2x} = c \overset{x=0}{\Longrightarrow} f(0) - \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2},$$
επομένως:
$$\begin{aligned}
\phi(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow e^{x^2} f(x) - \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{2x - x^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{-x^2} + e^{2x - x^2}}{2}.
\end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε τα όρια (3 + 3 μονάδες):
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Παρατηρούμε ότι τα όρια:
$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2}, \ \lim_{x \to +\infty} e^{2x - x^2},$$
υπάρχουν, αφού,
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} &\overset{y = -x^2}{\underset{y \to -\infty}{=\!=\!=}} \lim_{y \to -\infty} e^y = 0, \\
\lim_{x \to +\infty} e^{2x - x^2} &\overset{y = 2x - x^2}{\underset{y \to -\infty}{=\!=\!=}} \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2} + e^{2x - x^2}}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0.$$

Ανάλογα, τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}, \ \lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2},$$

υπάρχουν, αφού,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} \xrightarrow[y\to-\infty]{y=-x^2} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2} \xrightarrow[y\to-\infty]{y=2x-x^2} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}+e^{2x-x^2}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = x^2,$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. (4 μονάδες)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Αρκεί να δείξουμε ότι η g έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Έχουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x^2) = 0-(+\infty) = -\infty$, επομένως υπάρχει ένα x_1 κοντά στο $-\infty$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_1 < 0$), τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$.
- $g(0) = f(0) - 0^2 = 1 > 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2) = 0-(+\infty) = -\infty$, επομένως υπάρχει ένα x_2 κοντά στο $+\infty$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_2 > 0$), τέτοιο ώστε $f(x_2) < 0$. Επομένως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στα διαστήματα $[x_1, 0]$ και $[0, x_2]$, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, x_2)$, τέτοια ώστε:

  $$g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0,$$

  που ήταν το ζητούμενο.

5. Αν F είναι μία παράγουσα της f, να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία (2 μονάδες) και να αποδείξετε την ανισότητα (5 μονάδες):

$$F(1-F(x+1)) \geq F(1-F(e^x)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η F είναι παράγουσα της f ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$. Παρατηρούμε ότι $f(x) > 0$, επομένως και $F'(x) > 0$ σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ξεκινώντας από τη ζητούμενη ανισότητα έχουμε, ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} &F(1-F(x+1)) \geq F(1-F(e^x)) \xLeftrightarrow{F:\uparrow} 1-F(x+1) \geq 1-F(e^x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -F(x+1) \geq -F(e^x) \Leftrightarrow F(x+1) \leq F(e^x) \xLeftrightarrow{F:\uparrow} \\ &\Leftrightarrow x+1 \leq e^x, \end{aligned}$$

η οποία ισχύει, άρα ισχύει και η ζητούμενη.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f(x))^3 + f(x) = 2x, \ \forall \ x \in [0,1],$$

και η συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, με:

$$\phi(x) = \frac{x^3 + x}{2}.$$

1. Να δείξετε ότι η ϕ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της. $(3+3$ μονάδες$)$

   Η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και, μάλιστα:

   $$\phi'(x) = \frac{3x^2 + 1}{2} > 0,$$

   επομένως η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Εφ' όσον η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της, $\phi([0,1])$, είναι το διάστημα:

   $$[\phi(0), \phi(1)] = [0,1].$$

2. Να δείξετε ότι η f είναι η αντίστροφη της ϕ. (4 μονάδες)

   Παρατηρούμε ότι η σχέση:

   $$(f(x))^3 + f(x) = 2x,$$

   μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

   $$(f(x))^3 + f(x) = 2x \Leftrightarrow \frac{(f(x))^3 + f(x)}{2} = x \Leftrightarrow \phi(f(x)) = x, \forall x \in [0,1].$$

   Εφ' όσον η ϕ είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να εφαρμόσουμε και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας την αντίστροφή της, ϕ^{-1}, οπότε έχουμε:

   $$\phi(f(x)) = x \Leftrightarrow \phi^{-1}(\phi(f(x))) = \phi^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = \phi^{-1}(x),$$

   δηλαδή η f είναι η αντίστροφη της ϕ, που ήταν και το ζητούμενο.

3. Να δείξετε ότι $\phi(x) < x$ για κάθε $x \in (0,1)$. (5 μονάδες)

   Ξεκινώντας από τη ζητούμενη ανισότητα, για $x \in (0,1)$, έχουμε, ισοδύναμα:

   $$\phi(x) < x \Leftrightarrow \frac{x^3 + x}{2} < x \Leftrightarrow x^3 + x < 2x \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow x^3 - x < 0.$$

   Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του $p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$, κατά τα γνωστά:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   οπότε παρατηρούμε ότι $x^3 - x < 0$ για $x \in (0,1)$. Επομένως, ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα, $\phi(x) < x$, για κάθε $x \in (0,1$.

4. Να δείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in (0,1)$. (5 μονάδες)

   Ξεκινώντας από τη ζητούμενη σχέση, $f(x) > x$, έχουμε, ισοδύναμα:

   $$f(x) > x \overset{f=\phi^{-1}}{\Longleftrightarrow} \phi^{-1}(x) > x \overset{\phi:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \phi\left(\phi^{-1}(x)\right) > \phi(x) \Leftrightarrow x > \phi(x),$$

   που ισχύει για κάθε $x \in (0,1)$, επομένως ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα, $f(x) > x$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = x$. (5 μονάδες)

   Έστω Ω το χωρίο μεταξύ των $f(x)$ και $y = x$. Τότε, δεδομένου ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in (0,1)$ και ότι τα κοινά σημεία της f με την $y = x$ είναι τα $A(0,0)$ και $B(1,1)$, αφού:

   $$f(x) = x \overset{\phi:1-1}{\Longleftrightarrow} \phi(f(x)) = \phi(x) \overset{\phi^{-1}=f}{\Longleftrightarrow} x = \frac{x^3+x}{2} \Leftrightarrow 2x = x^3 + x \Leftrightarrow x^3 - x = 0,$$

   οπότε $x = 0$ ή $x = 1$ (η λύση $x = -1$ απορρίπτεται αφού $x \in [0,1]$). Επομένως, το εμβαδόν του Ω θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

   $$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx \overset{f(x)>x}{=\!=} \int_0^1 (f(x) - x) dx.$$

   Προφανώς, μη γνωρίζοντας τον τύπο της f, πρέπει να την «ξεφορτωθούμε». Θέτουμε $y = f(x)$, ισοδύναμα, $x = f^{-1}(y)$. Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = \phi$, οπότε έχουμε $x = \phi(y)$, οπότε, παραγωγίζοντας κατά μέλη, έχουμε:

   $$dx = \phi'(y)dy \Leftrightarrow dy = \frac{3x^2+1}{2} dy,$$

   ενώ, αφού $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν. Έτσι:

   $$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 (y - \phi(y))\phi'(y) dy = \int_0^1 \left(y - \frac{y^3+y}{2}\right) \frac{3y^2+1}{2} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{-3y^5 + 2y^3 + y}{4} dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (-3y^5 + 2y^3 + y) dy = \frac{1}{4} \left[-\frac{y^6}{2} + \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{8} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

   Χωρίς να χρειάζεται να τη σχεδιάσετε, στο σχήμα 9 φαίνεται η γραφική παράσταση των f, ϕ και $y = x$.

5 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.). (5 μονάδες)

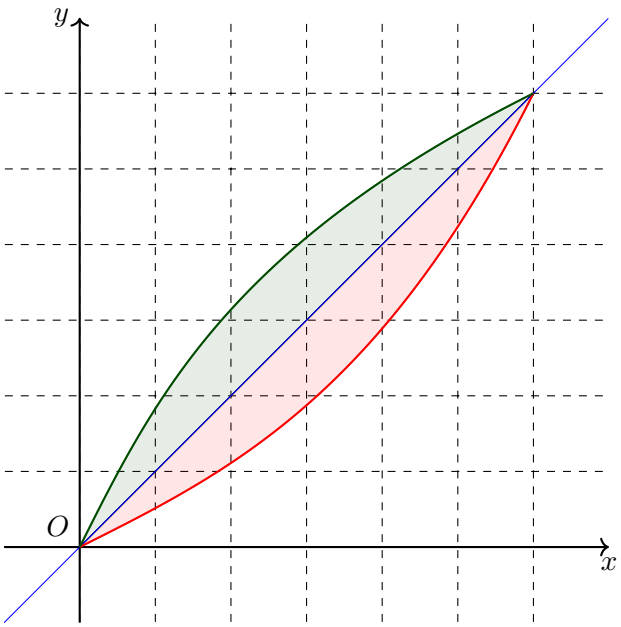
   Σ. Β., σελ. 76.

