∀fter – maths

Πρόχειρες σημειώσεις και ασκήσεις στα

Μαθηματικα Προσανατολισμου

της Γ' Λυκείου

Κεφάλαιο 2ο: Όρια



Αθηνα 2019
Πρόχειρη έκδοση (αναθεωρημένη)
Γεμάτη λάθη

Περιεχόμενα

Αντί προλόγου **5**

1 Η έννοια της προσέγγισης στους πραγματικούς αριθμούς **6**
1.1 $0.999\ldots = 1$ ή κάποιος το έχει χάσει; . . . 6
1.2 Κινούνται οι αριθμοί; . . . 7
1.3 Σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου . . . 8
1.3.1 Σημεία συσσώρευσης που είναι πραγματικοί αριθμοί . . . 8
1.3.2 Σημεία συσσώρευσης που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί . . . 10

2 Η έννοια του ορίου συνάρτησης **10**
2.1 x και $f(x)$ — μια σχέση... εξάρτησης . . . 10
2.2 Όρια συναρτήσεων . . . 12
2.2.1 Πεπερασμένα όρια . . . 12
2.2.2 Άπειρα όρια . . . 13
2.3 Υπάρχουν πάντα όρια; . . . 13
2.4 Βασικές ιδιότητες των ορίων . . . 15
2.4.1 Άλγεβρα των (πεπερασμένων) ορίων . . . 15
2.4.2 Άλγεβρα των άπειρων ορίων . . . 17
2.5 Μερικά βασικά αποτελέσματα για τα όρια . . . 19
2.5.1 Τοπική συμπεριφορά των συναρτήσεων . . . 20
2.5.2 Κριτήριο Παρεμβολής . . . 21
2.6 Πλευρικά όρια . . . 22

3 Τεχνικές υπολογισμού ορίων **24**
3.1 Όρια βασικών συναρτήσεων . . . 24
3.1.1 Όριο σταθερή συνάρτησης . . . 24
3.1.2 Όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ . . . 24
3.1.3 Όριο γραμμικών συναρτήσεων $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ . . . 24
3.1.4 Όριο μονωνύμου $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ . . . 24
3.1.5 Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\nu x^\nu$ . . . 25
3.1.6 Όριο ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ . . . 25
3.1.7 Όριο $\nu-$οστής ρίζας $f(x) = \sqrt[\nu]{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$ . . . 25
3.1.8 Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . 25
3.1.9 Όρια εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων . . . 26
3.1.10 Όριο της συνάρτησης $f(x) = x^a$, με $a \neq 0$ . . . 27
3.1.11 Όρια της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ . . . 27
3.1.12 Όρια που θεωρούνται γνωστά . . . 27
3.2 Όριο σύνθετης συνάρτησης . . . 28
3.3 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{0}{0}$ . . . 31
3.4 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\infty - \infty$ . . . 36
3.5 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . . . 41
3.5.1 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $0 \cdot (\pm\infty)$ . . . 43
3.5.2 Όρια με αλλαγή μεταβλητής . . . 44
3.5.3 Όρια των (απροσδιόριστων) μορφών $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, 0^0 και $(\pm\infty)^{\pm\infty}$ . . . 45
3.5.4 Υπολογισμός ορίων με τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής . . . 46
3.6 Όρια που μας φέρνουν... εκτός ορίων . . . 49

4 Μία εφαρμογή των όσων είδαμε ως τώρα: Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης συνάρτησης **55**

4.1 Όρια συνάρτησης στο άπειρο 55
4.2 Όρια συνάρτησης στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της 57
4.3 Ορισμός ασύμπτωτης γραφικής παράστασης συνάρτησης 60
4.4 Εύρεση ασυμπτώτων γραφικής παράστασης συνάρτησης 61

5 Ασκήσεις **64**
5.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους 64
5.2 Α΄ Ομάδα 67
5.3 Β΄ Ομάδα 69
5.4 Γ΄ Ομάδα 77
5.5 Δ΄ Ομάδα 80

Αντί προλόγου

Άλλη μία έκδοση του ***∀fter − maths*** είναι γεγονός. Στην προκειμένη, βέβαια, πρόκειται για μία εμπλουτισμένη επανέκδοση, στην οποία θα βρείτε αρκετά αναλυτικές σημειώσεις θεωρίας, ασκήσεις και προβλήματα σε σχέση με την ενότητα των ορίων των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Λυκείου. Δύο σημαντικά πράγματα που πρέπει να έχει κανείς κατά νου διαβάζοντας τις παρούσες σημειώσεις είναι τα εξής:

- Όπως και σε όλα τα άλλα πακέτα σημειώσεων, έχουν συμπεριληφθεί πολλά πράγματα που τυπικά είναι «εκτός ύλης». Ενδεικτικά, τα σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου δεν διδάσκονται με βάση το τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά θεωρώ ότι είναι τουλάχιστον αντιεπιστημονικό να μιλάμε για όρια συναρτήσεων χωρίς μία καλή διαισθητική εικόνα της έννοιας του σημείου συσσώρευσης. Προφανώς δεν έχουν συμπεριληφθεί $\epsilon - \delta$ ορισμοί και άλλα πράγματα που ανήκουν αμιγώς στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά σε όλες τις σημειώσεις γίνεται μία χαλαρή αντιμετώπιση των «εκτός ύλης» εννοιών, στο επίπεδο που κρίνεται απαραίτητο κάθε φορά.
- Στο δίλημμα του να οριστεί το όριο με τον παραδοσιακό $\epsilon - \delta$ ορισμό ή να μπε διαισθητικά μέσα από κάποιους πίνακες τιμών ή κάποιον άλλο γραφικό τρόπο, οι παρούσες σημειώσεις απαντούν με το να μην επιλέξουν καμμία από τις δύο επιλογές. Αντιθέτως, η έννοια της σύγκλισης και του ορίου εισάγονται ταυτόχρονα[1] μέσω μίας παραλλαγής της «αρχής της μεταφοράς». Για την ακρίβεια, οι ακολουθίες που εμφανίζονται στην αρχή της μεταφοράς «κρύβονται» πίσω από την έννοια της μεταβλητής (που σε όλη την έκταση των σημειώσεων θεωρείται ότι παίρνει διακριτές τιμές) και τη σχέση ντάμας και καβαλλιέρου που έχουν η εξαρτημένη με την ανεξαρτητη μεταβλητή σε μία συνάρτηση.

Τέλος, να προστεθεί ότι δεν έχουν συμπεριληφθεί ασκήσεις για τις ασύμπτωτες, παρ' όλο που η σχετική θεωρία παρουσιάζεται ως ένα παράδειγμα εφαρμογής των ορίων, και αναμένεται να συμπληρωθούν σε επόμενη έκδοση.

Όπως πάντα, για όποιες απορίες καθώς και για να βρείτε όλο το διδακτικό υλικό, επισκεφθείτε το https://aftermathsgr.wordpress.com/ (στην ενότητα του διδακτικού υλικού).

Καλό διάβασμα!

[1] Κάτι για το οποίο διατηρώ της αμφιβολίες μου και ίσως αναθεωρηθεί.

1 Η έννοια της προσέγγισης στους πραγματικούς αριθμούς

1.1 $0.999\ldots = 1$ ή κάποιος το έχει χάσει;

Όσοι προσέχατε στα μαθηματικά των προηγούμενων τάξεων, σίγουρα θα έχετε δει, ίσως ακόμα και να θυμάστε μια, κατά κάποιον τρόπο, ταχυδακτυλουργική απόδειξη, σε σχέση με τον τίτλο αυτής της ενότητας δηλαδή ότι ο αριθμός $0.999\ldots$ είναι, στην πραγματικότητα, ο αριθμός 1, απλά λίγο μασκαρεμένος. Για την ακρίβεια, η απόδειξη είχε ως εξής:

$$\begin{aligned} x = 0.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x = 9.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x - x = 9.999\ldots - 0.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 1, \end{aligned}$$

και, τσουπ, αποδείχθηκε αυτό που θέλαμε! Αλλά, για μισό λεπτό, θα πει κάποιος, πώς γίνεται να ξεκινάει ο ένας αριθμός με 0 και ο άλλος με 1 και να είναι ίσοι; Μήπως, τελικά, η παραπάνω απόδειξη έχει κάποιο λάθος;

Ας προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε το πρόβλημα αυτό λίγο βαθύτερα. Γενικά, γνωρίζουμε ότι για δύο πραγματικούς αριθμούς x και y μπορεί να ισχύει *ακριβώς ένα* από τα ακόλουθα τρία[2]:

$$x < y,\ x > y,\ x = y.$$

Η προηγούμενη απόδειξη μας δείχνει ότι ισχύει η ισότητα, αν και η διαίσθηση των περισσοτέρων θα έλεγε ότι ισχύει η ανισότητα $0.999\ldots < 1$, αφού «φαίνεται» ο αριθμός $0.999\ldots$ να είναι «λίγο πριν» το[3] 1. Για να καταλάβουμε καλύτερα τον αριθμό $0.999\ldots$[4] ας δούμε πρώτα κάποια «ξαδερφάκια» του. Για την ακρίβεια ας ασχοληθούμε πρώτα με τον αριθμό 0.9. Αυτός ο αριθμός είναι, προφανώς μικρότερος του 1 αλλά και του $0.999\ldots$. Επίσης, και ο αριθμός 0.99 είναι μικρότερος και από τον 1 και από τον $0.999\ldots$ και, γενικότερα, για προφανείς λόγους, όλοι οι αριθμοί που έχουν οσοδήποτε πολλά, αλλά όχι άπειρα, «9» στο δεκαδικό τους μέρος, είναι αυστηρά μικρότεροι από τους 1 και $0.999\ldots$, δηλαδή:

$$0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} < 0.999\ldots \text{ και } 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} < 1,$$

για οποιοδήποτε πλήθος (ν) από «9».

Παρατηρήστε τώρα ότι οι αριθμοί $a_\nu = 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu}$ «πλησιάζουν» τον αριθμό 1 υπό την εξής έννοια:

όσο τοποθετούμε κι άλλα «9» στο τέλος, τόσο μικρότερη είναι η διαφορά

$$1 - a_\nu = 1 - 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} = 0.\underbrace{00\ldots1}_{\nu} = 10^{-\nu}.$$

Μάλιστα, για να είμαστε λίγο πιο ακριβείς, αν επιθυμούμε η διαφορά $1 - a_\nu$ να είναι μικρότερη από, λ.χ. 10^{-7}, δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε τη διαφορά $1 - a_8 = 10^{-8}$ ή, γενικά, τη διαφορά $1 - a_\nu$ για κάποιο ν μετά το 7.

[2] Αυτήν την ιδιότητα των πραγματικών αριθμών την ονομάζουμε *τριχοτομία*.
[3] Αλήθεια, γιατί δεν ασχολούμαστε καθόλου με την περίπτωση $0.999\ldots > 1$;
[4] Δηλαδή, για να καταλάβουμε καλύτερα τον αριθμό 1, που μας φαίνεται τόσο απλός!

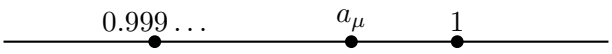
Σε ένα πιο διαισθητικό επίπεδο, αυτό σημαίνει ότι όσο προχωράμε «χτίζοντας» τους αριθμούς a_ν, πλησιάζουμε όλο και περισσότερο στο 1, και, μάλιστα, οσοδήποτε θέλουμε. Ας θυμηθούμε τώρα ότι ο αριθμός $0.999\ldots$ είναι μεγαλύτερος από όλους τους αριθμούς a_ν, επομένως, πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στο 1. Πόσο κοντά, όμως;

Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι ίσος με 1, τότε θα είναι μικρότερος και άρα θα μπορέσουμε να βρούμε έναν αριθμό από τους a_ν, ας τον ονομάσουμε a_μ πιο κοντά από ότι ο $0.999\ldots$ βρίσκεται στον[5] 1. Τότε έχουμε μία κατάσταση όπως αυτή που περιγράφεται στο σχήμα 1. Όμως, εδώ είναι εμφανές ότι πρέπει να ισχύει:

$$0.999\ldots < a_\mu = 0.\underbrace{99\ldots9}_{\mu},$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $a_\mu < 0.999\ldots$. Άρα, δεδομένου ότι $0.999\ldots \leq 1$, πρέπει να ισχύει:

$$0.999\ldots = 1.$$



Σχήμα 1: Η θέση του a_μ

Ας δούμε τώρα ξανά την πορεία της σκέψης μας: για να δείξουμε ότι ο αριθμός $0.999\ldots$ δεν είναι μικρότερος του 1, πήραμε κάποιους άλλους αριθμούς, τους a_ν, άπειρους στο πλήθος, οι οποίοι είχαν την ιδιότητα ότι βρίσκονταν οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε στο 1, από ένα σημείο και μετά. Επίσης, αυτοί οι αριθμοί ήταν όλοι την ιδιότητα ότι ήταν μικρότεροι και από το $0.999\ldots$, οπότε, καθώς αυτοί οι αριθμοί «πλησίαζαν» προς το 1, «παρέσυραν» μαζί τους και το $0.999\ldots$ και, έτσι, αποδείχθηκε το ζητούμενο[6].

1.2 Κινούνται οι αριθμοί;

Λίγες γραμμές παραπάνω αναφέραμε ότι οι αριθμοί a_ν «πλησιάζουν» τον αριθμό 1. Μα, οι αριθμοί είναι σταθερά τοποθετημένοι πάνω στην ευθεία των αριθμών, άρα, έχουν μία συγκεκριμένη, επίσης σταθερή, απόσταση, από τον αριθμό 1. Επομένως, δε γίνεται ένας αριθμός να πλησιάσει έναν άλλο, όπως δε γίνεται να σταθείτε απέναντι από έναν τοίχο και να περιμένετε να έρθει καταπάνω σας, ενώ κι εσείς είστε ακίνητοι. Τότε, τι νόημα έχει αυτό το «πλησιάζουν»;

Αν είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί, θα παρατηρήσουμε ότι δεν αναφέρουμε πουθενά ότι ένας από αυτούς τους αριθμούς πλησιάζει το 1 αλλά ότι «οι αριθμοί αυτοί πλησιάζουν το 1». Δηλαδή, όλοι μαζί, κατά κάποιον τρόπο. Σε πιο αυστηρή, μαθηματική γλώσσα, θα λέγαμε ότι:

> μία μεταβλητή x που παίρνει διαδοχικά τις τιμές $a_1, a_2, \ldots$ «πλησιάζει» τον αριθμό 1.