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$; (3 μονάδες)

   Σ. Β., σελ. 73.

3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle. (4 μονάδες)

   Σ. Β., σελ. 128.



Σχήμα 4: Οι γραφικές παραστάσεις των f, ϕ και $y = x$.

4. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

   (α′) Λάθος

   (β′) Λάθος

   (γ′) Λάθος

   (δ′) Σωστό

   (ε′) Σωστό

5. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (1 + 2 μονάδες):

   «Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα».

   Η πρόταση είναι **Σωστή**. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε, διαδοχικά, έχουμε:

   $$x_1 < x_2 \overset{f:\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \overset{f:\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2),$$

   επομένως η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x - e^{-x}}{2}.$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (1 μονάδα).

   Από τον τύπο της f δεν προκύπτει κανένας περιορισμός, επομένως $D_f = \mathbb{R}$.

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (5 μονάδες)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις απραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

$$f'(x) = \frac{1-(-e^{-x})}{2} = \frac{1+e^{-x}}{2} > 0,$$

επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση. (4 μονάδες)

Παρατηρούμε ότι $f(0) = -\frac{1}{2}$ και $f(1) = \frac{1-e^{-1}}{2} > 0$, αφού $e^{-1} < 1$, και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, επομένως, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

4. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μονάδες)

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

$$f''(x) = \frac{-e^{-x}}{2} < 0,$$

επομένως η f είναι κοίλη σε όλο το $\mathbb{R}$.

5. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. (5 μονάδες)

Εφ όσον $D_f = \mathbb{R}$, πρέπει να εξετάσουμε την ύπαρξη ασυμπτώτων στα $\pm\infty$.

- Στο $+\infty$, έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x-1}{2xe^x} \overset{y=xe^x}{\underset{y\to+\infty}{=\!=}} \lim_{y\to+\infty} \frac{y-1}{2y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{y}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Επίσης:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-e^{-x}}{2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-e^{-x}-x}{2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-e^{-x}}{2}\right) \overset{y=-x}{\underset{y\to-\infty}{=\!=}} \lim_{y\to-\infty} \frac{-e^y}{2} = 0,$$

επομένως, η f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

- Στο $-\infty$, έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2x} - \frac{e^{-x}}{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2x}\right).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{e^{-x}}{2x} \overset{y=-x}{\underset{y\to+\infty}{=\!=}} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{2y} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DL'H}}{=\!=}} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{2} = +\infty,$$

επομένως, $\lambda = -\infty$, άρα η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

6. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

Μένει να υπολογίσουμε τα όρια της f στα $\pm\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-e^{-x}}{2} \overset{y=-x}{\underset{y\to-\infty}{=\!=}} \lim_{y\to-\infty} \frac{-y-e^y}{2} = +\infty,$$

και:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{2} \xlongequal[y\to+\infty]{y=-x} \lim_{y\to+\infty} \frac{-y-e^{y}}{2} = \lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{y}{2}\left(1+\frac{e^{y}}{y}\right)\right] = -\infty,$$

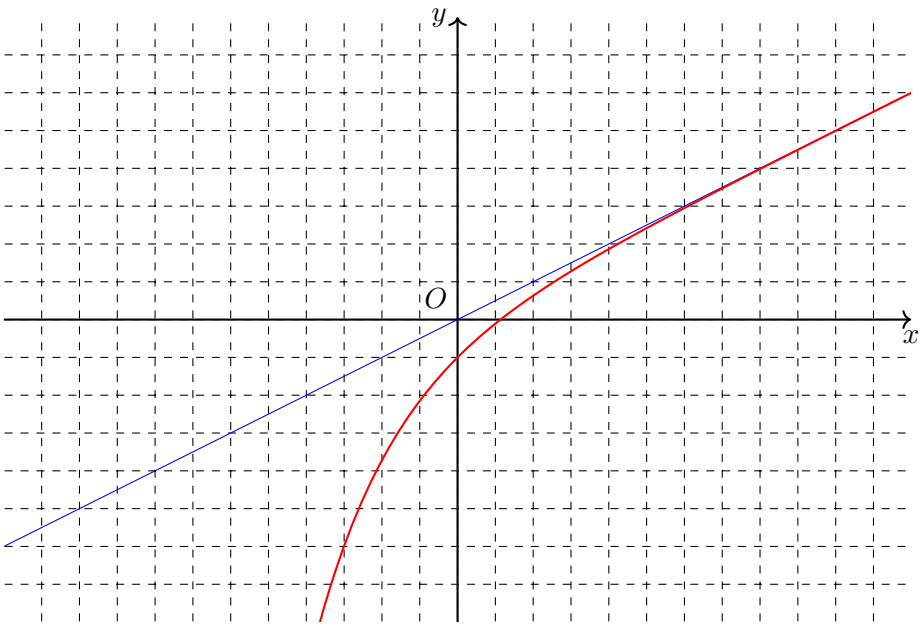
διότι:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{y} \xlongequal[\text{DL'H}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{1} = +\infty.$$

Τώρα, κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	

Σχεδιάζουμε, τώρα, και τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση της f.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{a-1}e^{-x^a} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases},$$

όπου $a>0$

1. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι συνεχής. (4 μονάδες)

   Για να είναι η f συνεχής, δεδομένου ότι στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,\infty)$ είναι ως σταθερή και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, αντίστοιχα, πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0.$$

Προφανώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, επομένως, μας μένει η περίπτωση:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} ax^{a-1}e^{-x^a} = 0.$$

Για $a = 1$, παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} 1 \cdot x^{1-1}e^{-x^1} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1 \neq 0,$$

επομένως, αυτή η περίπτωση απορρίπτεται.

Για $0 < a < 1$ έχουμε ότι $a - 1 < 0$ και:

$$\lim_{x\to 0^+} ax^{a-1}e^{-x^a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ae^{-x^a}}{x^{1-a}} = +\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} ae^{-x^a} = ae^0 = a$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-a} = 0$, αφού $1 - a > 0$ και $f(x) > 0$, για $x > 0$. Επομένως, κι αυτή η περίπτωση απορρίπτεται.

Για $a > 1$, τέλος, έχουμε ότι $a - 1 > 0$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{a-1} = 0^{a-1} = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+} ax^{a-1}e^{-x^a} = a \cdot 0 \cdot e^0 = 0,$$

επομένως, η f είναι συνεχής ακριβώς για $a > 1$.

2. Για $a > 1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(t)$, του χωρίου Ω_t που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = t$, όπου $t > 0$. (6 μονάδες)

Παρατηρούμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \leq 0$ και ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t ax^{a-1}e^{-x^a}dx = \int_0^t \left(-e^{-x^a}\right)' dx = \left[-e^{-x^a}\right]_0^t = 1 - e^{-t^a}.$$

3. Για $a > 1$, να δείξετε ότι (5 μονάδες):

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 1.$$

Έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - e^{-t^a}\right) \xrightarrow[y\to-\infty]{y=-t^a} \lim_{y\to-\infty} (1 - e^y) = 1 - 0 = 1.$$

4. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη. (4 μονάδες)

Εφ' όσον η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως σταθερή και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αντίστοιχα, πρέπει να ισχύει, επιπλέον:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} ax^{a-2}e^{-x^a} = l \in \mathbb{R}.$$

Για $x < 0$ έχουμε $f(x) = 0$, επομένως:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

οπότε πρέπει να ισχύει και ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Για $a=2$, παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}2\cdot x^{2-2}e^{-x^2}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x^2}=e^0=1\neq 0,$$

επομένως, αυτή η περίπτωση απορρίπτεται.

Για $0<a<2$ έχουμε ότι $a-2<0$ και:

$$\lim_{x\to 0^+}ax^{a-2}e^{-x^a}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{-x^a}}{x^{2-a}}=+\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}ae^{-x^a}=ae^0=a$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{2-a}=0$, αφού $2-a>0$ και $ax^{a-2}e^{-x^a}>0$, για $x>0$. Επομένως, κι αυτή η περίπτωση απορρίπτεται.

Για $a>2$, τέλος, έχουμε ότι $a-2>0$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a-2}=0^{a-2}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+}ax^{a-2}e^{-x^a}=a\cdot 0\cdot e^0=0,$$

επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη ακριβώς για $a>2$.

5. Για $a>2$, να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κάποιο $x_0\in(0,1)$. (6 μονάδες)

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f, αρχικά για $x>0$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(ax^{a-1}\right)'e^{-xa}e^{-x^a}+ax^{a-1}\left(e^{-x^a}\right)'=\\&=a(a-1)x^{a-2}e^{-x^a}+ax^{a-1}\left(-x^a\right)'e^{-x^a}=\\&=a(a-1)x^{a-2}e^{-x^a}-ax^{a-1}\left(ax^{a-1}\right)e^{-x^a}=\\&=a(a-1)x^{a-2}e^{-x^a}-a^2x^{2a-2}e^{-x^a}=\\&=ax^{a-2}e^{-x^a}\left(a-1-ax^a\right).\end{aligned}$$

Στο $x=0$ είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f'(0)=0$, ενώ, για $x<0$, προφανώς, $f'(x)=0$. Επομένως:

$$f'(x)=\begin{cases}ax^{a-2}e^{-x^a}\left(a-1-ax^a\right) & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases},\ a>2.$$

Εφ' όσον $f(x)=0$ για $x\leq 0$ και $f(x)>0$ για $x>0$, η f θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $(0,+\infty)$, επομένως, θα τη μελετήσουμε σε αυτό το διάστημα ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Αρχικά, επιλύουμε την εξίσωση:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow ax^{a-2}e^{-x^a}\left(a-1-ax^a\right)\underset{e^{-x^a}>0}{\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}}a-1-ax^a=0\Leftrightarrow x^a=\frac{a-1}{a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{a-1}{a}\right)^{1/a}.$$

Επιλύουμε και την ανισότητα:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow ax^{a-2}e^{-x^a}\left(a-1-ax^a\right)\underset{e^{-x^a}>0}{\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}}a-1-ax^a>0\Leftrightarrow x<\underbrace{\left(\frac{a-1}{a}\right)^{1/a}}_{x_a},$$

οπότε, ο πίνακας προσήμου της f' — μονοτονίας της f είναι:

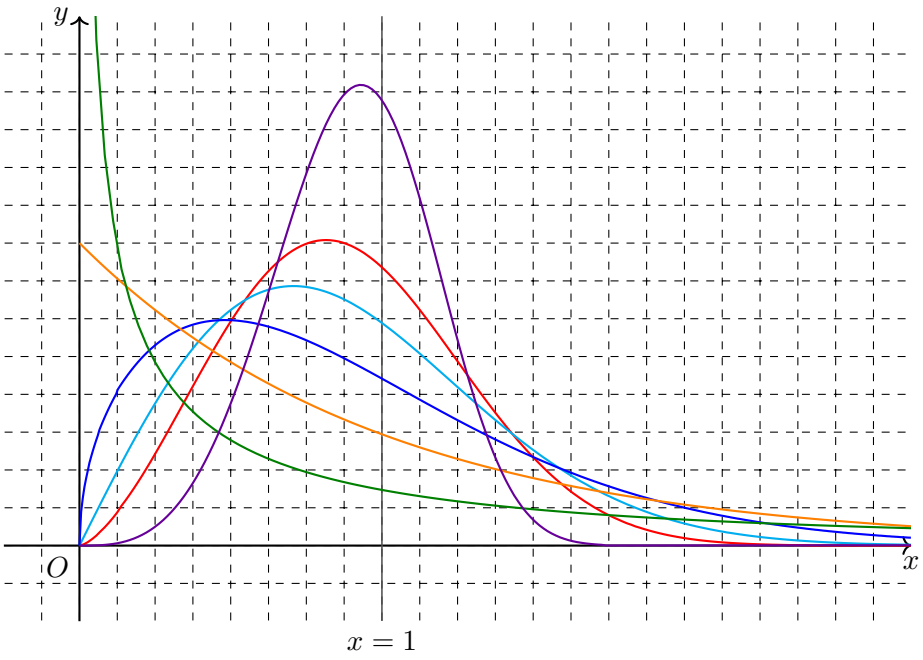
x	0		x_a		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	Ολ. μεγ.	↘	

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = x_a$. Μένει να δείξουμε ότι $x_a \in (0,1)$. Αρχικά, εφ' όσον $a > 2$, έπεται ότι $a-1 > 0$ και $x_a > 0$ (πράξεις μεταξύ θετικών αριθμών). Μένει να δείξουμε ότι $x_a < 1$. Έχουμε:

$$x_a < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{a}\right)^{1/a} < 1 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a} < 1 \Leftrightarrow a-1 < a \Leftrightarrow -1 < 0,$$

που ισχύει, επομένως ισχύει και το αρχικό, άρα $x_a \in (0,1)$.

Ενδεικτικά, στο σχήμα 9 φαίνεται η γραφική παράσταση της f για διάφορες τιμές του a.



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση της f για $a = 0.5$, $a = 1$, $a = 1.5$, $a = 2$, $a = 2.5$ και $a = 4$ και $x > 0$.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $\int_0^1 f(t)dt = 1$,
- $f(x) \geq 0$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι μηδέν σε όλο το $[0,1]$. (4 μονάδες)

   Έστω, προς άτοπο, ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε, προφανώς:

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 0dt = 0 \neq 1,$$

άτοπο, επομένως η f δεν είναι παντού μηδέν.

2. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[0,1]$, με $F(0)=0$ τότε:

   (α΄) να δείξετε ότι αν $x<y$ τότε $F(x)\leq F(y)$, (5 μονάδες)

   Έστω $x<y$. Αφού η F είναι παράγουσα της f, ισχύει ότι $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο (x,y) και συνεχής στο $[x,y]$ (ως παραγωγίσιμη), επομένως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έπεται ότι υπάρχει ένα $\xi\in(x,y)$ τέτοιο ώστε:

   $$F'(\xi)=\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(y)-F(x)}{y-x}.$$

   Όμως, $f(\xi)\geq 0$, επομένως:

   $$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\geq 0\overset{y-x>0}{\Longleftrightarrow}F(y)-F(x)\geq 0\Leftrightarrow F(y)\geq F(x),$$

   που ήταν και το ζητούμενο.

   (β΄) να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της F είναι το $F([0,1])=[0,1]$. (5 μονάδες)

   Αρχικά, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης έπεται ότι:

   $$\int_0^1 f(t)dt=F(1)-F(0)\Leftrightarrow F(1)=1,$$

   οπότε, από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε, για $x\in[0,1]$:

   $$x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1\Rightarrow F(0)\leq F(x)\leq F(1)\Leftrightarrow 0\leq F(x)\leq 1.$$

   Εφ' όσον η F είναι συνεχής, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $F(0)$ και $F(1)$ (Θ.Ε.Τ.), δηλαδή μεταξύ των 0 και 1, άρα, πράγματι:

   $$F([0,1])=[0,1].$$

3. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,1]$ τέτοια ώστε $f(x_1)\leq 1\leq f(x_2)$. (7 μονάδες)

   Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, επομένως, από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, έπεται ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,1]$ τέτοια ώστε:

   $$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2),\ \forall\ x\in[0,1].$$

   Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα κατά μέλη, έπεται ότι:

   $$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)\Rightarrow\int_0^1 f(x_1)dx\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 f(x_2)dx\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow f(x_1)\int_0^1 1dx\leq 1\leq f(x_2)\int_0^1 1dx\Leftrightarrow f(x_1)\leq 1\leq f(x_2),$$

   που ήταν το ζητούμενο.