Επομένως, δεν μπορεί ένας αριθμός να πλησιάζει έναν άλλο αριθμό, αλλά μία *μεταβλητή*, να πλησιάζει έναν αριθμό. Για να το φέρουμε λίγο στα μέτρα μας, ας σκεφτούμε ότι στεκόμαστε στην όχθη μιας λίμνης και θέλουμε να φτάσουμε σε ένα νησάκι, στη μέση της λίμνης. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι δε θέλουμε να βραχούμε καθόλου και ότι, για καλή μας τύχη, υπάρχει ένα «μονοπάτι», από διάσπαρτα βραχάκια[7] μέσα στη λίμνη, το οποίο, τελικά, οδηγεί στο νησάκι. Τα βραχάκια και το νησάκι, σε αντίθεση με εμάς, έχουν σταθερές θέσεις μέσα στη λίμνη. Εμείς,

[5] Αφού μπορούμε να βρούμε a_ν όσο κοντά θέλουμε στο 1.

[6] Αυτές τις δύο λέξεις που βρίσκονται σε εισαγωγικά — «πλησίαζαν» και «παρέσυραν» θα τις διατυπώσουμε σε αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο στην πορεία του κεφαλαίου.

[7] Όσοι έχετε αρκετή φαντασία, υποθέστε ότι τα βραχάκια είναι άπειρα στο πλήθος.

λοιπόν, είμαστε αυτοί που πλησιάζουν το νησάκι, περνώντας από τα διάφορα βραχάκια στον δρόμο μας και όχι τα βραχάκια τα ίδια.

Να παρατηρήσουμε, επίσης, ότι, η έννοια του «πλησιάζειν» σημαίνει ότι δε φτάνουμε ακριβώς πάνω στο στόχο μας, αλλά πάμε όλο και πιο κοντά, οσοδήποτε θέλουμε[8]. Έτσι λοιπόν, προκύπτει ο ακόλουθος

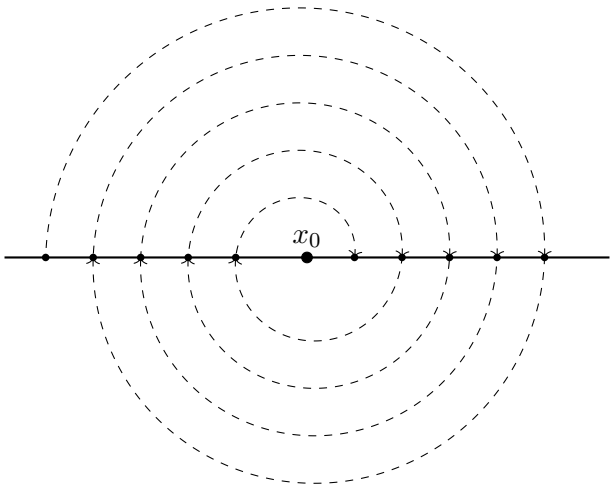
Ορισμός 1

Μία μεταβλητή x θα λέμε ότι *τείνει* σε έναν συγκεκριμένο αριθμό x_0, αν:

- παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά[9] θέλουμε στον αριθμό x_0 από ένα σημείο και μετά[10] και
- δεν παίρνει ποτέ την τιμή x_0.

Τότε, συμβολικά, γράφουμε $x \to x_0$.

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι δε χρειάζεται, όπως στο παράδειγμά μας με τους αριθμούς a_ν, οι τιμές της μεταβλητής x να είναι τόσο «τακτοποιημένες» καθώς πλησιάζουν στον αριθμό x_0. Αν μία μεταβλητή παίρνει τιμές όπως φαίνεται στο σχήμα 2 τότε και πάλι μπορούμε να πούμε ότι $x \to x_0$.



Σχήμα 2: Λιγότερο «τακτοποιημένες» τιμές

1.3 Σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου

1.3.1 Σημεία συσσώρευσης που είναι πραγματικοί αριθμοί

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο σύνολο $A = (0,1) \cup (1,4]$. Θα μπορούσε τότε, για κάποια επιλογή τιμών για τη μεταβλητή x, να ισχύει

$$x \to 5;$$

Ας σκεφτούμε ξανά τι σημαίνει ο συμβολισμός $x \to 5$. Πρέπει η x:

1. να παίρνει τιμές οσοσδήποτε κοντά στο 5 από ένα σημείο και μετά και

[8] Αν φτάναμε στον στόχο μας, δε θα πλησιάζαμε, θα είχαμε φτάσει.

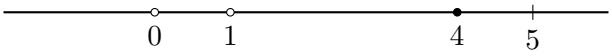
[9] Η έννοια του «οσοδήποτε κοντά» στα μαθηματικά είναι σαφώς ορισμένη μέσα από την έννοια της απόστασης, δηλαδή μέσα από την απόλυτη τιμή.

[10] Δηλαδή, δεν μπορεί να παίρνει διαρκώς τιμές «άσχετες» από το x_0· πρέπει να υπάρχει μία τιμή από την οποία και μετά, ό,τι τιμή και να δώσουμε θα είναι κοντά στο x_0.

2. να μην παίρνει την τιμή 5.

Όσο για το δεύτερο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \in A$, τότε προφανώς $x \leq 4$, άρα η x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 5. Σε ότι αφορά την πρώτη απαίτηση, δεν μπορούμε να πλησιάσουμε το 5 οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε καθώς, όπως και προηγουμένως, $x \leq 4$, άρα δεν μπορούμε να δώσουμε τιμές στην x που να είναι πιο κοντά στο 5 από ότι το 4, άρα η απόσταση $|5 - x|$ του 5 από την x είναι μονίμως μεγαλύτερη ή ίση του 1. Έτσι, δεν μπορούμε, για καμμία επιλογή τιμών της x, να έχουμε $x \to 5$.

Μπορούμε μήπως να έχουμε $x \to 1$; Εδώ τα πράγματα είναι διαφορετικά. Αν και, πάλι, το 1 δεν ανήκει στο A, μπορούμε να πούμε ότι βρίσκεται «πολύ κοντά» στα στοιχεία του A, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3. Για παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x τις τιμές:



Σχήμα 3: Το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του A

$$(1.1, 1.01, 1.001, \ldots)$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτές πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς ποτέ να παίρνουν την τιμή 1. Μπορούμε επίσης να δώσουμε στην μεταβλητή x και τις ακόλουθες τιμές:

$$(0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$$

οπότε και πάλι πλησιάζουμε αυθαίρετα κοντά στο 1 δίνοντας στην x τιμές από το A.

Ανάλογα, μπορούμε να πλησιάσουμε και το 0, δίνονται για παράδειγμα τις τιμές:

$$(0.1, 0.01, 0.001, \ldots)$$

που ανήκουν στο A. Δεν μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε κανέναν άλλο αριθμό μικρότερο του 0 με τιμές μέσα από το A.

Ποιους άλλους αριθμούς μπορούμε να «πλησιάσουμε» δίνοντας σε μία μεταβλητή x τιμές μέσα από το A; Προφανώς, κάθε αριθμό[11] $x_0 \in A$. Έτσι, βλέπουμε ότι μπορούμε, να προσεγγίσουμε με τιμές από το A όλους τους αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο

$$A' = [0, 4].$$

Αυτό το σύνολο το ονομάζουμε σύνολο των *σημείων συσσώρευσης* του A κι έτσι προκύπτει ο ακόλουθος

Ορισμός 2
Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε ορίζουμε σαν σημείο συσσώρευσης του A κάθε αριθμό x τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε με μάι μεταβλητή που παίρνει τιμές μόνο από το A.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, όταν μιλάμε για προσέγγιση μίας μεταβλητής x σε έναν πραγματικό αριθμό x_0, εννοούμε ότι μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x τιμές οσοδήποτε κοντά στο x_0, χωρίς να δώσουμε ποτέ την τιμή x_0 και όλο αυτό το συμβολίζουμε με:

$$x \to x_0.$$

[11] Μπορείτε να βρείτε τιμές που μπορούμε να δώσουμε σε μια μεταβλητή x για να το πετύχουμε αυτό;

1.3.2 Σημεία συσσώρευσης που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί

Θα εξετάσουμε εδώ σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Ώπα! Και τι θα είναι άμα δεν είναι πραγματικοί αριθμοί; Δηλαδή, τι άλλο υπάρχει πια στα φετινά μαθηματικα!

Λοιπόν, ας πάρουμε το εξής σύνολο:

$$A = (6, +\infty)$$

το οποίο, με βάση τα όσα έχουμε πει ως τώρα έχει σημεία συσσώρευσης όλους τους αριθμούς του συνόλου:

$$A' = [6, +\infty).$$

Εδώ όμως, έχουμε μία ακόμα ιδιομορφία. Ας πάρουμε μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές σε αυτό το διάστημα και ας της δώσουμε τις ακόλουθες τιμές:

$$(7, 8, 9, \ldots).$$

Τότε, προφανώς, σταδιακά, αυτή η μεταβλητή «ξεπερνά»[12] κάθε πραγματικό αριθμό, άρα, προφανώς, δεν πλησιάζει με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω, κάποιον πραγματικό αριθμό. Σε αυτήν την περίπτωση, λοιπόν, δίνουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 3
Αν x είναι μία μεταβλητή με τιμές σε ένα σύνολο A που περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ (για κάποιο $a \in \mathbb{R}$) τότε θα λέμε ότι η x *τείνει* στο $+\infty$ (συν άπειρο) αν για κάθε αριθμό $M \in \mathbb{R}$ η x παίρνει τελικά τιμές μεγαλύτερες από M. Συμβολικά, γράφουμε $x \to +\infty$.

Αντίστοιχα, ορίζουμε και το σύμβολο $x \to -\infty$, αλλά, επειδή, ως μαθηματικοί, βαριόμαστε απίστευτα, δίνουμε αυτόν τον ορισμό:

Ορισμός 4
Θα λέμε ότι μία μεταβλητή x με τιμές σε ένα σύνολο A που περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ (για κάποιο $a \in \mathbb{R}$) τείνει στο $-\infty$ αν:

$$-x \to +\infty.$$

2 Η έννοια του ορίου συνάρτησης

2.1 x και $f(x)$ — μια σχέση... εξάρτησης

Είδαμε, ως τώρα, πώς μπορεί μία μεταβλητή να προσεγγίζει έναν αριθμό. Αυτή η μεταβλητή είναι αυτό που λέμε *ελεύθερη μεταβλητή*, δηλαδή παίρνει τιμές που εμείς επιλέγουμε να πάρει, χωρίς να καθορίζονται από κάτι άλλο[13]. Ασχοληθήκαμε όμως στο πρώτο κεφάλαιο με συναρτήσεις και αναφερθήκαμε και σε ένα άλλο είδος μεταβλητών· των εξαρτημένων μεταβλητών. Για να θυμηθούμε λίγο καλύτερα, ας πάρουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu\, x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Εδώ έχουμε δύο ειδών μεταβλητές:

1. την ανεξάρτητη μεταβλητή x, που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ όπως εμείς θέλουμε και

[12] Πιο αυστηρά, γίνεται μεγαλύτερη.
[13] Όπως άνθρωπο, ανώτερη δύναμη ή άλλη μεταβλητή· στα μαθηματικά μας απασχολεί κυρίως το τελευταίο.

2. την εξαρτημένη μεταβλητή $f(x)$, η οποία παίρνει τιμές *δεσμευόμενη* πάντα από την τιμή της[14] x.

Εδώ λοιπόν, τίθεται το εξής ερώτημα:

> Τώρα που δεν επιλέγουμε εμείς τις τιμές της $f(x)$ άμεσα, αλλά αυτές καθορίζονται και από «εξωτερικούς» παράγοντες, μπορούμε να έχουμε μία έννοια προσέγγισης της $f(x)$ σε κάποιον αριθμό ή σε κάποιο «άπειρο» ($\pm\infty$) καθώς εμείς επιλέγουμε τιμές για την μεταβλητή x;
>
> Με άλλα λόγια, *πώς συμπεριφέρεται η* $f(x)$ *καθώς η μεταβλητή* x *τείνει κάπου;*

Αυτό γενικά είναι ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που απασχολούσε και απασχολεί τις σύγχρονες επιστήμες εντόνως. Σκεφτείτε το ακόλουθο παράδειγμα: Σε κάποιο σημείο στον Κόλπο του Μεξικού, μία γεώτρηση πετρελαίου καταβυθίζεται λόγω μιας φυσικής καταστροφής με αποτέλεσμα το πετρέλαιο που θα παρήγαγε η πηγή να καταλήγει στην επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μία κυκλική πετρελαιοκηλίδα με κέντρο το σημείο στο οποίο βρισκόταν η γεώτρηση. Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε πόσο θα μας κοστίσει ο καθαρισμός της περιοχής, πρέπει να έχουμε μία εικόνα του πετρελαίου που βρίσκεται στη θάλασσα και, γι' αυτόν τον σκοπό έχει μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εξαπλώνεται το πετρέλαιο επί της επιφάνειας της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα, σε απόσταση r μέτρων από την πηγή, το πάχος π της κηλίδας μετρημένο σε μέτρα δίνεται από τη σχέση:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r^2+3r}{r^3+r^2+4r},\ r>0.$$

Για να έχουμε όμως και μία εικόνα της εξέλιξης του φαινομένου, θα ήταν χρήσιμο να ξέρουμε και το πάχος της κηλίδας στη θέση $r=0$, όπου η δοσμένη σχέση δεν ισχύει. Μήπως υπάρχει κάποιος τρόπος να κάνουμε, έστω, μία εκτίμηση[15] του πάχους της κηλίδας εκεί;

Ας ξαναδούμε τώρα εκείνη την ερώτηση που θέσαμε παραπάνω. Αν μπορούσαμε να ξέρουμε πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση $\pi(r)$ καθώς το $r\to 0$, τότε θα μπορούσαμε να έχουμε μία εικόνα, ακόμα κι αν δεν είναι εντελώς σωστή, για το πόσο περίπου είναι το πάχος της κηλίδας σε εκείνο το σημείο[16]. Για να το πετύχουμε αυτό μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

- Ξαναγράφουμε τον τύπο του πάχους π με μία μικρή απλοποίηση:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r(r+3)}{r(r^2+r+4)} = \frac{1}{2}\frac{r+3}{r^2+r+4}.$$

- Επιλέγουμε τώρα κάποιες θετικές τιμές για την μεταβλητή[17] r έτσι ώστε αυτή, παίρνοντας διαδοχικά αυτές τις τιμές, να προσεγγίζει το[18] 0. Διαισθητικά, είναι εύκολο να δούμε ότι αν $r\to 0$, τότε $r+3\to 0+3=3$ καθώς το r μικραίνει όλο και περισσότερο, με αποτέλεσμα να είναι «τελικά αμελητέο» σε σχέση με το 3 και να μην «επηρεάζει» το $r+3$. Επίσης, με την ίδια αιτιολόγηση, μπορούμε να πούμε ότι $r+4\to 0+4=4$ καθώς το $r\to 0$. Τέλος, δεδομένου ότι $r^2 = r\cdot r$, έχουμε, με παρόμοιο τρόπο, ότι $r^2\to 0$ καθώς $r\to 0$. Άρα, τελικά:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r+3}{r^2+r+4} \xrightarrow{r\to 0} \frac{1}{2}\frac{0+3}{0+0+4} = \frac{3}{8},$$

[14] Επί της ουσίας, η δέσμευση αυτή προκύπτει από το πώς είναι ορισμένη η f — με άλλα λόγια και σε ό,τι αφορά την ύλη μας, από τον τύπο της.