4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$. (4 μονάδες)

   Από το προηγούμενο ερώτημα, αν $f(x_1)=1$, τότε για $x_0=x_1$ έπεται το ζητούμενο. Ομοίως, αν $f(x_2)=1$, τότε, για $x_0=x_2$ έπεται το ζητούμενο. Αν, τώρα, $f(x_1)\neq 1$ και $f(x_2)\neq 1$, τότε έχουμε, από το προηγούμενο ερώτημα:

   $$f(x_1)<1<f(x_2).$$

Αφού η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών έπεται ότι υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1 και x_2 τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 1.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$.

6 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$, τότε είναι και συνεχής στο x_0. (5 μονάδες)

Σ. Β., σελ. 99.

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$; (3 μονάδες)

Σ. Β., σελ. 104.

3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής. (4 μονάδες)

Σ. Β., σελ. 128-129.

4. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

(α′) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Σωστό

(β′) Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x).$$

Λάθος

(γ′) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{συν}\, x}{x} = 1$.

Λάθος

(δ′) Αν η $g(x) = f(x) - 4x + 2019$ είναι παραγωγίσιμη, τότε και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Σωστό

(ε′) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι 1-1.

Σωστό

5. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας $(1 + 2$ μονάδες):

«Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) \geq 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα».

Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε $f'(x) = (4)' = 0 \geq 0$, όμως η f δεν είναι γνησίως αύξουσα (ως σταθερή).

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1).$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (2 μονάδες)

   Πρέπει να ισχύει $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, επομένως:

   $$D_f = (-1, +\infty).$$

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (7 μονάδες)

   Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

   $$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)e^x - 1}{x+1}.$$

   Εφ' όσον ο παρονομαστής $(x+1)$ είναι θετικός για κάθε $x > -1$, αρκεί να μελετήσουμε τον αριθμητή ως προς το πρόσημο. Θεωρούμε, λοιπόν, τη συνάρτηση:

   $$g(x) = (x+1)e^x - 1, \ x \in (-1, +\infty).$$

   Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

   $$g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0,$$

   για κάθε $x > -1$, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, άρα και 1-1. Επίσης, παρατηρούμε ότι:

   $$g(0) = (0+1)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

   επομένως, αφού είναι 1-1, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της. Για το πρόσημό της έχουμε:

   - Αν $x > 0$, τότε:
   $$x > 0 \overset{g:\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0.$$
   - Αν $-1 < x < 0$, τότε:
   $$x < 0 \overset{g:\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0.$$

   Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' — μονοτονίας της f, όπως φαίνεται στον πίνακα 8

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	Ολ. ελ.	↗	

Πίνακας 1: Η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μονάδες)

   Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

$$f''(x)=e^x-\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0,$$

   επομένως η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

4. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. (6 μονάδες)

   Αναζητούμε πλάγια/οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=+\infty-0=+\infty,$$

   διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\substack{\frac{\infty}{\infty}\\ \text{d L'H}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\substack{\frac{\infty}{\infty}\\ \text{d L'H}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0,$$

   επομένως, η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

   Αναζητούμε τώρα κατακόρυφη ασύμπτωτη της f στο -1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(e^x-\ln(1+x))\overset{\substack{y=1+x\\ y\to0^+}}{=}\lim_{y\to0^+}e^{y-1}-\ln y=e^{-1}-(-\infty)=+\infty,$$

   επομένως η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, την ευθεία $x=-1$.

5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

   Μας μένει να βρούμε το όριο της f στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-\ln(1+x))=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{\ln(1+x)}{e^x}\right)\right]=(+\infty)(1-0)=+\infty,$$

   διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{e^x}\overset{\substack{\frac{\infty}{\infty}\\ \text{d L'H}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)e^x}=\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}=0.$$

   Κατασκευάζουμε τώρα τον πίνακα μεταβολών της f, όπως φαίνεται στον πίνακα 9

   Επομένως, η γραφική παράσταση της f θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 10.

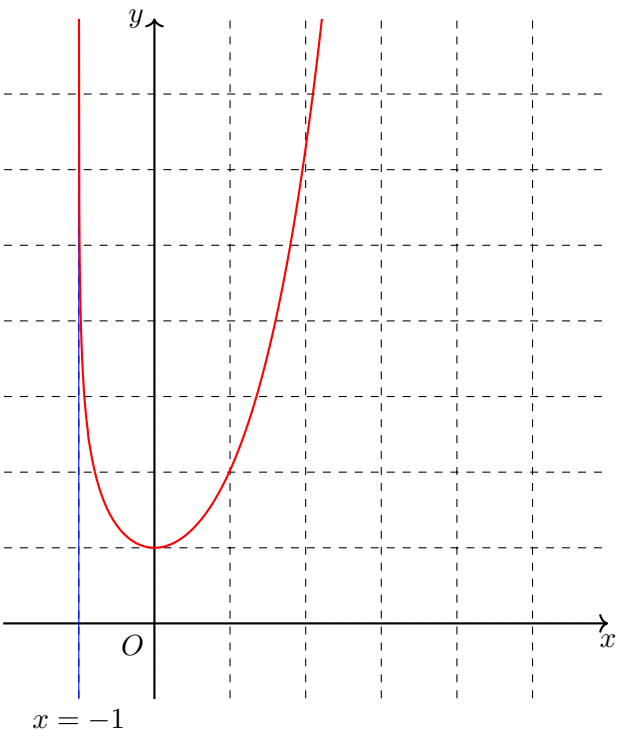
Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f(x))^2+4x^2-4=0,\ \forall\ x\in\mathbb{R},$$

με $f(0)=-2$.

x	-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(0)=1$	↗ $+\infty$	

Πίνακας 2: Ο πίνακας μεταβολών της f.



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της f.

1. Να δείξετε ότι (6 μονάδες):
$$f(x) = -2\sqrt{1-x^2}.$$

Θα βρούμε πρώτα τις ρίζες της f. Έστω x_0 μία ρίζα της f, οπότε $f(x_0) = 0$. Τότε, αντικαθιστώντας στη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$(f(x_0))^2 + 4x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1.$$

Επομένως, οι μόνες πιθανές ρίζες της f είναι οι 1 και -1. Αντικαθιστούμε $x = 1$ στη δοσμένη σχέση, οπότε:

$$(f(1))^2 + 4 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (f(1))^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0,$$

και, ομοίως, για $x = -1$:

$$(f(-1))^2 + 4 \cdot (-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (f(-1))^2 = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0,$$

άρα, οι μοναδικές ρίζες της f είναι οι 1 και -1. Συνεπώς, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$, επομένως, αφού η f είναι και συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο στο $(-1,1)$. Εφ' όσον $f(0) = -2 < 0$, έπεται ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Με αυτά κατά νου, έχουμε:

$$(f(x))^2 + 4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 = 4 - 4x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{4-4x^2} \overset{f(x)<0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{4(1-x^2)} = -2\sqrt{1-x^2}.$$

2. Να μελετήσετε την f ως προς την παραγωγισιμότητα και να βρείτε την παράγωγό της όπου αυτή ορίζεται. (5 μονάδες)

   Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων. Για τα 1 και -1 πρέπει να εργαστούμε ξεχωριστά.

   - Στο 1, βάσει του ορισμού, έχουμε:

   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x-1} =$$
   $$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty,$$

   διότι $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$ και $\frac{-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} < 0$ κοντά στο 1, για $x < 1$. Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

   - Ανάλογα, στο -1, βάσει του ορισμού, έχουμε:

   $$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x+1} =$$
   $$= \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1+x} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty,$$

   διότι $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1+x} = 0$ και $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} > 0$ κοντά στο -1, για $x > -1$. Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1.

3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (5 μονάδες)

   Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, όπως είδαμε και, μάλιστα:

   $$f'(x) = \frac{-2(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Επιλύουμε την εξίσωση:

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

   και την ανισότητα:

   $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \overset{\sqrt{1-x^2}>0}{\Longleftrightarrow} 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

   Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παίρνουμε τον πίνακα προσήμου της f' — μονοτονίας της f που φαίνεται στο πίνακα 10.

x	-1		0		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$		↘	Ολ. ελ.	↗	

Πίνακας 3: Ο πίνακας μονοτονίας της f.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = f(x+1),$$
έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, 0)$. (4 μονάδες)

5. Ένα σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f. Να βρείτε σε ποιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του. (5 μονάδες)

   Αφού το σημείο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f, έπεται ότι οι συντεταγμένες του, $x(t), y(t)$, ικανοποιούν τη σχέση:
$$y(t) = -2\sqrt{1-(x(t))^2}.$$
   Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, έχουμε:
$$y'(t) = \frac{-2(1-(x(t)^2)'}{2\sqrt{1-(x(t))^2}} = \frac{2x(t)x'(t)}{\sqrt{1-(x(t))^2}}.$$
   Αφού θέλουμε οι δύο ρυθμοί μεταβολής να είναι ίσοι, απαιτούμε $x'(t) = y'(t)$, οπότε:
$$x'(t) = \frac{2x(t)x'(t)}{\sqrt{1-(x(t))^2}} \Leftrightarrow x'(t)\sqrt{1-(x(t))^2} = 2x(t)x'(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x'(t)\sqrt{1-(x(t))^2} - 2x(t)x'(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t)\left(\sqrt{1-(x(t))^2} - 2x(t)\right) = 0.$$
   Αφού το M κινείται, έπεται ότι $x'(t) \neq 0$, επομένως:
$$\sqrt{1-(x(t))^2} - 2x(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-(x(t))^2} = 2x(t),$$
   επομένως, παίρνουμε τον περιορισμό $2x(t) \geq 0 \Leftrightarrow x(t) \geq 0$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:
$$\sqrt{1-(x(t))^2} = 2x(t) \Leftrightarrow 1-(x(t))^2 = 4(x(t))^2 \Leftrightarrow 3(x(t))^2 = 1 \overset{x(t)\geq 0}{\Longleftrightarrow} x(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
   Επομένως, $y(t) = -2\sqrt{1-(x(t))^2} = -2\sqrt{2/3}$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1/\sqrt{3}, -2\sqrt{2/3})$.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0,$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^x}{x}=-1$.
- $(f(x))^3+e^{f(x)}-1-e\geq 0$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

1. Να δείξετε ότι $f(0)=1$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0)=0$. (3+3 μονάδες)

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-e^x}{x}$, οπότε:

   $$g(x)=\frac{f(x)-e^x}{x}\Leftrightarrow xg(x)=f(x)-e^x\Leftrightarrow f(x)=e^x+xg(x).$$

   Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε:

   $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(e^x-xg(x))=e^0-0\cdot(-1)=1.$$

   Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, αρκεί το παρακάτω όριο να υπάρχει και να είνα πραγματικός αριθμός:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}.$$

   Παρατηρούμε ότι:

   $$\frac{f(x)-1}{x}=\frac{f(x)-e^x+e^x-1}{x}=\frac{f(x)-e^x}{x}+\frac{e^x-1}{x},$$

   επομένως:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-e^x}{x}+\frac{e^x-1}{x}\right)=-1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x\Big|_{x=0}=-1+e^0=0,$$

   επομένως, $f'(0)=0$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1,f(1))$. (2 μονάδες)

   Εφ' όσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, η εξίσωση εφαπτομένης της θα είναι:

   $$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=1.$$

3. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in[-1,1]$. (5 μονάδες)

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+e^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

   $$h'(x)=3x^2+e^x>0,$$

   επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $h(0)=0^3+e^0=1$. Τότε, η δοσμένη ανισότητα γράφεται στη μορφή:

   $$(f(x))^3+e^{f(x)}-1-e\geq 0\Leftrightarrow h(f(x))\geq 1+e\Leftrightarrow h(f(x))\geq h(1)\overset{h:\uparrow}{\Longleftrightarrow}f(x)\geq 1,$$

   που ήταν το ζητούμενο.

4. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[-1,1]$, τότε:

   (α') Η F ικανοποιεί την ανισότητα (6 μονάδες):

   $$|F(2x)-F(x)|\geq|x|,\ \forall\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

   Αν $x=0$, τότε το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Για $x\neq 0$, αφού η F είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$, άρα και συνεχής σε αυτό, ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-1,1]$. Επίσης, αφού $x\in[-1/2,1/2]$, έπεται ότι $2x\in[-1,1]$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x > 0$, τότε $[x, 2x] \subseteq [-1, 1]$, οπότε η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, 2x]$, άρα υπάρχει ένα $\xi \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}.$$

Αφού $f(\xi) \geq 1$, έχουμε:

$$\frac{F(2x) - F(x)}{x} = f(\xi) \geq 1 \Leftrightarrow F(2x) - F(x) \geq x \overset{x>0}{\Longrightarrow} |F(2x) - F(x)| \geq |x|.$$

- Ανάλογα, αν $x < 0$, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[2x, x] \subseteq [-1, 1]$, επομένως υπάρχει ένα $\xi \in (2x, x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(2x)}{x - 2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x) - F(2x)}{-x}.$$

Αφού $f(\xi) \geq 1$, έχουμε:

$$\frac{F(x) - F(2x)}{-x} = f(\xi) \geq 1 \Leftrightarrow F(x) - F(2x) \geq -x \overset{-x>0}{\Longrightarrow} |F(x) - F(2x)| \geq |-x| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |F(2x) - F(x)| \geq |x|.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, για κάθε $x \in [-1/2, 1/2]$, έχουμε:

$$|F(2x) - F(x)| \geq |x|.$$

(β′) Να δείξετε ότι (6 μονάδες):

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = F(-1) + F(1).$$

Η F είναι παραγωγίσιμη, οποτε, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = \int_{-1}^{1} (t)'F(t)dt = [tF(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} tF'(t)dt =$$
$$= F(1) - (-1)F(-1) - \int_{-1}^{1} tf(t)dt = F(1) + F(-1).$$

7 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Να αποδείξετε ότι αν f, g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και το άθροισμά τους, $f + g$ είναι παραγωγίσιμο στο x_0 και, μάλιστα (5 μονάδες):

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Σ. Β., σελ. 111.

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1; (3 μονάδες)

Σ. Β., σελ. 33.

3. Να δώσετε τον ορισμό μιας συνάρτησης $f : A \to B$. (4 μονάδες)

   Σ. Β., σελ. 15.

4. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

   (α′) Αν $f(4) = \ln 2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο 4, τότε $f'(4) = \frac{1}{2}$.

   Λάθος

   (β′) Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

   Λάθος

   (γ′) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μία άλλη συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε:

   $$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

   Σωστό

   (δ′) Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, όχι παντού μηδέν, τότε:

   $$\int_a^b f(t)dt > 0.$$

   Σωστό

   (ε′) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ κάποιο διάστημα, έχει σύνολο τιμών $f(\Delta)$ που είναι διάστημα.

   Λάθος

5. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (1 + 2 μονάδες):

   «Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε η $(f(x))^2$ είναι γνησίως αύξουσα».

   Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε την $f(x) = -x$, που είναι γνησίως φθίνουσα, όμως η $(f(x))^2 = x^2$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (1 μονάδα)

   $D_f = \mathbb{R}$, αφού $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (6 μονάδες)

   Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

   $$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

ενώ έχουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} > 0 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow} 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

επομένως, ο πίνακας προσήμου της f' — μονοτονίας της f είναι ο πίνακας 8.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Ολ. ελ.	↗	

Πίνακας 4: Η μονοτονία της f.

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (6 μονάδες)

   Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

   Επιλύουμε την εξίσωση:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1,$$

   ενώ, για το πρόσημο της f'' παρατηρούμε ότι:

$$f''(x) > 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Longleftrightarrow} 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)\,.$$

   Έτσι, ο πίνακας προσήμου της f'' — κυρτότητας της f είναι ο πίνακας 9.

4. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. (7 μονάδες)

   Αναζητούμε πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες της f στα $\pm\infty$.

   - Στο $+\infty$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \overset{\text{d l'H}}{\underset{\infty}{\overset{\infty}{=}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2(1+1/x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x(1+1/x^2)} = 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	

Πίνακας 5: Η κυρτότητα της f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	Σ.Κ.	↘	Ολ. Ελ.	↗	Σ.Κ.	↗	$+\infty$

Πίνακας 6: Ο πίνακας μεταβολών της f.

Επίσης:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1) \overset{y=x^2+1}{\underset{y\to+\infty}{=}} \lim_{y\to+\infty}\ln y = +\infty,$$

επομένως, η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- Στο $-\infty$, υπολογίζουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x} \overset{\text{d l'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2(1+1/x^2)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x(1+1/x^2)} = 0.$$

Επίσης:

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1) \overset{y=x^2+1}{\underset{y\to+\infty}{=}} \lim_{y\to-\infty}\ln y = +\infty,$$

επομένως, η f δεν έχει ασύμπτωτη ούτε στο $-\infty$.