[15] Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο υπό ποιες προϋποθέσεις, αυτές οι εκτιμήσεις είναι ορθές.

[16] Και γιατί δεν πάμε να το μετρήσουμε, βρε αδερφέ; Λόγω του έντονου στροβιλισμού του πετρελαίου σε εκείνη τη θέση, δεν είναι εύκολο να γίνει αυτό — στροβιλισμός ενός υγρού είναι, σε γενικές γραμμές, αυτό που κάνει το νερό της τουαλέτας όταν πατάμε το καζανάκι.

[17] Πάντα άπειρες, στο πλήθος

[18] Π.χ. $(2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \ldots)$, αλλά όποιες και να πάρουμε, στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε.

δηλαδή, το πάχος της κηλίδας στην πηγή είναι περίπου 0.375 μέτρα ή, για την ακρίβεια, *τόσο εκτιμάμε εμείς ότι θα έπρεπε να είναι με βάση την κατάσταση στη γύρω περιοχή και χωρίς να έχουμε καμμία πληροφορία για την πηγή ή πρόσβαση σε αυτήν.* $(r = 0)$.

Από όλη την παραπάνω διαδικασία, καλό είναι να κρατήσουμε κάποια πράγματα:

- Η παραπάνω διαδικασία έγινε *χωρίς να λάβουμε συγκεκριμένες τιμές για τη μεταβλητή* r έτσι ώστε να πλησιάσουμε το 0. Έτσι εξασφαλίσαμε ότι αυτό που κάναμε δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε στο 0 αλλά από το ότι πλησιάζουμε στο 0. Με άλλα λόγια, με όποιον τρόπο και να δίναμε τιμές στην r, αν αυτές πλησίαζαν το 0, το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε για το $\pi(r)$.
- Δε χρειαστήκαμε — και δεν είχαμε — καμμία πληροφορία για τη συμπεριφορά του πετρελαίου στη θέση της πηγής $(r = 0)$. Αντιθέτως, κάναμε μία **εκτίμηση** με βάση το τι βλέπαμε να συμβαίνει **γύρω** από την πηγή και **όχι στην** πηγή.
- Το τελικό αποτέλεσμα το καθορίσαμε μόνο εν μέρει εμείς, με την επιλογή μας να αφήσουμε το r να τείνει στο 0. Σημαντικό ρόλο έπαιξε και ο τρόπος που ήταν κατασκευασμένη η $\pi(r)$, η οποία, όπως είπαμε, είναι η *εξαρτημένη μεταβλητή*, δηλαδή αυτή που «ακολουθεί» τις μεταβολές της r.
- Το σημείο στο οποίο ψάχναμε να βρούμε το πάχος της κηλίδας ήταν ένα σημείο για το οποίο ξέραμε τι γινόταν «εκεί γύρω». Σε μαθηματική γλώσσα, η συνάρτηση $\pi(r)$ ήταν ορισμένη για $r > 0$, δηλαδή στο $A = (0, +\infty)$ και εμείς ψάχναμε τι συμβαίνει στο $r = 0$ δηλαδή σε ένα *σημείο συσσώρευσης* του A και όχι κάπου μακριά από το A.

Έτσι, ακολουθώντας την πραπάνω διαδικασία, βρήκαμε ότι, καθώς $r \to 0$ έχουμε ότι $\pi(r) \to \frac{3}{8}$ ή, σε άλλο συμβολισμό:

$$\pi(r) \xrightarrow{r \to 0} \frac{3}{8}.$$

2.2 Όρια συναρτήσεων

2.2.1 Πεπερασμένα όρια

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλη την παραπάνω διαδικασία και τις μετέπειτα παρατηρήσεις, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό μαζί με έναν ακόμη, πιο εύχρηστο όπως θα φανεί στην πορεία, συμβολισμό[19]:

Ορισμός 5
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Αν για μία μεταβλητή x με τιμές στο A ισχύει ότι για οποιαδήποτε επιλογή τιμών για την x έτσι ώστε $x \to x_0$ έχουμε $f(x) \to l$ για κάποιον σταθερό αριθμό l, τότε λέμε ότι το *όριο* της f καθώς το x τείνει στο x_0 *υπάρχει* και είναι ίσο[20] με l και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Με άλλα λόγια, ο ορισμός μας λέει ότι για να ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

πρέπει, με όποιον τρόπο και αν επιλέξουμε εμείς να «πλησιάσουμε» το x_0 με την x, η $f(x)$ να πλησιάζει **πάντα** τον ίδιο αριθμό l.

[19] Όχι, δε μας έφταναν οι άλλοι δύο!
[20] Και πού ξέρουμε ότι το όριο μίας συνάρτησης, αν υπάρχει, είναι μοναδικό;

Παρατήρηση 1
Στον ορισμό αναφέρουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αυτό σημαίνει ότι το x_0 μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός αλλά μπορεί να είναι και κάποιο από τα $\pm\infty$, δηλαδή $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Έτσι, έχει νόημα το παρακάτω:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x},$$

το οποίο μπορείτε, για εξάσκηση, να βρείτε πόσο κάνει χωρίς να διαβάσετε τίποτα από τα επόμενα.

2.2.2 Άπειρα όρια

Όπως μία ανεξάρτητη μεταβλητή x μπορεί να τείνει σε κάποιο από τα $\pm\infty$, έτσι μπορεί να συμβαίνει και με μία εξαρτημένη μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και μία μεταβλητή x με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \to +\infty$, με κάποιον τρόπο, τότε και το x^2, από ένα σημείο και μετά, είναι μεγαλύτερο από κάθε πραγματικό αριθμό, άρα $x^2 \to +\infty$, δηλαδή $f(x) \to +\infty$. Ο αντίστοιχος ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 6
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Αν για μία μεταβλητή x με τιμές στο A ισχύει ότι για οποιαδήποτε επιλογή τιμών για την x έτσι ώστε $x \to x_0$ έχουμε $f(x) \to +\infty$, τότε λέμε ότι το *όριο* της f καθώς το x τείνει στο x_0 *υπάρχει* και είναι $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Ανάλογα, έχουμε και τον ορισμό για το έτερο άπειρο, τον οποίο όμως, και πάλι επειδή βαριόμαστε, θα τον δώσουμε ως εξής:

Ορισμός 7
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

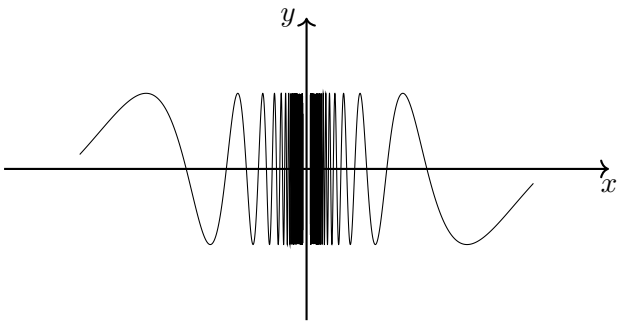
2.3 Υπάρχουν πάντα όρια;

Όταν μιλάμε για τη ζωή, ναι, υπάρχουν πάντα τα όρια. Στα μαθηματικά, από την άλλη, τα πράγματα δεν είναι και τόσο σαφή. Όπως είδαμε και πριν, για να υπάρχει το όριο μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 πρέπει η $f(x)$ να τείνει στον ίδιο αριθμό ανεξάρτητα με τον τρόπο που η x τείνει στο x_0. Ε, πολλά ζητάμε. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την ακόλουθη συνάρτηση[21]:

$$f(x) = \text{ημ}\,\frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

και, για να κάνουμε τη ζωή μας λίγο πιο εύκολη, στο σχήμα 4 φαίνεται η γραφική της παράσταση[22]. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι καθώς πλησιάζουμε στο 0, η γραφική της παράσταση κάνει άπειρα στο πλήθος «ανεβοκατεβάσματα» ανάμεσα στο -1 και το 1, γι' αυτό και αποφεύγουμε να τη σχεδιάζουμε πολύ κοντά στο 0 — όπως βλέπετε, θα έβγαινε απλά ένα μαύρο ορθογώνιο.

[21] Να τη θυμάστε, θα τη χρησιμοποιούμε πολύ συχνά από εδώ κι εμπρός!
[22] Αν και δεν είναι σε αυτές που μάθαμε στο κεφάλαιο 1.



Σχήμα 4: Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\,\frac{1}{x}$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Ας πάρουμε μία μεταβλητή $x \to 0$ και ας της δώσουμε τις ακόλουθες τιμές:

$$\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots\right).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η $f(x)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$\begin{aligned}&\left(\text{ημ}\,\frac{1}{1/\pi}, \text{ημ}\,\frac{1}{1/(2\pi)}, \text{ημ}\,\frac{1}{1/(3\pi)}, \dots\right) = \\ &= (\text{ημ}\,\pi, \text{ημ}\,2\pi, \text{ημ}\,3\pi, \dots) = \\ &= (0, 0, 0, \dots),\end{aligned}$$

οπότε, $f(x) \to 0$. Άρα, υποπτευόμαστε ότι, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ τότε αυτό πρέπει να είναι ίσο με 0.

Ας δώσουμε τώρα στη μεταβλητή x τις ακόλουθες τιμές:

$$\left(\frac{1}{\pi/2}, \frac{1}{\pi + \pi/2}, \frac{1}{2\pi + \pi/2}, \dots\right)$$

οπότε η $f(x)$ παίρνει τις τιμές:

$$\begin{aligned}&\left(\text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{\pi/2}}, \text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{2\pi+\pi/2}}, \text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{4\pi+\pi/2}}, \dots\right) = \\ &= \left(\text{ημ}\,\frac{\pi}{2}, \text{ημ}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ημ}\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right), \dots\right) = \\ &= (1, 1, 1 \dots),\end{aligned}$$

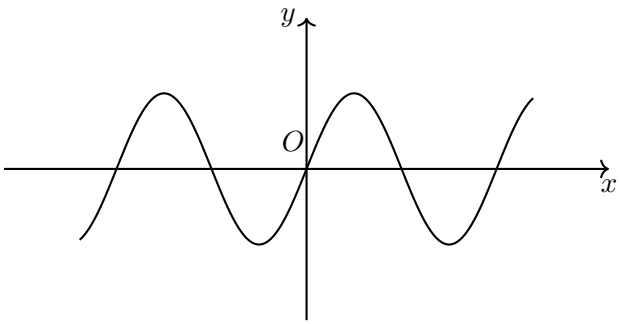
οπότε, $f(x) \to 1$. Άρα, δεν υπάρχει το όριο της f καθώς το $x \to 0$, αφού στη μία περίπτωση δώσαμε κάποιες τιμές στην x έτσι ώστε $x \to 0$ και πήραμε ότι $f(x) \to 0$ και στην άλλη δώσαμε *κάποιες άλλες* τιμές στην x έτσι ώστε $x \to 0$ και πήραμε $f(x) \to 1$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζουμε το 0 με την x επηρεάζει το πού πάει το $f(x)$.

Άρα, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει!

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\,x$ η οποία έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 5.

Αυτή η γραφική παράσταση είναι αρκετά πιο ομαλή, ειδικά σε σχέση με την $f(x) = \text{ημ}\,\frac{1}{x}$, αλλά ίσως να μας κρύβει κι αυτή κάποιες εκπλήξεις. Ας υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$



Σχήμα 5: Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\, x$

Γι' αυτόν τον σκοπό, θεωρούμε μια μεταβλητή x που παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$(\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots)$$

η οποία, σαφώς τείνει στο $+\infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, η $f(x)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$(\text{ημ}\, \pi, \text{ημ}\, 2\pi, \text{ημ}\, 3\pi, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$$

οπότε, $f(x) \to 0$.

Ας δώσουμε τώρα στη μεταβλητή x τις τιμές:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots\right)$$

οπότε η $f(x)$ παίρνει τις τιμές:

$$\left(\text{ημ}\, \frac{\pi}{2}, \text{ημ}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ημ}\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right), \ldots\right) = (1, 1, 1, \ldots)$$

οπότε $f(x) \to 1$, άρα, όπως και πριν, το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ δεν υπάρχει.

Αυτό θα μπορούσαμε να το είχαμε συμπεράνει και πάλι από την γραφική παράσταση της f παρατηρώντας ότι καθώς προχωράμε απεριόριστα προς τα δεξιά — δηλαδή καθώς $x \to +\infty$ — η $f(x)$ δεν πλησιάζει προς έναν αριθμό αλλά κινείται περιοδικά ανάμεσα στο -1 και το 1.

2.4 Βασικές ιδιότητες των ορίων

2.4.1 Άλγεβρα των (πεπερασμένων) ορίων

Η έννοια του ορίου, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, έχει να κάνει άμεσα με τους αριθμούς, επομένως, είναι αναμενόμενο να «κληρονομεί» και αρκετές από τις ιδιότητες των αριθμών και, ειδικότερα, όσες έχουν να κάνουν με τις πράξεις μεταξύ αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε στον πίνακα 1 τις βασικές πράξεις μεταξύ ορίων που έχουν νόημα, χωρίς να τις αποδείξουμε. Να παρατηρήσουμε ότι όσα αναγράφονται στον πίνακα 1 ισχύουν *με την προϋπόθεση ότι τα όρια* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί*[23] — *πάντα ισχύει ότι* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις για αυτές τις ιδιότητες.

[23] Με τα άπειρα όρια θα ασχοληθούμε σε λίγο.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \text{ αν } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

Πίνακας 1: Άλγεβρα των ορίων

Παρατήρηση 2
Όλες οι παραπάνω ιδιότητες μας δίνουν όχι μόνο έναν τρόπο για να υπολογίζουμε όρια αθροίσματος, γινομένου κ.λπ., αλλά μας δίνουν και την *ύπαρξη* των εν λόγω ορίων. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι τα όρια:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{x+5} \text{ και } \lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+2x+9}$$

υπάρχουν, τότε γνωρίζουμε ότι και το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{x+5}+\sqrt{x^2+2x+9}\right)$$

υπάρχει.
Παρατήρηση 3
Όλοι οι παραπάνω κανόνες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x τείνει πάντα στον ίδιο σταθερό αριθμό x_0. Δηλαδή, δεν έχει νόημα να πούμε ότι, αφού υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to -1}(x^2+2) \text{ και } \lim_{x\to\pi} x$$

τότε υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to -1}(x^2+2+x)$$

ή, γενικότερα, για $x\to$οπουδήποτε.
Παρατήρηση 4
Από την ιδιότητα

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x),$$

για $g=f$, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^2,$$

ενώ για $g=f^2$, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f^3(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^3,$$

και, συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, έχουμε — πάντα υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ — ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f^\nu(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^\nu.$$

2.4.2 Άλγεβρα των άπειρων ορίων

Σε όσα είπαμε παραπάνω, είχαμε πάρει ως προϋπόθεση ότι τα όρια υπάρχουν και επιπρόσθετα, ότι *είναι πραγματικοί αριθμοί*. Τι διαφορά θα είχαμε αν, αντιθέτως, τα όρια ήταν άπειρα; Για παράδειγμα, ας πάρουμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x \text{ και } g(x) = x^2,$$

για τις οποίες είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι:

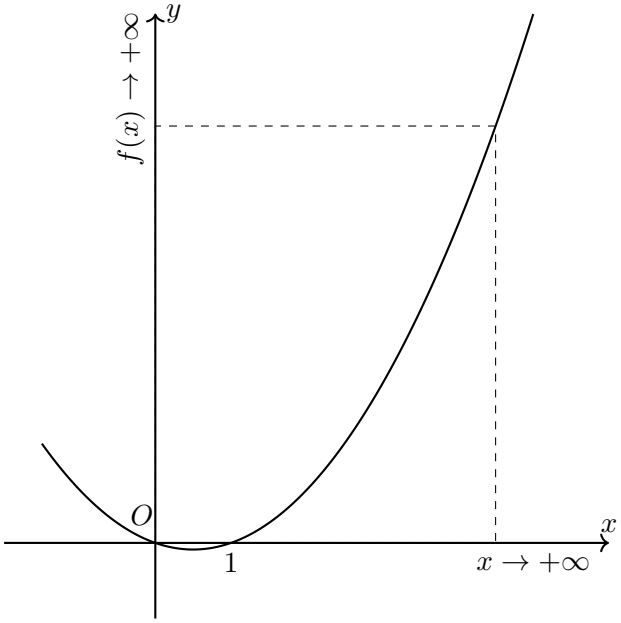
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τώρα το όριο της συνάρτησης $g - f$. Αν πάμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες που ισχύουν για τα πεπερασμένα όρια, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - f(x)) = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty - (+\infty)$$

και τώρα κολλήσαμε. Άμα αφαιρέσουμε $+\infty$ από $+\infty$ τι θα πάρουμε; Μηδέν; Ένα; Άπειρο; Μήπως δεν υπάρχει το όριο;

Για να διαφωτιστούμε λίγο, ας παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) - f(x) = x^2 - x$ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) - f(x) = x^2 - x$.

Από εδώ είναι, εν γένει, εμφανές ότι καθώς $x \to +\infty$ έχουμε και $g(x) - f(x) \to +\infty$, άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - f(x)) = +\infty$$

οπότε μπορούμε να πούμε ότι $+\infty - (+\infty) = +\infty$. Ή μήπως όχι; Ας πάρουμε τώρα τη διαφορά $f - g$, δηλαδή τη συνάρτηση $f(x) - g(x) = x - x^2$. Ακολουθώντας και πάλι τους κανόνες για τα πεπερασμένα όρια, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - (+\infty)$$

$+$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	???
$-\infty$	???	$-\infty$

(α′) Αθροίσματα απείρων

$\times$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

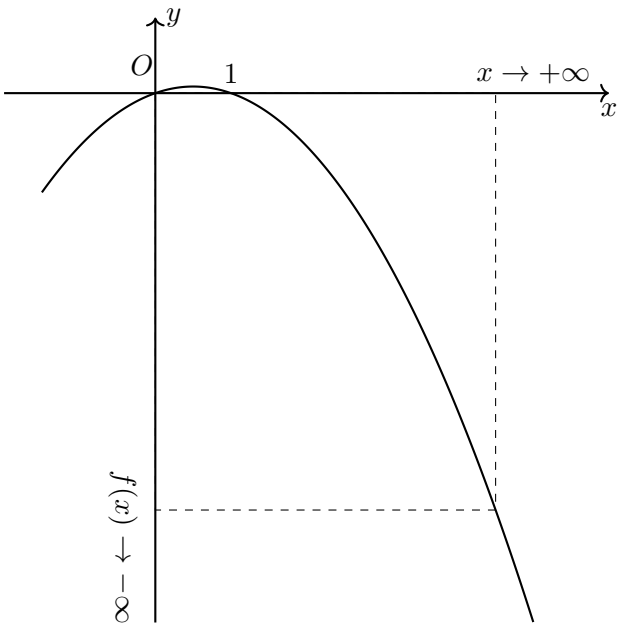
(β′) Γινόμενα απείρων

Πίνακας 2: Πράξεις με τα άπειρα

και εδώ, χρησιμοποιώντας τον κανόνα που επινοήσαμε πριν από λίγο, θα πάρουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=+\infty.$$

Ας δούμε και τη γραφική παράσταση της $f-g$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7 μάλλον κάτι κάναμε λάθος στους υπολογισμούς μας, καθώς, είναι εμφανές ότι καθώς η $x\to+\infty$, η $f(x)\to-\infty$, πράγμα που είναι και αναμενόμενο αν σκεφτεί κανείς ότι η γραφική παράσταση της $f-g$ είναι η συμμετρική της $g-f$ ως προς τον άξονα[24] $x'x$.



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)-g(x)=x-x^2$.

Επομένως, μάλλον δεν υπάρχει σαφής κανόνας για το τι ακριβώς συμβαίνει όταν έχουμε να κάνουμε με τη διαφορά δύο απείρων. Γενικά, οι μόνες «πράξεις» με τα άπειρα για τις οποίες μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι έχουν νόημα είναι αυτές που φαίνονται στους πίνακες 2.

Επίσης, έχουμε και την περίπτωση όπου το ένα μόνο όριο είναι άπειρο και το άλλο πεπερασμένο, όπως για παράδειγμα τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, σε ό,τι έχει να κάνει με το άθροισμα, τα πράγματα είναι απλά και σχετικά προφανή· υπερισχύει πάντα το άπειρο, όπως φαίνεται και στους πίνακες 3.

Στους ίδιους πίνακες βλέπουμε και το πώς συμπεριφέρονται τα γινόμενα μεταξύ αριθμών και απείρων, που, για καλή μας τύχη, είναι αρκετά αναμενόμενα. Ένα πρόβλημα μόνο παρουσιάζεται

[24] Για όσους δε θυμούνται γιατί, υπάρχει η σχετική αιτιολόγηση στο πρώτο κεφάλαιο.

$+$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$

(α′) Αθροίσματα αριθμών και απείρων

$\times$	$+\infty$	$-\infty$
$a > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$

(β′) Γινόμενα αριθμών και απείρων

Πίνακας 3: Πράξεις με αριθμούς και άπειρα

$+\infty - (+\infty)$	$-\infty - (-\infty)$	$\frac{0}{0}$
$0 \cdot (\pm\infty)$	0^0	$0^{\pm\infty}$
$(\pm\infty)^0$	$(\pm\infty)^{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Πίνακας 4: Όλες οι απροσδιόριστες μορφές που θα μας απασχολήσουν.

στην περίπτωση όπου έχουμε να κάνουμε κάποια πράξη της μορφής $0 \cdot \pm\infty$. Αν έχουμε και πάλι τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2$, τότε, αν πάμε να εφαρμόσουμε τους συνήθεις κανόνες των πεπερασμένων ορίων θα καταλήξουμε σε μία τέτοια μορφή $(0 \cdot (+\infty))$. Αν όμως εξετάσουμε πιο προσεκτικά την $f \cdot g$ θα δούμε ότι:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty.$$

Αν όμως πάρουμε για $g(x) = x$, τότε έχουμε:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \xrightarrow{x \to +\infty} 1.$$

Επομένως, δεν μπορούμε να διατυπώσουμε κανέναν εύκολο και σαφή κανόνα ούτε για τη μορφή $0 \cdot \pm\infty$. Έτσι, στην περίπτωση των άπειρων ορίων, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους κανόνες της άλγεβρας των ορίων μόνο όταν παραμένουμε σε κάποια από τις γνωστές μορφές και όχι σε κάποια άλλη. Αυτές τις μορφές που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο από κάποιον κανόνα — και είναι πολλές — τις ονομάζουμε *απροσδιόριστες μορφές ή απροσδιοριστίες* και θα τις μελετήσουμε ενδελεχώς στην ενότητα που αφορά τις τεχνικές υπολογισμού των ορίων. Για όποιον είναι περίεργος, όλες οι απροσδιοριστίες φαίνονται στον πίνακα 4.

Εδώ να σημειώσουμε ότι, τα ακόλουθα δεν είναι απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{a}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{0^+}, \frac{\pm\infty}{0^-}, \ a \in \mathbb{R},$$

όπως επίσης και τα:

$$\frac{a}{0^+}, \frac{a}{0^-}, \ a \neq 0,$$

όπου με 0^+ εννοούμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και, αντίστοιχα, με 0^- ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0. Για την ακρίβεια, τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων συνοψίζονται στον πίνακα 5.

2.5 Μερικά βασικά αποτελέσματα για τα όρια

Είδαμε τις βασικές ιδιότητες των πράξεων μεταξύ ορίων, οι οποίες, σε μεγάλο βαθμό, πηγάζουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και τον τρόπο με τον οποίο μεταφέρονται αυτές στις συναρτήσεις. Καιρός τώρα να ασχοληθούμε με ιδιότητες των ορίων που έχουν πολύ μεγαλύτερη σχέση με την έννοια του ορίου, δηλαδή την έννοια της προσέγγισης ή, ακόμα καλύτερα, της εκτίμησης.

Μορφή	Αποτέλεσμα
$\frac{a}{+\infty}$	0
$\frac{a}{-\infty}$	0
$\frac{\pm\infty}{0^+}$	$\pm\infty$
$\frac{\pm\infty}{0^-}$	$\mp\infty$

(α′) Πηλίκα με $\pm\infty$

	0^+	0^-
$a>0$	$+\infty$	$-\infty$
$a<0$	$-\infty$	$+\infty$

(β′) Πηλίκα με 0 στον παρονομαστή

Πίνακας 5: Πηλίκα που «μοιάζουν» αλλά δεν είναι απροσδιοριστίες

2.5.1 Τοπική συμπεριφορά των συναρτήσεων

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα με την πετρελαιοκηλίδα, η έννοια του ορίου μάς είναι πολύ χρήσιμη για να εκτιμήσουμε μία κατάσταση γύρω από ένα σημείο για το οποίο δεν έχουμε (και συνήθως δεν μπορούμε να αποκτήσουμε) κάποια πληροφορία. Εδώ λοιπόν θα δούμε κάποια αποτελέσματα που έχουν να κάνουν με αυτό ακριβώς· είτε μας δίνουν κάποια ποιοτική πληροφορία για τη συνάρτηση μέσω της γνώσης κάποιου ορίου είτε μας δίνουν κάποια πληροφορία για ένα όριο δεδομένης κάποιας πληροφορίας για τη συνάρτηση.

Πρόταση 1

Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι θετικό (είτε αριθμός είτε $+\infty$) τότε και η συνάρτηση είναι θετική κοντά στο x_0, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)>0 \Rightarrow f(x)>0 \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0.$$

Δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη της παραπάνω πρότασης αλλά μπορούμε να αιτιολογήσουμε την ισχύ της ως εξής: Αφού το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι θετικό, σημαίνει ότι η (εξαρτημένη) μεταβλητή $f(x)$ τείνει σε κάποιον θετικό αριθμό (ή στο $+\infty$) και, άρα, «από ένα σημείο και μετά» παίρνει μόνο θετικές τιμές. Το κλειδί βρίσκεται στο «από ένα σημείο και μετά». Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι, καθώς το $x\to x_0$, μπαίνει, μοιραία, σε μια περιοχή γύρω από το x_0 στην οποία, όλες οι τιμές της $f(x)$ είναι θετικές.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή στο σχήμα 8 η οποία, από ένα σημείο και μετά, παίρνει μόνο θετικές τιμές, καθώς $5>0$.

Εντελώς ανάλογα, έχουμε και την ακόλουθη[25]

Πρόταση 2

Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι αρνητικό (είτε αριθμός είτε $-\infty$) τότε και η συνάρτηση είναι αρνητική κοντά στο x_0, δηλαδή:

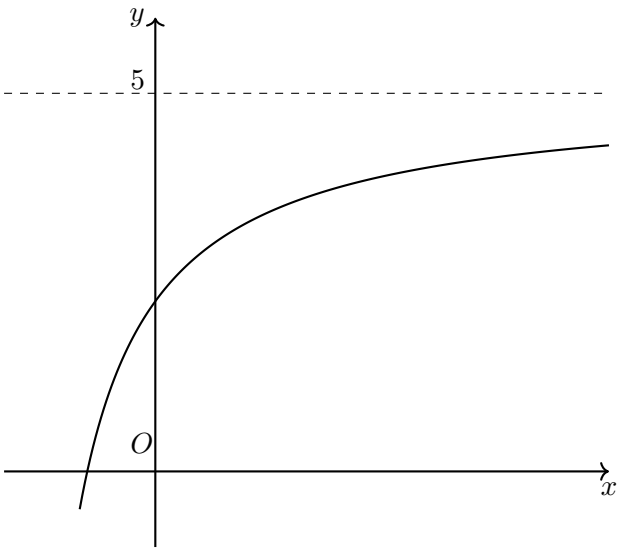
$$\lim_{x\to x_0} f(x)<0 \Rightarrow f(x)<0 \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0.$$

Τέλος, έχουμε και το κατά μία έννοια αντίστροφο των παραπάνω προτάσεων:

[25] Οι δύο αυτές προτάσεις, για όσους έτυχε να προβληματιστούν, μας δίνουν και ένα πιο γενικό συμπέρασμα το οποίο συνοψίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq 0 \Rightarrow f(x)\neq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Αυτό ξεκαθαρίζει και το γιατί στον κανόνα για το όριο πηλίου απαιτούμε απλώς το όριο της g (του παρονομαστή) να είναι μη μηδενικό και δεν απαιτούμε γενικά η g να είναι μη μηδενική.



Σχήμα 8: Η συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

Πρόταση 3
Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) \leq g(x)$ (ή $f(x) < g(x)$) κοντά στο x_0 τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x),$$

εφ' όσον τα όρια υπάρχουν.