5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

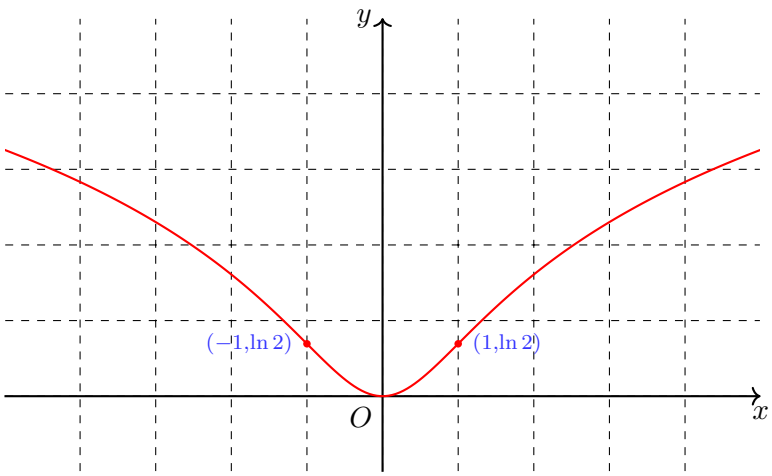
   Με βάση όλα τα παραπάνω, ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο πίνακας 10.

   Επομένως, η γραφική παράσταση της f θα είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 10.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R},$$

με $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.



Σχήμα 8: Η γραφική παράσταση της f.

1. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$. (4 μονάδες)

   Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = y = 0$, οπότε:

   $$f(0+0) = f(0) + f(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

   Για την παραγωγισιμότητα, έχουμε:

   $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και, μάλιστα, $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. (6 μονάδες)

   Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι το όριο:

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Διαδοχικά, έχουμε:

   $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{h = x - x_0}{=\!=\!=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) + f(h) + 2hx_0 - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 2hx_0}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + 2x_0 \right) = f'(0) + 2x_0 = 2x_0. \end{aligned}$$

   Οπότε, $f'(x_0) = 2x_0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x) = 2x$, όπως ήταν το ζητούμενο.

3. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2$. (2 μονάδες)

   Έχουμε:
   $$f'(x) = 2x = (x^2)' \Leftrightarrow f(x) = x^2 + c,$$
   για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$, έπεται ότι $f(0) = 0^2 + c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f(x) = x^2$, όπως ήταν το ζητούμενο.

4. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο που κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του σημείο M από το σημείο $E(0, 1/4)$ είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης, y, του σημείου M. (7 μονάδες)

   Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την Β' Λυκείου και να παρατηρήσουμε ότι το E είναι η εστία της παραβολής $y = x^2$ και ότι η απόσταση (ME) ισούται, εξ ορισμού, με την απόσταση του M από τη διευθετούσα της παραβολή $x = -1/4$, υπομένως η απόσταση είναι ίση με $d(t) = y(t) + 1/4$, άρα έχει ρυθμό μεταβολής $d'(t) = y'(t)$, που είναι και το ζητούμενο. Αλλά θα πάμε στα «τυφλά», σαν να μην θυμόμαστε αυτήν την λεπτομέρεια.

   Η απόσταση του σημείου M από το E είναι ίση με:
   $$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}} \overset{y=x^2}{=\!=} \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} =$$
   $$= \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x^2 + \frac{1}{2}\right| = x^2 + \frac{1}{2}.$$

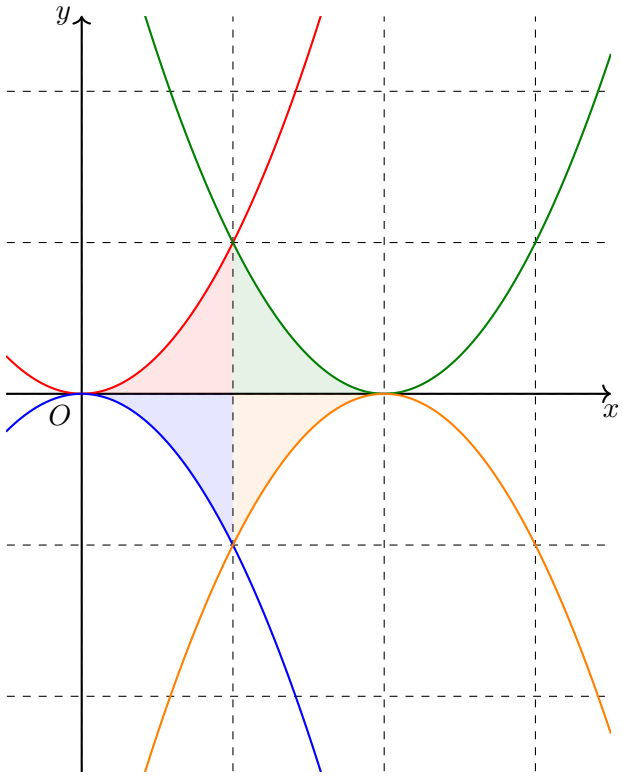
   Θεωρούμε, επομένως, τη συνάρτηση $d(t) = x^2(t) + \frac{1}{2}$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης (ME) είναι ίσος με:
   $$d'(t) = 2x(t)x'(t).$$
   Η τεταγμένη y του M, αφού το M είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, είναι ίση με $y = x^2$, επομένως ο ρυθμός μεταβολής της είναι:
   $$y'(t) = (x^2(t))' = 2x(t)x'(t) = d'(t),$$
   που ήταν το ζητούμενο.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, τη γραφική παράσταση της $-f$ και τη γραφική παράσταση της $-g$, όπου $g(x) = f(x - 2)$. (6 μονάδες)

   Αρχικά, κάνουμε ένα σχήμα, για να δούμε ποιο είναι το χωρίο που μας ζητείται.

   Όπως φαίνεται στο σχήμα 9, λόγω της συμμετρίας του σχήματος, αρκεί να υπολογίσουμε ένα από τα τέσσερα χρωματισμένα χωρία για να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν. Επιλέγουμε το πιο απλό:
   $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.},$$
   επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι το τετραπλάσιο, $E = \frac{4}{3}$ τ.μ..

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:



Σχήμα 9: Το χωρίο της ολοκλήρωσης $(f, -f, g, -g)$.

- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και η f' είναι συνεχής με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{x}=0$,
- $|f'(x)\sqrt{1-x^2}|=1$, για κάθε $x\in(-1,1)$,
- η f είναι περιττή.

1. Να δείξετε ότι $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και ότι $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(1+1+2$ μονάδες$)$

   Εφ' όσον η f είναι περιττή, έπεται ότι:

   $$f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0.$$

   Επίσης, για να υπολογίσουμε το $f'(0)$, εργαζόμαστε ως εξής: Θέτουμε $g(x)=\frac{f'(x)-1}{x}$, με $x\in(-1,1)$, οπότε:

   $$f'(x)=xg(x)+1.$$

   Εφ' όσον η f' είναι συνεχής, το όριό της στο 0 υπάρχει και είναι ίσο με το $f'(0)$, οπότε:

   $$f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(xg(x)+1)=0\cdot 0+1=1.$$

   Αφού η f' είναι συνεχής και:

   $$\left|f'(x)\sqrt{1-x^2}\right|=1\neq 0,$$

   έπεται ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,1)$, επομένως η f' διατηρεί πρόσημο στο $(-1,1)$. Αφού $f'(0)=1>0$, έπεται ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,1)$, οπότε:

   $$\left|f'(x)\sqrt{1-x^2}\right|=1\Leftrightarrow f'(x)\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Να δείξετε ότι $f(\eta\mu\, x) = x$, για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. (6 μονάδες)

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = f(\eta\mu\, x) - x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η ϕ είναι καλώς ορισμένη, αφού για $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ έχουμε $\eta\mu\, x \in [-1, 1] = D_f$, οπότε έχει νόημα το $f(\eta\mu\, x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ϕ είναι μηδενική. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων και, μάλιστα:

$$\phi'(x) = f'(\eta\mu\, x)(\eta\mu\, x)' - 1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sqrt{1 - \eta\mu^2\, x}} - 1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\, x}} - 1 \overset{\substack{x\in[-\pi/2,\pi/2] \\ \sigma\upsilon\nu\, x \geq 0}}{=\!=\!=} \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x} - 1 = 0,$$

   επομένως, αφού είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, η ϕ είναι σταθερή στο $[-1, 1]$. Επειδή:

$$\phi(0) = f(\eta\mu\, 0) - 0 = f(0) - 0 = 0 - 0 = 0,$$

   έπεται ότι $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, που ήταν το ζητούμενο.