2.5.2 Κριτήριο Παρεμβολής

Σελίδες επί σελίδων μπορούν να γραφτούν για το κριτήριο παρεμβολής και τη συμβολή του στη μαθηματική επιστήμη, τόνοι μελάνης έχουν χυθεί για να εξυμνηθεί η σημασία του και... Εντάξει, ίσως υπερβάλλουμε λίγο αλλά όπως και να έχει, είναι ένα σημαντικό κριτήριο που μας βοηθά και στο να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ορίου αλλά και στο να το υπολογίσουμε.
Πρόταση 4 (Κριτήριο Παρεμβολής)
Έστω τρεις συναρτήσεις $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Έστω επίσης ότι ισχύει:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

κοντά στο x_0 και ότι τα όρια των g, h στο x_0 υπάρχουν και:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \lambda.$$

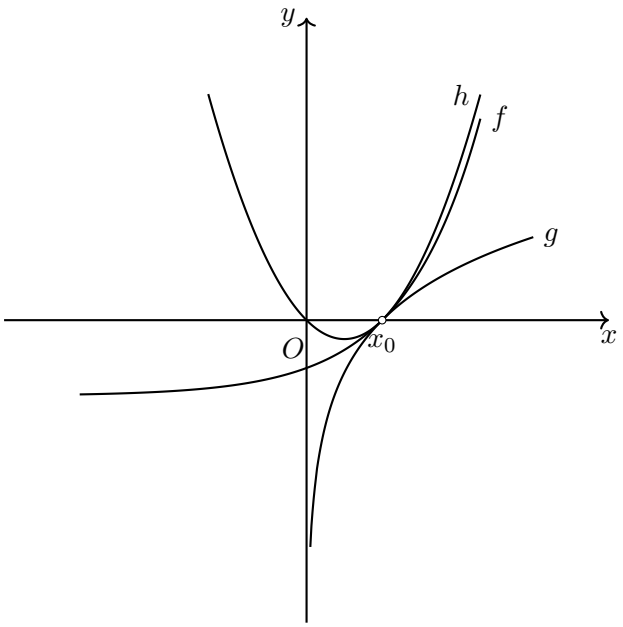
Τότε, το όριο της f στο x_0 υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda.$$

Επειδή μαζεύτηκαν πολλά, ας ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 9.

Η ιδέα του κριτηρίου παρεμβολής, μέσα από ένα σχήμα είναι παραπάνω από προφανής· αν δύο συναρτήσεις «συμπιέζουν» μία άλλη συνάρτηση καθώς πλησιάζουν σε ένα σημείο (συσσώρευσης) τότε δεν μπορεί παρά και η ενδιάμεση συνάρτηση[26] να τείνει προς τον ίδιο αριθμό, (λ).

[26] Το «ζαμπόν» στο σάντουιτς, αν φανταστούμε τις άλλες δύο σαν «ψωμάκια».



Σχήμα 9: Το κριτήριο παρεμβολής — $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

2.6 Πλευρικά όρια

Πολλές φορές, σε πραγματικά προβλήματα, ενδέχεται να έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε μία τιμή μόνο από τιμές μεγαλύτερες ή μόνο από τιμές μικρότερες. Πάρτε για παράδειγμα το πρόβλημα με την πετραιλοκηλίδα που αντιμετωπίσαμε παραπάνω. Εκεί, είχαμε τον λογικό περιορισμό $r > 0$, καθώς η μεταβλητή r αναφέρεται στην απόσταση από την πηγή της πετρελαιοκηλίδας. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, οποιεσδήποτε τιμές και να δώσουμε στη μεταβλητή r έτσι ώστε αυτές να τείνουν στο 0, θα έχουμε επιπρόσθετα τη συνθήκη $r > 0$. Για ευκολία, αυτό το συμβολίζουμε $r \to 0^+$, δηλαδή:

$$r \to 0^+ \Leftrightarrow r \to 0 \text{ και } r > 0.$$

Αντίστοιχα, για μία μεταβλητή r που παίρνει τιμές μόνο μικρότερες του 0 θα είχαμε:

$$r \to 0^- \Leftrightarrow r \to 0 \text{ και } r < 0.$$

Γενικότερα, δίνουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 8 (Πλευρική προσέγγιση)
Αν μία μεταβλητή x τείνει σε έναν αριθμό x_0 και παίρνει τιμές μεγαλύτερες του x_0 $(x > x_0)$ τότε λέμε ότι το x τείνει από δεξιά στο x_0 και γράφουμε:

$$x \to x_0^+.$$

Ανάλογα, ορίζουμε και την προσέγγιση από αριστερά:

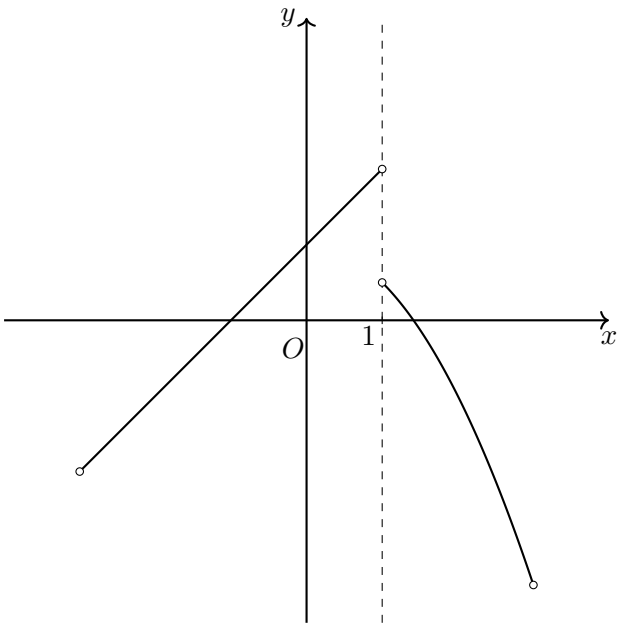
Ορισμός 9 (Πλευρική προσέγγιση)
Αν μία μεταβλητή x τείνει σε έναν αριθμό x_0 και παίρνει τιμές μικρότερες του x_0 $(x < x_0)$ τότε λέμε ότι το x τείνει από αριστερά στο x_0 και γράφουμε:

$$x \to x_0^-.$$

Εδώ είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τη σχέση που έχουν τα πλευρικά όρια μίας συνάρτησης f στον ίδιο αριθμό x_0 με το όριο της f στο x_0. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-3,1) \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 & x \in (1,3) \end{cases}$$

η οποία έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 10.



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλευρικό όριο:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1+x) = 1+1 = 2,$$

και το πλευρικό όριο:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

δεν μπορούμε, όμως, να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

καθώς, αν δώσουμε στη μεταβλητή x τιμές που προσεγγίζουν το 1 από αριστερά, όπως: για παράδειγμα:

$$(0.5, 0.75, 0.875, \ldots)$$

τότε οι τιμές $f(x)$ θα πλησιάζουν το 1 (το αριστερό πλευρικό όριο) ενώ αν δώσουμε τιμές που προσεγγίζουν το 1 από δεξιά, όπως:

$$(1.5, 1.25, 1.125, \ldots)$$

τότε οι τιμές $f(x)$ θα πλησιάζουν το $\frac{1}{2}$ (το δεξί πλευρικό όριο) και, επομένως, το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Αν όμως τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, αυτό το πρόβλημα δεν υπάρχει πια και είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι τότε το όριο υπάρχει. Μάλιστα, ισχύει και η ακόλουθη

Πρόταση 5
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, το όριο της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} = \lambda = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

3 Τεχνικές υπολογισμού ορίων

3.1 Όρια βασικών συναρτήσεων

Μελετήσαμε αρκετά τις ιδιότητες των ορίων. Ώρα να περάσουμε σιγά—σιγά στην πράξη και να μάθουμε πώς να βρίσκουμε όρια με έναν πιο συστηματικό τρόπο. Αρχικά, λοιπόν, θα υπολογίσουμε τα όρια κάποιων βασικών συναρτήσεων.

3.1.1 Όριο σταθερή συνάρτησης

Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$. Έστω επίσης και ένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι για μία μεταβλητή x που τείνει στο x_0, με οποιονδήποτε τρόπο, η $f(x)$ παίρνει συνεχώς την τιμή c. Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c.$$

3.1.2 Όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και έστω ένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν μία μεταβλητή $x \to x_0$ είναι προφανές ότι και η $f(x) = x \to x_0 = f(x_0)$, επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

3.1.3 Όριο γραμμικών συναρτήσεων $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Εφ' όσον τα όρια των x και b υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (ax + b) = \lim_{x \to x_0} (ax) + \lim_{x \to x_0} b = \\ = a \lim_{x \to x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0). \end{aligned}$$

3.1.4 Όριο μονωνύμου $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$

Αφού υπάρχει το όριο της x σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων και τις παρατηρήσεις που κάναμε μετά έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} x^\nu = \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^\nu = x_0^\nu = f(x_0).$$

3.1.5 Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_\nu x^\nu$

Αφού υπάρχουν τα όρια των x^μ για κάθε $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ και σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_0 + a_1x + \ldots a_\nu x^\nu) = \\ &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1x + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_\nu x^\nu = \\ &= a_0 + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \ldots + a_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu = \\ &= a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_\nu x_0^\nu = f(x_0).\end{aligned}$$

3.1.6 Όριο ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Από τα προηγούμενα και το γεγονός ότι σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι ρίζα του παρονομαστή (δηλαδή $q(x_0) \neq 0$) έχουμε ότι $\lim_{x\to x_0} q(x) = q(x_0) \neq 0$, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} p(x)}{\lim_{x\to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $q(x_0) \neq 0$.

3.1.7 Όριο $\nu-$οστής ρίζας $f(x) = \sqrt[\nu]{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Εδώ τα πράγματα ζορίζουν λίγο στο θέμα της απόδειξης και γι' αυτό θα δεχτούμε ότι για κάθε[27] $x_0 \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{x} = \sqrt[\nu]{x_0}.$$

3.1.8 Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Θα δεχτούμε χωρίς απόδειξη[28] τα δύο ακόλουθα όρια — σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu\, x = \eta\mu\, x_0$$
$$\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, x_0.$$

Από εδώ και τον κανόνα για το πηλίκο ορίων προκύπτει εύκολα ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon\varphi\, x = \varepsilon\varphi\, x_0,$$

για τα $x_0 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\sigma\upsilon\nu\, x_0 \neq 0$ και

$$\lim_{x\to x_0} \sigma\varphi\, x = \sigma\varphi\, x_0,$$

για τα $x_0 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\eta\mu\, x_0 \neq 0$.

[27] Αυτή η «παράνοια» με το ότι η $\nu-$οστή ρίζα ορίζεται μόνο στο $[0, +\infty)$ είναι ένα ζήτημα του σχολικού βιβλίου. Για περιττούς εκθέτες, η $\nu-$οστή ρίζα είναι πολύ καλά ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

[28] Η απόδειξη είναι και κουραστική και αρκετά τεχνική, αν και έχει ένα ενδιαφέρον. Για περισσότερα, μπορείτε να δείτε το σχολικό βιβλίο.

3.1.9 Όρια εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

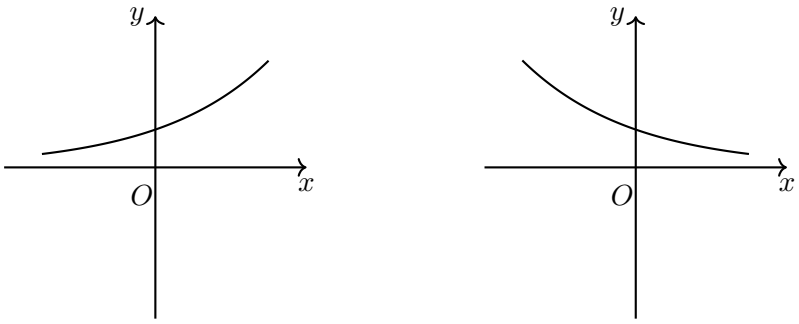
Επειδή κι εδώ οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα κοπιαστικές και έξω από το πνεύμα της προσέγισσής μας στα όρια, απλώς παραθέτουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$
$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

για $0 < a \neq 1$. Εδώ, είναι χρήσιμο να έχουμε κατά νου και τα όρια των παραπάνω συναρτήσεων στα $\pm\infty$, όταν αυτά έχουν νόημα. Πιο συγκεκριμένα:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ για } a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ για } 0 < a < 1,$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 11. Επίσης, για τις λογαριθμικές συναρτήσεις έχουμε:

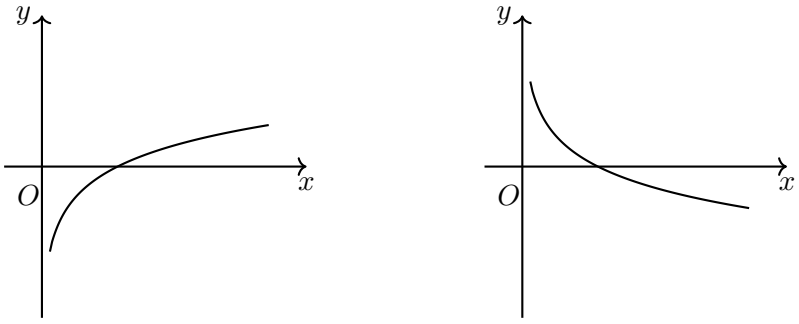


(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 11: Οι εκθετικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty \text{ για } a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty \text{ για } 0 < a < 1,$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 12.



(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 12: Οι λογαριθμικές συναρτήσεις

3.1.10 Όριο της συνάρτησης $f(x) = x^a$, με $a \neq 0$

Και σε αυτήν την περίπτωση, δίνουμε το παρακάτω όριο χωρίς να προχωρήσουμε σε κάποιου είδους απόδειξη[29]:

$$\lim_{x \to x_0} x^a = x_0^a,$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

3.1.11 Όρια της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Εδώ έχουμε διάφορα ενδιαφέροντα όρια να δούμε. Αρχικά, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0,$$

το οποίο θα το χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.

Τώρα, για $x \to 0$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν ο ν είναι άρτιος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\nu} = +\infty.$$

2. Αν ο ν είναι περιττός, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\nu} = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^\nu} = -\infty$$

και, συνεπώς, το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\nu}$$

δεν υπάρχει.

3.1.12 Όρια που θεωρούνται γνωστά

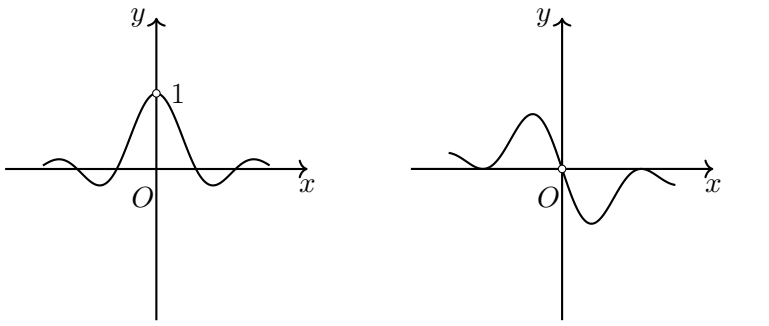
Επιπροσθέτως, μαζί με όλα τα προηγούμενα, θεωρούνται γνωστά, χωρίς απόδειξη, τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\, x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x} = 0$$

τα οποία θα τα δούμε υπό ένα άλλο πλαίσιο σε επόμενο κεφάλαιο. Πάντως, αν κανείς έχει τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων, όπως φαίνονται στο σχήμα 13 μπορεί εύκολα να επαληθεύσει τους παραπάνω ισχυρισμούς.

[29] Ωστόσο, θα δούμε αργότερα πώς μπορεί το ακόλουθο όριο να υπολογιστεί μέσω του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} e^x.$$



(α′) Η $f(x) = \frac{\eta\mu\, x}{x}$ (β′) Η $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x}$

Σχήμα 13: Δύο ακόμα γνωστά όρια

3.2 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ως εδώ, έχουμε μάθει ήδη αρκετά βασικά όρια και, μαζί με την άλγεβρα των ορίων, μπορούμε να υπολογίσουμε μια πληθώρα ορίων που προκύπτουν σαν άθροισμα, γινόμενο ή πηλίκο βασικών συναρτήσεων. Τι θα γίνει όμως αν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα όριο όπως το παρακάτω:

$$\lim_{x\to 1} \eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

Φαίνεται απλό αλλά δεν έχουμε κάποια πρόταση/κανόνα που να μας λέει τι να κάνουμε στην περίπτωση που είμαστε αντιμέτωποι με τη σύνθεση δύο συναρτήσεων. Γι' αυτόν τον σκοπό, θα χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη, το ακόλουθο:

Θεώρημα 1 (Όριο σύνθετης συνάρτησης)
Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με $f(A) \cap B \neq \varnothing$ και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A τέτοιο ώστε να υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

και να υπάρχει επίσης και το όριο:

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lambda \in \mathbb{R}$$

και, επιπρόσθετα, $f(x) \neq y_0$ κοντά στο x_0 τότε το όριο της $g \circ f$ στο x_0 υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) = \lambda.$$

Γενικά, δεν είναι δύσκολο να πειστεί κανείς για την ισχύ του παραπάνω, τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο. Η μόνη «μυστήρια» υπόθεση είναι αυτή που λέει ότι πρέπει να έχουμε «$f(x) \neq y_0$ κοντά στο x_0». Γιατί; Τι πειράζει;

Ας θυμηθούμε λίγο πώς ορίσαμε την έννοια του «πλησιάζειν»: θέλαμε η μεταβλητή x να παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στο x_0 και, επιπρόσθετα, *να μην παίρνει ποτέ την τιμή* x_0. Έτσι, για να έχει νόημα το όριο της $f \circ g$ πρέπει η $g(x)$ να τείνει στο y_0 με την παραπάνω έννοια, δηλαδή να μην παίρνει ποτέ[30] την τιμή y_0.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 1} \eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

[30] Πρακτικά, μπορεί να πάρει την τιμή y_0 κάποιες φορές, αρκεί αυτές να είναι πεπερασμένες στο πλήθος· αυτήν την έννοια έχει το «κοντά στο x_0» στη διατύπωση του θεωρήματος.

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{\pi}{x}$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\pi}{x} = \pi (= y_0).$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to \pi} \eta\mu\, y = \eta\mu\, \pi = 0 (= \lambda).$$

3. Αφού $g(x) = \frac{\pi}{x} \neq \pi$ για x κοντά στο 1, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} \eta\mu \left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Παρατήρηση 5
Από εδώ και στο εξής, δε θα σχολιάζουμε το τρίτο βήμα της παραπάνω διαδικασίας μιας και θα ασχολούμαστε, ως επί το πλείστον, με συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα.

Ας δούμε τώρα κάποια ακόμα παραδείγματα:
Παράδειγμα 1
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu\, x}.$$

Διαδοχικά:

1. Θέτουμε $g(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{2} = 0.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu\, x} = 1.$$

Παράδειγμα 2
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sqrt{x} + x^2).$$

Διαδοχικά:

1. Θέτουμε $g(x) = \sqrt{x} + x^2$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + x^2) = 0 + 0 = 0.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} \ln y = -\infty,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to 0} \ln(\sqrt{x} + x^2) = -\infty.$$

Παράδειγμα 3
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^x + x}{x+1}.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{e^x+x}{x+1}$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + x}{x+1} = \frac{e^0 + 0}{0+1} = 1.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 1} \ln y = \ln 1 = 0,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^x + x}{x+1} = 0.$$

Παράδειγμα 4
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to \pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\, x + x}{x/\pi}\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{\text{ημ}\, x+x}{x/\pi}$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\text{ημ}\, x + x}{x/\pi} = \frac{\text{ημ}\, \pi + \pi}{\pi/\pi} = \frac{0+\pi}{1} = \pi.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to \pi} 2\,\text{συν}\, y = 2\,\text{συν}\, \pi = -2,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to \pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\, x + x}{x/\pi}\right) = -2.$$

Παράδειγμα 5
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 4} \ln\left(x^2 + \text{συν}(x-4)\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = x^2 + \text{συν}(x-4)$ και εδώ παρατηρούμε ότι και αυτή η συνάρτηση είναι σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων. Επομένως, για να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 4} (x^2 + \text{συν}(x-4))$$

πρέπει να κάνουμε ένα ακόμα βήμα:

(α΄) Θέτουμε $h(x) = x - 4$ και υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 4} (x-4) = 4 - 4 = 0.$$

(β′) Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{u\to 0} \text{συν}\, u = \text{συν}\, 0 = 1$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 4} \text{συν}(x-4) = 1.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 4}(x^2 + \text{συν}(x-4)) = 4^2 + \lim_{x\to 4} \text{συν}(x-4) = 16 + 1 = 17.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 17} \ln y = \ln 17,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to 4} \ln\left(x^2 + \text{συν}(x-4)\right) = \ln 17.$$

3.3 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{0}{0}$

Είδαμε στον πίνακα 4 όλες τις απροσδιόριστες μορφές. Μία από αυτές είναι και η μορφή $\frac{0}{0}$ η οποία παρουσιάζεται, για παράδειγμα, στην ακόλουθη περίπτωση:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3}$$

όπου, αν και έχουμε ρητή συνάρτηση, πάμε να υπολογίσουμε το όριό της σε μία ρίζα του παρονομαστή, πράγμα που μας κάνει τη ζωή πιο δύσκολη. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, το να αξιοποιήσουμε την άλγεβρα των ορίων μας οδηγεί σε απρσδιόριστη μορφή, μιας και:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 2x^2 - 6x}{\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}.$$

Κι εδώ αρχίζει το μυστήριο... Τι θα κάνουμε τώρα; Κατά βάση, ο στόχος μας σε κάθε μορφή απροσδιοριστίας είναι κάνουμε διάφορους *αλγεβρικούς χειρισμούς* έτσι ώστε να ξαναγράψουμε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς να έχουμε μέσα τουλάχιστον ένα από τα δύο 0. Εδώ μπορούμε να εργαστούμε παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή:

$$\frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x(x-3)}{(x-1)(x-3)},$$

και στη συνέχεια μπορούμε να απλοποιήσουμε τον «ενοχλητικό» παράγοντα:

$$\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x}{x-1}.$$

Εδώ βλέπουμε ότι δεν έχουμε κανένα θέμα να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x \to 3$, αφού:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-1} = \frac{2\cdot 3}{3-1} = 3,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3} = 3.$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Παράδειγμα 6
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Εδώ δεν είναι τόσο προφανής η παραγοντοποίηση όσο θα ήταν σε μία ρητή συνάρτηση. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, δηλαδή την παράσταση $\sqrt{x}+1$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτήν έχουμε:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Εδώ όμως δεν έχουμε πια την απροσδιόριστη μορφή, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2.$$

Παράδειγμα 7
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Εδώ θα μιμηθούμε το παραπάνω «κόλπο» με τη συζηγή παράσταση απλώς, επειδή έχουμε δύο παραστάσεις με ριζικά, θα πολλαπλασιάσουμε και με τις δύο συζυγείς παραστάσεις $\sqrt{x^2+1}+1$ και $\sqrt{x+1}+1$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}&=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\\&=\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(x+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\\&=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}.\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο απευθείας:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{0(1+1)}{1+1}=0.$$

Παράδειγμα 8
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}.$$

Εδώ, πέρα από την απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, έχουμε και ένα άλλο πρόβλημα· δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε όπως κάναμε σε άλλα παραδείγματα, λόγω των απολύτων. Γι' αυτό, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε έναν πίνακα προσήμου των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα και να δούμε πώς συμπεριφέρεται η f κοντά στο 2 (βλ. πίνακα 6). Επομένως, αριστερά από το 2 ($x\to 2^-$), πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$$

ενώ, δεξιά από το 2 ($x\to 2^+$), το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}.$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	-3	$-$	0	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$	ΔΕΝ	$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$	ΔΕΝ	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$	

Πίνακας 6: Πίνακας της $f(x)=\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$

Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}=\frac{(x-1)(x-2)}{-(x+1)(x-2)}=\frac{x-1}{-x-1},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{-x-1}=-\frac{1}{3},$$

ενώ, για το δεύτερο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+1},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x+1}=-\frac{1}{3}.$$

Αφού έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3},$$

έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 9
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{|x-1|}.$$

Όπως και παραπάνω, πρέπει να βρούμε τον τύπο της $f(x)=\frac{1-x^2}{|x-1|}$ κοντά στο 1. Στην προκειμένη, έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x-1} & x>1\\ \frac{1-x^2}{1-x} & x<1\end{cases}$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}$$

και

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}.$$

Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{1-x^2}{x-1}=\frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)}=-1-x,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-1-x)=-2.$$

Για το άλλο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}1+x=2,$$

επομένως, αφού τα δύο πλευρικά όρια διαφέρουν:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=2\neq -2=\lim_{x\to 1^+}f(x),$$

το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{|x-1|}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 10

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}.$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι το εν λόγω όριο μοιάζει με το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0,$$

οπότε θα ήταν λογικό να προσπαθήσουμε να το εμφανίσουμε μέσα από παραγοντοποιήσεις/αλγεβρικά τεχνάσματα. Στην προκειμένη:

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}(1+\sigma\upsilon\nu x),$$

και επειδή τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x},\lim_{x\to 0}(1+\sigma\upsilon\nu x)$$

υπάρχουν, από την άλγεβρα των ορίων θα υπάρχει και το όριο του γινομένου τους:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}(1+\sigma\upsilon\nu x),$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}(1+\sigma\upsilon\nu x)=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sigma\upsilon\nu x)=0\cdot 2=0,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=0.$$

Παράδειγμα 11

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+e^x}{2^x+3^x}.$$

Εδώ πρέπει να σκεφτούμε ως εξής: η συνάρτηση a^x έχει όριο 0 στο $-\infty$ για $a>1$, αλλά θα θέλαμε να μην έχουμε μόνο εκθετικά στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Θα μπορούσαμε,

λοιπόν, να παραγοντοποιήσουμε βγάζοντας ως κοινό παράγοντα τον όρο με την μικρότερη βάση, ως εξής:

$$\frac{5^x+e^x}{2^x+3^x}=\frac{e^x\left((5/e)^x+1\right)}{2^x\left(1+(3/2)^x\right)},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+e^x}{2^x+3^x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left((5/e)^x+1\right)}{2^x\left(1+(3/2)^x\right)}=\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^x\frac{(5/e)^x+1}{1+(3/2)^x}=\\&=0\cdot\frac{0+1}{1+0}=0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12 (Θεωρητική άσκηση)
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to7}f(x),$$

αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to7}\frac{f(x)+3}{x^2-12x+35}=2019.$$

Εδώ τα πράγματα είναι περίεργα. Δεν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά έχουμε ένα άλλο όριο, που περιέχει τη συνάρτηση f. Παρατηρώντας τον παρονομαστή, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to7}(x^2-12x+35)=0$, άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε τρεις επιλογές:

1. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με 0,
2. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\lambda\neq0$ και
3. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\pm\infty$.

Έπειτα, κοιτώντας τους πίνακες για τα όρια της μορφής $\frac{\lambda}{0}$, $\lambda\neq0$ και $\frac{\pm\infty}{0}$ (περιπτώσεις 2 και 3) θα μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα και... ΛΑΘΟΣ! Δεν είναι μόνο αυτές οι περιπτώσεις που έχουμε! Υπάρχει πάντα η περίπτωση το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ να *μην υπάρχει*. Επομένως, πρέπει, πρώτα να δείξουμε με κάποιον τρόπο ότι το εν λόγω όριο υπάρχει και στη συνέχεια να το υπολογίσουμε.

Γι' αυτόν τον σκοπό, θέτουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)+3}{x^2-12x+35}$$

για την οποία συνάρτηση, από τα δεδομένα μας ξέρουμε ότι:

$$\lim_{x\to7}g(x)=2019.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για $x\neq7$ και x κοντά στο[31] 7 ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}g(x)=\frac{f(x)+3}{x^2-12x+35}&\Leftrightarrow\\\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x^2-12x+35)-3.&\end{aligned}$$

[31] Άλλωστε, αυτές οι τιμές της x μας απασχολούν για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to7}f(x)$

Αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to 7}(x^2-12x+35)$ υπάρχουν έπεται, από την άλγεβρα των ορίων, ότι και το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}(g(x)(x^2-12x+35)-3) = 2019\cdot 0 - 3 = -3,$$

δηλαδή:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = -3.$$

3.4 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\infty-\infty$

Είδαμε ότι υπήρξε μία δυσκολία κατά τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$ στο $+\infty$, καθώς καταλήγαμε σε μια μορφή $\infty-\infty$. Αν δοκιμάσουμε κι εδώ να παραγοντοποιήσουμε[32] ίσως κάτι να καταφέρουμε:

$$x^2-x = x(x-1).$$

Τώρα μάλιστα! Εδώ τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά, αφού έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$$

και, αφού τα όρια υπάρχουν, από την άλγεβρα των (άπειρων) ορίων:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Αν όμως είχαμε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1),$$

όπου η συνάρτηση δεν παραγοντοποιείται;

Εδώ χρειάζονται άλλα μέσα. Γενικά, ένα πολύ χρήσιμο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^a} = 0,$$

για κάθε $a>0$. Έτσι, ενώ δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κατά «φυσιολογικό» τρόπο, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$x^2-x+1 = x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right),$$

οπότε και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty(1-0+0) = +\infty.$$

Ας περάσουμε τώρα σε μερικά πιο δύσκολα παραδείγματα.