3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (2 + 2 μονάδες)

   Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ με ολικό μέγιστο το $f(1)$ και ολικό ελάχιστο το $f(-1)$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[f(-1), f(1)]$. Μένει να προσδιορίσουμε τα $f(-1), f(1)$. Από το προηγούμενο ερώτημα, για $x = \pi/2$ έπεται ότι:

$$f(\eta\mu(\pi/2)) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

   Επειδή η f είναι περιττή, έπεται ότι:

$$f(-1) = -f(1) = -\frac{\pi}{2},$$

   επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $f([-1, 1]) = [-\pi/2, \pi/2]$.

4. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (4 μονάδες)

   Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και, μάλιστα:

$$f''(x) = \left((1 - x^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(1 - x^2)' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

   Επιλύουμε την εξίσωση:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

   ενώ, για το πρόσημο της f'' παρατηρούμε ότι:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} > 0 \overset{\sqrt{(1-x^2)^3}>0}{\Longleftrightarrow\!=\!=} x > 0,$$

   επομένως, αφού η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, ο πίνακας προσήμου της f'' — κυρτότητας της f είναι ο πίνακας 7.

5. Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{4} < \displaystyle\int_0^1 \left(f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt < \frac{\pi}{2}$. (7 μονάδες)

   Έστω $t \in (0, 1)$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής στο $[-t/2, t]$ και παραγωγίσιμη στο $(t/2, t)$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (t/2, t)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(t) - f(t/2)}{t - t/2} \Leftrightarrow \frac{t}{2} f'(\xi) = f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right).$$

x	-1		0		1
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f''(x)$	‖	∩	Σ.Κ.	∪	‖

Πίνακας 7: Η κυρτότητα της f.

Αφού $\xi \in (t/2, t) \subseteq (0,1)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1)$, έπεται ότι:

$$f'(0) < f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{t}{2} < \frac{t}{2} f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{t}{2} < f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{t}{2} dt < \int_0^1 f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt.$$

Αφού $\int_0^1 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$, έχουμε το αριστερό σκέλος της ζητούμενης ανισότητας:

$$\frac{1}{4} < \int_0^1 \left(f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt.$$

Για το δεξί σκέλος της ανισότητας, παρατηρούμε ότι, αφού $t \in (0,1)$, έπεται ότι $t/2 \in (0,1)$ και, δεδομένου ότι η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$f(0) < f(t) < f(1) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{\pi}{2} \text{ και } f(0) < f(t/2) < f(1) \Leftrightarrow 0 < f(t/2) < \frac{\pi}{2}.$$

Η δεύτερη ανισότητα, αν πολλαπλασιασεί με -1, ξαναγράφεται ως εξής:

$$-\frac{\pi}{2} < f(t/2) < 0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη με την πρώτη, έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} < f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^1 \left(f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt < \frac{\pi}{2},$$

που ήταν το ζητούμενο.

8 Επαναληπτικό διαγώνισμα εφ' όλης της ύλης

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (a,b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής και $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x)0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. (7 μονάδες)

Σ.Β., σελ. 144.

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα; (5 μονάδες)

Σ.Β., σελ. 31.

3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

(α′) Αν η f είναι κυρτή τότε $f'(x) > 0$.

Λάθος

(β′) Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

Σωστό

(γ′) Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι και αντιστρέψιμη.

Σωστό

(δ′) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 και g μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Σωστό

(ε′) Κάθε συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, δεν είναι ούτε συνεχής σε αυτό.

Λάθος

4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας $(1+2$ μονάδες):

«Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, εξίσωση $f(x)=y$ έχει πάντα ακριβώς μία λύση ως προς y για κάθε $x\in\mathbb{R}$.».

Η πρόταση είναι **Σωστή**, αφού η f είναι συνάρτηση, επομένως, αντιστοιχίζει *κάθε* $x\in\mathbb{R}$ σε ένα και *μοναδικό* $y\in\mathbb{R}$ (ορισμός της συνάρτησης).

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (7 μονάδες)

Η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\\&=\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\\&=\frac{e^xe^x+e^x-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\\&=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.\end{aligned}$$

2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (6 μονάδες)

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\\&=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left((e^x+1)^2\right)'}{(e^x+1)^4}=\\&=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}=\end{aligned}$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} =$$
$$= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x) = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Δεδομένου ότι η f'' είναι συνεχής, ότι $f''(1) = \frac{e(1-e)}{(e+1)^3} < 0$ και $f''(-1) = \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{(e^{-1}+1)^3} > 0$, παίρνουμε τον πίνακα 8 (προσήμου της f'' — μονοτονίας της f).

x	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		⌣	Σ.Κ.	⌢	

Πίνακας 8: Η κυρτότητα της f.

3. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. (7 μονάδες)

   Θα αναζητήσουμε ασύμπτωτες της f στα $\pm\infty$.

   - Στο $+\infty$, έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(e^x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{xe^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} =$$
$$= \frac{1}{+\infty(1+0)} =$$
$$= 0.$$

   Επομένως, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Υπολογίζουμε τώρα το όριο:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} =$$
$$= \frac{1}{1+0} =$$
$$= 1.$$

   Έτσι, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την ευθεία $y = 1$.

- Στο $-\infty$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x(e^x+1)} = \\ &= \frac{0}{-\infty(0+1)} = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Επομένως, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Υπολογίζουμε τώρα το όριο:

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \\ &= \frac{0}{0+1} = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Έτσι, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$, την ευθεία $y=0$.

4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f. (5 μονάδες)

Κατασκευάζουμε, με βάση τα παραπάνω, τον πίνακα μεταβολών της f, όπως φαίνεται στον πίνακα 9.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	Σ.Κ.	↗	1

Πίνακας 9: Ο πίνακας μεταβολών της f.

Έτσι, η γραφική παράσταση της f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 10.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)-f(x)=4x^3e^x,\ \forall\ x\in\mathbb{R},$$

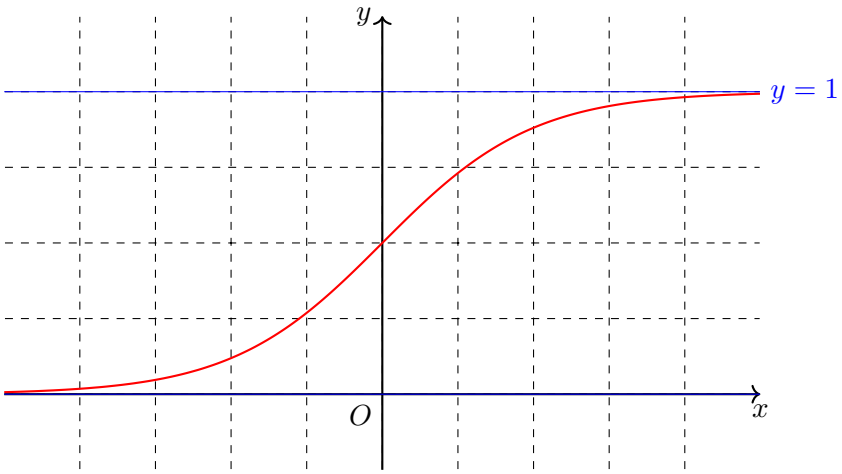
και, επιπλέον:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

1. Να δείξετε ότι $f(0)=0$ (2 μονάδες)

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x},$$



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της f.

και x κοντά στο 0. Τότε, εξ υποθέσεως έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Επίσης, $f(x) = xg(x)$ και, αφού η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη), έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} xg(x) = 0 \cdot 0 = 0,$$

που ήταν το ζητούμενο.