Παράδειγμα 13

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}}-\frac{1}{x^{2020}}\right).$$

[32] Γενικά, η παραγοντοποίηση είναι από τις πρώτες μας σκέψεις όταν θέλουμε να προσπεράσουμε μία απροσδιόριστη μορφή — παρέα με τη συζυγή παράσταση.

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\frac{1}{x^{2018}}-\frac{1}{x^{2020}}=\frac{x^2-1}{x^{2020}}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{2020}}=$$
$$=\frac{1}{x^{2018}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}}-\frac{1}{x^{2020}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2018}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=+\infty(1-(+\infty))=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty.$$

Παράδειγμα 14
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right).$$

Παρόμοια με το προηγούμενο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}=\frac{(x-1)^4-2}{(x-1)^5}=$$
$$=\frac{(x-1)^4\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)}{(x-1)^5}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right),$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot(-\infty).$$

Εδώ έχουμε ένα θέμα με το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$, καθώς:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty,$$

επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$

και

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)=(+\infty)(-\infty)=-\infty,$$

άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 15
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right).$$

Εδώ τα πράγματα είναι πιο σκούρα, μιας και δεν έχουμε κάποιον άμεσο τρόπο να παραγοντοποιήσουμε. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}$ και να πάρουμε το εξής:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} = \\ &= \frac{x^2+1-(2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} = \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}.\end{aligned}$$

Κι εδώ όμως δεν έχουμε και πολλά να πούμε μιας και έχουμε μια απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$. Οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε, προσπαθώντας να απλποιήσουμε λίγο τις παραστάσεις εντός των ριζικών:

$$\begin{aligned}\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{-x^2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}.\end{aligned}$$

Κάτσε, ώπα! Γιατί διώξαμε το απόλυτο; Αφού δεν ισχύει $|x|=x$, γενικά! Πράγματι, εν γένει $x\leq|x|$, αλλά, στην προκειμένη περίπτωση, όλες αυτές οι πράξεις και οι τούμπες και οι μετασχηματισμοί γίνονται για να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x\to+\infty$. Και τι σημαίνει $x\to+\infty$; Σημαίνει ότι, τελικά, η x θα παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0, άρα τελικά $x>0$, δηλαδή $|x|=x$. Σε αυτήν την τελευταία μορφή είναι εύκολο να υπολογίσουμε το όριο:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{-\infty}{\sqrt{1+0}+\sqrt{2+0}} = -\infty.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 16
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right).$$

Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής, κατ' αναλογία με το προηγούμενο:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-3x+2}+x &= \sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x = \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x = \\ &= |x|\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x = \\ &= x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x = \\ &= x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right),\end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right) = \\ &= +\infty(\sqrt{4-0+0}+1) = +\infty.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 17
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right).$$

Εδώ το προηγούμενο τέχνασμα δε δουλεύει (δοκιμάστε το για να πειστείτε) αν και η μόνη διαφορά είναι ένας αριθμός. Θα χρειαστεί, πρώτα, να πολλαπλασιάσουμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{4x^2-3x+2}+2x$, οπότε και θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-3x+2}-2x &= \frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x} = \\ &= \frac{4x^2-3x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x} = \frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}.\end{aligned}$$

Από εδώ συνεχίζουμε με το συνηθισμένο, πια, τέχνασμα:

$$\begin{aligned}\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x} &= \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x} = \\ &= \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x} = \\ &= \frac{-3x+2}{|x|\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x} = \\ &= \frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x} = \\ &= \frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2\right)} = \\ &= \frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2},\end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2}=$$
$$=\frac{-3+0}{\sqrt{4-0+0}+2}=-\frac{3}{4}.$$

Παράδειγμα 18
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2.$$

Ας προχωρήσουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συζυγή παράσταση $\sqrt{9x^2+4x}+3x^2$:

$$\sqrt{9x^2+4x}-3x^2=\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x^2\right)\left(\sqrt{9x^2+4x}+3x^2\right)}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2}=$$
$$=\frac{9x^2+4x-9x^4}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2}=$$
$$=\frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2}=$$
$$=\frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2}=$$
$$=\frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{|x|\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2}=$$
$$=\frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2}=$$
$$=\frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\left(\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x\right)}=$$
$$=\frac{x^3\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x},$$

και τώρα κάναμε μια τρύπα στο νερό, γιατί φτάσαμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Επομένως, πρέπει να ακολουθήσουμε άλλο μονοπάτι.

Ας δοκιμάσουμε να κάνουμε κατευθείαν παραγοντοποίηση, χωρίς να αξιοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση:

$$\sqrt{9x^2+4x}-3x^2=\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}-3x^2=$$
$$=\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2=$$
$$=|x|\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2=$$
$$=x\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2=$$

$$= x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right),$$

και εδώ τα πράγματα είναι πιο εύκολα, μιας και έχουμε απλώς ένα γινόμενο απείρων, επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right) = \\ &= (+\infty)\left(\sqrt{9+0}-(+\infty)\right) = (+\infty)\left(3-(+\infty)\right) = \\ &= (+\infty)(-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

3.5 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, προκύπτει μια απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ η οποία είναι εν γένει δύκολη στη διαχείριση χωρίς πιο «ανεπτυγμένα» εργαλεία[33]. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να άρουμε την απροσδιοριστία και να έρθουμε σε μία μορφή που θα είναι διαχειρίσιμη.

Ακολουθούν κάποια σχετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 19

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5}.$$

Θα βγάλουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον μεγιστοβάθμιο όρο έτσι ώστε να εμφανίσουμε γνωστά μας όρια:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} &= \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)} = \\ &= \frac{1}{x}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}.\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}} = \\ &= \frac{1}{-\infty}\frac{1+0-0}{-3+0-0} = 0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 20

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x}.$$

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τη δοσμένη συνάρτηση ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x} &= \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}-x}{4x} = \\ &= \frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-x}{4x} =\end{aligned}$$

[33] Θα μάθουμε σε επόμενο κεφάλαιο κάποια από αυτά τα εργαλεία.

$$= \frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-x}{4x} =$$
$$= \frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1\right)}{4x} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1\right),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0}+1\right) = -\frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 21

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}.$$

Εδώ θα ακολουθήσουμε το σκεπτικό των προηγούμενων παραδειγμάτων, αλλά, μιας και δεν έχουμε να κάνουμε με πολυώνυμα, πρέπει να σκεφτούμε λίγο διαφορετικά. Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2^x από τον αριθμητή (τον όρο με την μικρότερη βάση), τότε θα δημιουργηθεί ένας όρος της μορφής $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ οποίος τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to+\infty$, επομένως δε μας συμφέρει[34]. Ίσως, όμως, εξυπηρετεί να βγάλουμε κοινούς παράγοντες σε αριθμητή και παρονομαστή τους όρους με τη μεγαλύτερη βάση:

$$\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x} = \frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^x\frac{(2/3)^x+1}{(4/7)^x+1} =$$
$$= 0\cdot\frac{0+1}{0+1} = 0.$$

Παράδειγμα 22

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}.$$

Εδώ, αναλόγως με το προηγούμενο, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα από τον παρονομαστή τον όρο με την μικρότερη βάση[35]:

$$\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x} = \frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^x\frac{1}{(\pi/3)^x+1} = 0\cdot\frac{1}{0+1} = 0.$$

[34] Όλη η δουλειά γίνεται για να ξεφορτωθούμε τα $+\infty$ από το κλάσμα.
[35] Αφού το $x\to-\infty$.

Παράδειγμα 23
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}.$$

Εδώ χρειάζεται λίγη προσοχή με τις βάσεις των δυνάμεων και τις ιδιότητες των εκθετών:

$$\begin{aligned}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}} &= \frac{2\cdot 2^{2x}+3^2\cdot 3^x}{4^x-2^{-1}2^x} = \\ &= \frac{2\cdot 4^x+9\cdot 3^x}{4^x-\frac{1}{2}2^x} = \\ &= \frac{4^x\left(2+9(3/4)^x\right)}{4^x\left(1-\frac{1}{2}(1/2)^x\right)} = \\ &= \frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x},\end{aligned}$$

επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x} = \\ &= \frac{2+9\cdot 0}{1-\frac{1}{2}\cdot 0} = 2.\end{aligned}$$

3.5.1 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $0\cdot(\pm\infty)$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

αξιοποιώντας τις συνήθεις ιδιότητες των ορίων θα βρεθούμε στην ακόλουθη κατάσταση:

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to1^-}(x-1)\cdot\lim_{x\to1^-}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0\cdot(+\infty),$$

και αυτή, όπως έχουμε δει, είναι άλλη μία απροσδιόριστη μορφή. Εδώ όμως δεν μπορούμε ούτε να παραγοντοποιήσουμε ούτε έχουμε κάποια «συζυγή παράσταση» για να μας ξελασπώσει. Η αλήθεια είναι ότι με αυτήν την απροσδιοριστία θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην πορεία, μιας και δεν έχουμε ακόμα τα απαραίτητα εργαλεία, επομένως δεν μπορούμε, προς το παρόν, να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο. Ας δούμε, ενδεικτικά, ένα παράδειγμα στο οποίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα 24
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Εδώ θα χρειαστούμε, όπως είπαμε, το θεώρημα για το όριο σύνθετης συνάρτησης. Ποιες συναρτήσεις έχουμε στα χέρια μας, όμως; Ας δούμε λίγο ένα τέχνασμα που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ συχνά, ειδικά όταν έρχεται στο προσκήνιο κάποια απροσδιοριστία σαν και αυτή:

$$x\,\eta\mu\frac{1}{x} = \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Ε, και; Τώρα μπορούμε να παίξουμε με τις εξής δύο συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\eta\mu\, x}{x}$$
$$g(x) = \frac{1}{x},$$

μιας και:

$$x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} = \frac{\eta\mu\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

οπότε τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\eta\mu\, y}{y} = 1,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} = 1.$$

3.5.2 Όρια με αλλαγή μεταβλητής

Με αφορμή την προηγούμενη διαπίστωσή μας ότι «εξαντλήσαμε» σε έναν βαθμό τις δυνατότητες της έως τώρα θεωρίας μας[36], θα χρειαστούμε μία ακόμα, γενικής χρήσης, τεχνική που θα μας «λύσει τα χέρια». Αυτή είναι η αλλαγή μεταβλητής.

Όπως και στις εξισώσεις, πολλές φορές, αλλάζαμε μεταβλητή (θέταμε) για να φέρουμε την εξίσωση σε μία πιο γνώριμη και απλή για εμάς μορφή, έτσι και εδώ, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να αλλάξουμε λίγο τη μορφή του ορίου έτσι ώστε να το φέρουμε στα «μέτρα» μας.

Στα όρια[37], η αλλαγή μεταβλητής βασίζεται ουσιαστικά στο θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης με τον εξής τρόπο. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την προηγούμενη περίπτωση:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\,\frac{1}{x}.$$

Μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητή και να θέσουμε[38]:

$$y = \frac{1}{x},$$

οπότε το όριό μας γίνεται:

$$\lim_{y\to\text{πού;}\,\frac{1}{y}} \eta\mu\, y.$$

[36] Που δεν τις εξαντλήσαμε, για να λέμε και του στραβού το δίκιο, αλλά θα έπρεπε να μπούμε σε χωράφια που δεν εμπίπτουν στην ύλη μας για να τις εξαντλήσουμε.

[37] Όπως και στις εξισώσεις, απλά εκεί δεν είχαμε τα απαραίτητα εργαλεία

[38] Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, στην πραγματικότητα, η μεταβλητή y δεν είναι ανεξάρτητη, καθώς όλες της οι τιμές εξαρτώνται από τις τιμές της x, δηλαδή η y είναι μία *συνάρτηση* της x και, μάλιστα, είναι ακριβώς η συνάρτηση g — με τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος.

Όπως θα παρατηρήσατε, λείπει κάτι από το παραπάνω όριο· πού τείνει το y; Εδώ, πρακτικά, ακολουθούμε το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης και, για να βρούμε που τείνει το y, αρκεί να ανατρέξουμε στον ορισμό του y και στο πού τείνει το x. Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0,$$

επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y} = 1.$$

Πολλές φορές, για λόγους ευκολίας και όταν η αλλαγή μεταβλητής είναι απλή, όπως στην περίπτωσή μας, μπορούμε[39] αντί όλου αυτού, να γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} \xrightarrow[y\to 0]{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y} = 1.$$

Παρατήρηση 6
Ουσιαστικά, η αλλαγή μεταβλητής είναι ένας πιο πρακτικός τρόπος να εφαρμόζουμε το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης και, συνήθως, προτιμούμε αυτόν τον τρόπο αντί του να εφαρμόζουμε ευθέως το θεώρημα. Παρ' όλα αυτά, ο καθένας μπορεί να χρησιμοποιεί αυτό που του φαίνεται πιο οικείο.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη μελέτη των υπολοίπων απροσδιοριστιών με μία σχετική άνεση.

3.5.3 Όρια των (απροσδιόριστων) μορφών $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, 0^0 και $(\pm\infty)^{\pm\infty}$

Θε εξετάσουμε όλες τις παραπάνω μορφές μαζί διότι, ο συνήθης τρόπος για να τις αντιμετωπίσουμε, είναι να εκμεταλευτούμε τις ταυτότητες[40]:

$$\ln e^x = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \text{ για κάθε } x > 0.$$

Προχωράμε απευθείας σε κάποια παραδείγματα, αν και με αυτές τις απροσδιοριστίες θα ασχοληθούμε εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 25
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} x^x.$$

Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x},$$

και θέτουμε $y = x\ln x$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty,$$

άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} x^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty.$$

[39] Και, να είστε σίγουρες/οι, θα το κάνουμε!
[40] Κυρίως τη δεύτερη για να μπορούμε να «πετάξουμε» τον εκθέτη έξω από τον λογάριθμο.

Παράδειγμα 26
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

Κι εδώ, ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\frac{1}{x}},$$

και θέτουμε $y = x\ln\frac{1}{x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x\ln x) = -(+\infty)(+\infty) = -\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

3.5.4 Υπολογισμός ορίων με τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής

Εκτός από τις απροσδιόριστες μορφές, υπάρχουν και πολλές περιπτώσεις στις οποίες καλούμαστε να υπολογίσουμε όρια σαν το ακόλουθο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x}.$$

Εδώ, το όριο του αριθμητή δεν υπάρχει, επομένως δεν είμαστε σε καμμία από τις γνώριμες απροσδιόριστες μορφές. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο ακολουθώντας την εξής πορεία:

- Χρησιμοποιώντας την ανισότητα:

  $$-1 \le \eta\mu\, x \le 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

  έχουμε[41]:

  $$-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu\, x}{x} \le \frac{1}{x}.$$

- Εδώ παρατηρούμε ότι:

  $$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x},$$

  επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, το εν λόγω όριο υπάρχει και, μάλιστα:

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x} = 0.$$

Προχωράμε, τώρα, σε κάποια ακόμα παραδείγματα αξιοποίησης του κριτηρίου παρεμβολής.
Παράδειγμα 27
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to0} x^2\,\eta\mu\frac{1}{x}.$$

[41] Αφού $x \to +\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x > 0$.