2. Να δείξετε ότι η $\phi(x) = e^{-x}f(x) - x^4$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (5 + 1 μονάδες)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = e^{-x}f(x) - x^4$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \left(e^{-x}f(x) - x^4\right)' = \\
&= (e^{-x})'f(x) + e^{-x}f'(x) - 4x^3 = \\
&= -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) - 4x^3 = \\
&= e^{-x}(f'(x) - f(x)) - 4x^3 = \\
&= e^{-x}4x^3e^{x} - 4x^3 = \\
&= 4x^3e^{x-x} - 4x^3 = \\
&= 4x^3 - 4x^3 = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

επομένως, από το θεώρημα σταθερής συνάρτησης έπεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$\phi(x) = c.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\phi(0) = e^0 f(0) - 0^4 = 0,$$

επομένως $c = 0$, οπότε:

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f(x) - x^4 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = x^4 \Leftrightarrow f(x) = x^4 e^x.$$

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (6 μονάδες).

Η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = (x^4)' e^x + x^4 (e^x)' = 4x^3 e^x + x^4 e^x = x^3 e^{-x}(4 + x).$$

Τώρα, έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 e^x (4 + x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ ή } 4 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -4,$$

οπότε, ο πίνακας προσήμου της f' — μονοτονίας της f είναι αυτός που φαίνεται στον πίνακα 10.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	Τ. Ελ.	↘	Τ. Μεγ.	↗	

Πίνακας 10: Η μονοτονία της f.

Επομένως, έχουμε τα εξής:

- $f((-\infty, -4]) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(0) \right] = (0, 256e^{-4}]$, αφού:

$$f(-4) = 256e^{-4},$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{d L'H}}{=}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3}{-e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{d L'H}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^2}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{d L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{24x}{-e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{d L'H}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{24}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} 24e^x = 0.$$

- $f((-4, 0]) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to -4} f(x) \right) = [f(0), f(-4)) = [0, 256e^{-4})$, αφού η f είναι συνεχής.
- $f(0, +\infty) = \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$, αφού η f είναι συνεχής και:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \lim_{x \to +\infty} x^4 e^x = +\infty.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty).$$

4. Αν M είναι ένα σημείο που κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της g όπου

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4},$$

να δείξετε ότι το σημείο στο οποίο η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι ελάχιστη έχει αρνητική τετμημένη. (6 μονάδες)

Αφού το σημείο M βρίσκεται επί της γραφικής παράστασης της g θα είναι της μορφής $M(x, g(x))$, οπότε και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων θα δίνεται από τη σχέση:

$$d(M,O) = \sqrt{(g(x)-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{(g(x))^2 + x^2}.$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την υπόρριζη παράσταση, οπότε αναζητούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$d(x) = (g(x))^2 + x^2 = e^{2x} + x^2,\ x \neq 0.$$

Η d είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$d'(x) = 2e^{2x} + 2x = 2(e^{2x} + x).$$

Εφ' όσον η d' είναι συνεχής και $d'(0)d'(-1) = e^{-2} - 1 < 0$, από το θεώρημα του Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0) = 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$d''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0,$$

επομένως η d' είναι γνησίως αύξουσα, άρα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, με $d'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $d'(x) > 0$ για $x > x_0$, επομένως η d παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x_0. Αφού $x_0 \in (-1,0)$, έπεται ότι το x_0 είναι αρνητικό, που είναι και το ζητούμενο.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -4$ και $x = 1$. (5 μονάδες)

Το εμβαδόν του περιγραφόμενου χωρίου υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$E(\Omega) = \int_{-4}^{1} |f(x)|dx \overset{f(x)\geq 0}{=\!=} \int_{-4}^{1} x^4 e^x dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τέσσερις φορές, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(\Omega) &= \int_{-4}^{1} x^4 e^x dx = \int_{-4}^{1} x^4 (e^x)' dx = \left[x^4 e^x\right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 4x^3 e^x dx = \\
&= e - 256e^{-4} - \left[4x^3 e^x\right]_{-4}^{1} + \int_{-4}^{1} 12x^2 e^x dx = \\
&= e - 256e^{-4} - 4e - 256e^{-4} + \left[12x^2 e^x\right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 24x e^x dx = \\
&= -3e - 512e^{-4} + 12e - 192e^{-4} - [24xe^x]_{-4}^{1} + \int_{-4}^{1} 24e^x dx = \\
&= 9e - 704e^{-4} - 24e - 96e^{-4} + \int_{-4}^{1} 24e^x dx = \\
&= 9e - 704e^{-4} - 24e - 96e^{-4} + [24e^x]_{-4}^{1} = \\
&= -15e - 800e^{-4} + 24e - 24e^{-4} = \\
&= 9e - 824e^{-4} \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα,
- $0 < \int_0^a f(t)dt < 1$, για κάθε $a > 0$,
- $\frac{f(x)}{f(x)+1} > 0$, για κάθε $x \geq 0$.

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. (4 μονάδες)

   Παρατηρούμε ότι $\frac{f(x)}{f(x)+1} > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ίσχυε το δεύτερο, τότε, για $a > 0$, θα είχαμε:

   $$\int_0^a f(x)dx < \int_0^a -1dx = -a \leq 0,$$

   άτοπο, επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, ισχύει ότι $f(x) < 1$. (7 μονάδες)

   Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \geq 1$. Τότε, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, έπεται ότι, για κάθε $x \in [0, x_0]$ ισχύει ότι:

   $$f(x) \geq f(x_0).$$

   Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε:

   $$\int_0^{x_0} f(x)dx \geq \int_0^{x_0} f(x_0)dx = f(x_0)(x_0 - 0) = x_0 f(x_0).$$

   Αφού $f(x_0) \geq 1$ και $x_0 > 1$ έπεται ότι:

   $$\int_0^{x_0} f(x)dx > 1,$$

   άτοπο. Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

3. Αν F είναι μία παράγουσα της F στο $\mathbb{R}$, τότε:

   (α′) Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα. (3 μονάδες)

   Αφού η F είναι παράγουσα της f, έπεται ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$. Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ έπεται ότι η F είναι γνησίως αύξουσα, ενώ, αφού η $f = F'$ είναι γνησίως φθίνουσα, έπεται ότι η F είναι κοίλη.

   (β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει ότι (6 μονάδες):

   $$\frac{F(x^2) - F(x)}{x - 1} < x.$$

   Για $x > 1$ ισχύει ότι $x^2 > x$ και, εφ' όσον η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x^2]$, έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (x, x^2)$ τέτοιο ώστε:

   $$F'(\xi) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)}.$$

Δεδομένου ότι $\xi > x > 1$, έπεται ότι $f(\xi) < 1$, άρα:

$$\frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x-1} < x,$$

που ήταν το ζητούμενο.

(γ′) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x) + xe^x = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[0, +\infty)$. (5 μονάδες)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x) + xe^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = F'(x) + e^x + xe^x = f(x) + (x+1)e^x > 0,$$

αφού $x \geq 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και 1-1, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[0, +\infty)$, που ήταν και το ζητούμενο.

Κατάλογος Σχημάτων

1 Η γραφική παράσταση της $|f|$. 9
2 Οι γραφικές παράστασεις των $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$ και $f(x)$. 14
3 Η γραφική παράσταση της f. 27
4 Οι γραφικές παραστάσεις των f, ϕ και $y = x$. 32
5 Η γραφική παράσταση της f. 34
6 Η γραφική παράσταση της f για $a = 0.5$, $a = 1$, $a = 1.5$, $a = 2$, $a = 2.5$ και $a = 4$ και $x > 0$. 37
7 Η γραφική παράσταση της f. 42
8 Η γραφική παράσταση της f. 50
9 Το χωρίο της ολοκλήρωσης $(f, -f, g, -g)$. 52
10 Η γραφική παράσταση της f. 58

Κατάλογος Πινάκων

1 Η μονοτονία και τα ακρότατα της f. 40
2 Ο πίνακας μεταβολών της f. 42
3 Ο πίνακας μονοτονίας της f. 44
4 Η μονοτονία της f. 48
5 Η κυρτότητα της f. 49
6 Ο πίνακας μεταβολών της f. 49
7 Η κυρτότητα της f. 54
8 Η κυρτότητα της f. 56
9 Ο πίνακας μεταβολών της f. 57
10 Η μονοτονία της f. 59