Κι εδώ, αφού το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu\, \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει, θα χρειαστεί να φράξουμε τη συνάρτηση $x^2\, \eta\mu\, \frac{1}{x}$ από δύο άλλες συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας, και πάλι, την ανισότητα:

$$-1 \leq \eta\mu\, \frac{1}{x} \leq 1,$$

έχουμε:

$$-x^2 \leq x^2\, \eta\mu\, \frac{1}{x} \leq x^2$$

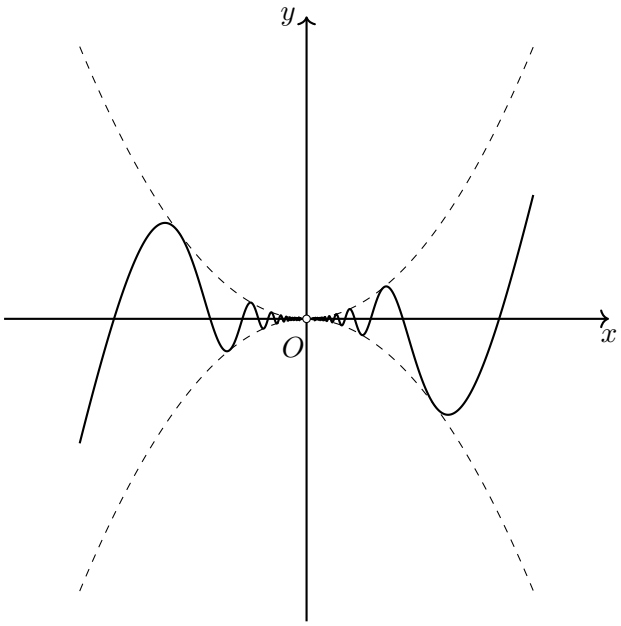
και:

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2,$$

επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0} x^2\, \eta\mu\, \frac{1}{x} = 0.$$

Μπορούμε να δούμε και τη γραφική παράσταση της εν λόγω συνάρτησης, η οποία έχει ένα αισθητικό ενδιαφέρον, στο σχήμα 14.



Σχήμα 14: Η συνάρτηση $x^2\, \eta\mu\, \frac{1}{x}$

Παράδειγμα 28
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu\, x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x}.$$

Χρησιμοποιούμε κι εδώ την ανισότητα:

$$-1 \leq \eta\mu\, x \leq 1,$$

οπότε[42]:

$$-3 \leq \eta\mu^2 x + \eta\mu\, x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{x} \geq \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu\, x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x} \geq \frac{3}{x},$$

[42] Αφού $x \to -\infty$, υποθέτουμε ότι $x < 0$.

και, αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x},$$

από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu x + \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{x} = 0.$$

Παράδειγμα 29
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to0} \frac{\eta\mu(x^2)}{x}.$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μία άλλη ανισότητα, την:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|,$$

οπότε, έχουμε:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2) \leq \left|x^2\right|$$

Εδώ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όμως, διότι, αφού $x \to 0$, σημαίνει ότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές *εκατέρωθεν*[43] του 0, άρα μπορεί να είναι και θετική και αρνητική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούμε να διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με x, καθώς δε γνωρίζουμε το πρόσημο της x. Γι' αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις και χρησιμοποιούμε τα πλευρικά όρια:

1. Αν $x \to 0^+$, τότε $x > 0$, επομένως:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2) \leq \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \leq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \leq \frac{x^2}{x},$$

δηλαδή:

$$-x \leq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \leq x,$$

και, επειδή:

$$\lim_{x\to0^+}(-x) = 0 = \lim_{x\to0^+} x,$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\eta\mu(x^2)}{x} = 0.$$

2. Αν $x \to 0^-$, τότε $x < 0$, επομένως:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2) \leq \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \geq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \geq \frac{x^2}{x},$$

δηλαδή:

$$-x \geq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \geq x,$$

και, επειδή:

$$\lim_{x\to0^-}(-x) = 0 = \lim_{x\to0^+} x,$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\eta\mu(x^2)}{x} = 0.$$

[43] Εκατέρωθεν σημαίνει «και από τις δύο μεριές».

Τέλος, αφού τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα έπεται ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=0.$$

Παρατήρηση 7
Για το παραπάνω όριο, θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί και ως εξής[44]:

- αφού $x\to 0$, έπεται ότι $x\neq 0$, άρα και $x^2\neq 0$, επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε με x^2. Διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, τη δοσμένη συνάρτηση με x^2:

$$\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)x^2}{x^2\cdot x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot x.$$

- Θα υπολογίσουμε δύο όρια και θα βρούμε το ζητούμενο όριο σαν γινόμενο ορίων. Πρώτα, θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\overset{\substack{y=x^2\\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y}=1,$$

και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}x=0,$$

οπότε το ζητούμενο όριο υπάρχει (γινόμενο ορίων) και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}x=1\cdot 0=0.$$

3.6 Όρια που μας φέρνουν... εκτός ορίων

Θα δούμε τώρα μερικά όρια τα οποία χρησιμοποιούν περισσότερες από μία από τις τεχνικές που είδαμε παραπάνω και, αρκετά συχνά, εμφανίζονται και πάνω από μία απροσδιόριστες μορφές.
Παράδειγμα 30
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5}=\\
&=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\\
&=\frac{x^2+1-(x^2+x+1)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\\
&=\frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=
\end{aligned}$$

[44] Γενικά, προχωρώντας θα δείτε ότι πολλά όρια είναι δυνατό να υπολογιστούν με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους.

$$= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-x}{(4x+5)\left(|x|\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+|x|\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-x}{x\left(4+5/x\right)\left(x\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+x\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-x}{x^2\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-1}{x\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)}.$$

Τώρα, μπορούμε, επιτέλους, να πάρουμε όριο καθώς $x \to +\infty$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} =$$
$$= \frac{-1}{(+\infty)\left(4+0\right)\left(\sqrt{\left(1+0\right)}+\sqrt{\left(1+0+0\right)}\right)} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

Παράδειγμα 31
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}}.$$

Θέτουμε πρώτα:

$$y = \frac{x^2+4}{x^3-4x+3x+2},$$

και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+4/x^2\right)}{x^3\left(1-4/x+3/x^2+2/x^3\right)} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\frac{1+4/x^2}{1-4/x+3/x^2+2/x^3} =$$
$$= \frac{1}{-\infty}\frac{1+0}{1-0+0+0} = 0.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}} = \lim_{y\to0} e^y = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα 32
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3-x^2\right)-1}{x}.$$

Εδώ εφαρμόζουμε το εξής τέχνασμα· πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση x^3-x^2, η οποία είναι μη μηδενική — αφού $x\to 0$ — οπότε:

$$\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x}=\frac{\left(\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1\right)\left(x^3-x^2\right)}{x\left(x^3-x^2\right)}=$$
$$=\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x^3-x^2}\cdot\frac{x^3-x^2}{x}.$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x^3-x^2}\text{ και }\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x}.$$

Για το πρώτο όριο, θέτουμε $y=x^3-x^2$, οπότε $y\to 0$ και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x^3-x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\text{συν}\,y-1}{y}=0.$$

Για το δεύτερο όριο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\frac{x^3-x^2}{x}=\frac{x^2(x-1)}{x}=x(x-1),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x(x-1)=0,$$

άρα, το ζητούμενο όριο υπάρχει (ως γινόμενο ορίων) και είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x}=0\cdot 0=0.$$

Παράδειγμα 33
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{e^{-x}-1}{1-e^x}.$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ που εμφανίζεται μέσα στον λογάριθμο. Επομένως, ίσως εξυπηρετεί να θέσουμε:

$$y=\frac{e^{-x}-1}{1-e^x}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{1-e^x},$$

το οποίο δε θυμίζει κάποιο όριο που έχουμε δει[45]. Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε ότι, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με e^x, παίρνουμε:

$$\frac{e^{-x}-1}{1-e^x}=\frac{e^x\left(e^{-x}-1\right)}{e^x\left(1-e^x\right)}=\frac{1}{e^x}\frac{1-e^x}{1-e^x}=e^{-x}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}=e^0=1.$$

Άρα, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{e^{-x}-1}{1-e^x}=\lim_{y\to 1}\ln y=0.$$

[45]Μετά από λίγη σκέψη και αξιοποιώντας το γεγονός ότι $e^{-x}=(1/e)^x$ ίσως και να θυμίζει.

Παράδειγμα 34
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \,\eta\mu\left(e^{1-x}\right).$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$ και δε φαίνεται ευκολη λύση στον ορίζοντα. Θέτουμε, αρχικά:

$$y = e^{1-x},$$

οπότε:

$$\ln y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \ln y.$$

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0,$$

το δοσμένο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \,\eta\mu\left(e^{1-x}\right) = \lim_{y\to 0} e^{1-\ln y}\,\eta\mu\, y,$$

το οποίο δε φαίνεται και πολύ καλύτερο. Αν, όμως κάνουμε λίγες πράξεις, βλέπουμε ότι:

$$e^{1-\ln y}\,\eta\mu\, y = e\cdot e^{-\ln y}\,\eta\mu\, y = e\cdot e^{\ln(1/y)}\,\eta\mu\, y = e\frac{1}{y}\,\eta\mu\, y,$$

δηλαδή, έχουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} e\frac{\eta\mu\, y}{y} = e\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y} = e\cdot 1 = e.$$

Παράδειγμα 35
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}\right).$$

Πολλά μαζεύτηκαν και θα μπερδευτούμε. Θέτουμε:

$$y = \frac{\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}$$

και πρέπει να υπολογίσουμε στη συνέχει το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}.$$

Ας κάνουμε πρώτα λίγες πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x} &= \frac{\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x}{x(x-2)} = \\ &= \frac{\eta\mu\, x}{x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}.\end{aligned}$$

Έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x} = 0,$$

επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}.$$

Θα αξιοποιήσουμε τώρα το κριτήριο παρεμβολής, μέσω της ανισότητας[46]:

$$-1 \leq \text{συν}\, x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x-2} \leq \frac{\text{συν}\, x}{x-2} \leq \frac{1}{x-2}.$$

Αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2},$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{συν}\, x}{x-2} = 0,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{ημ}\, x\, \text{συν}\, x}{x^2-2x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Έτσι, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\, x\, \text{συν}\, x}{x^2-2x}\right) = \lim_{y\to 0} \text{συν}\, y = \text{συν}\, 0 = 1.$$

Παράδειγμα 36
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(2+e^x) - 3x\right).$$

Εδώ εκμεταλλευόμαστε την ταυτότητα:

$$x = \ln e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

ως εξής:

$$\ln(2+e^x) - 3x = \ln(2+e^x) - \ln e^{3x} = \ln \frac{1+e^x}{e^{3x}}.$$

Τώρα, θέτουμε:

$$y = \frac{1+e^x}{e^{3x}},$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^{3x}} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^{3x}}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + e^{-2x}\right) = 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(2+e^x) - 3x\right) = \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty.$$

Παράδειγμα 37
Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

Να σου πω τη μοίρα σου, να σου πω το ριζικό σου. Εδώ έχουμε πολλά ριζικά μέσα στην παράσταση. Ένα τέχνασμα εδώ, για να φανούν τα πράγματα πιο ξεκάθαρα είναι να θέσουμε:

$$y = \sqrt[12]{x}.$$

[46] Αφού $x \to +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 2$ άρα $x - 2 > 0$.

Να σημειώσουμε εδώ ότι το 12 δε μας ήρθε στην τύχη, αλλά είναι το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών που εμφανίζονται στην παράσταση (του 3, του 4 και του 2). Προφανώς, $y \to 0$ καθώς $x \to 0$, επομένως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4+y^6}{y^3}.$$

Αυτό το όριο, όμως, είναι πια εύκολο να υπολογιστεί, αφού:

$$\frac{y^4+y^6}{y^3} = \frac{y^4(1+y^2)}{y^3} = y(1+y^2),$$

οπότε:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^4+y^6}{y^3} = \lim_{y\to 0} y(1+y^2) = 0,$$

άρα και

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = 0.$$

Παράδειγμα 38 (Θεωρητική)
Αν $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le |\text{ημ}\,x| + x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right), \text{ για κάθε } x \neq 0,$$

να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Τώρα, μάλιστα... Αυτό μας έλειπε. Επειδή μας δίνεται μια ανισότητα, υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε, κάπως, το κριτήριο παρεμβολής. Ναι, αλλά πού είναι η δεύτερη ανισότητα; Ας ξεκινήσουμε λίγο, «καθαρογράφοντας» τη δοσμένη ανισότητα[47]:

$$\begin{aligned}
&xf(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le |\text{ημ}\,x| + x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &f(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} + \left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} - \left(1 - \text{ημ}^2\,\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} - \text{συν}^2\,\frac{1}{x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} + \text{συν}^2\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x}.
\end{aligned}$$

Τι λες τώρα; Και η δεύτερη ανισότητα, από τα αριστερά, πού είναι; Λοιπόν, αν σκεφτούμε ψύχραιμα, θα θυμηθούμε, από το γυμνάσιο ακόμα, ότι,

$$a^2 \ge 0,$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$, επομένως, στην προκειμένη έχουμε, τελικά:

$$0 \le \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \le \frac{\text{ημ}\,x}{x}.$$

[47] Πάντα, αφού $x \to +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 0$.

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x},$$

έπεται, από το κριτήριο παρεμβολής, ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right)^2 = 0,$$

άρα, από το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \left|f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

Επομένως[48],

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Επίσης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x} \underset{y\to 0}{\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=}} \lim_{y\to 0} \sigma\upsilon\nu\, y = 1,$$

επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x} + \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{x} = \\ &= 0 + 1 = 1.\end{aligned}$$

4 Μία εφαρμογή των όσων είδαμε ως τώρα: Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης συνάρτησης

Είδαμε όρια με απροσδιόριστες μορφές, όρια χωρίς απροσδιοριστες μορφές, όρια απλά, όρια δύσκολα, φτάσαμε στα όριά μας, γενικά[49] αλλά δεν είδαμε ακόμα πώς μπορούν τα όρια να μας βοηθήσουν να πετύχουμε τον σκοπό μας, που, θυμίζουμε, είναι να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας οποιασδήποτε συνάρτησης μας δοθεί. Πριν από αυτό, ας δούμε πρώτα τι πληροφορίες μπορεί να μας δώσει ένα όριο[50].

4.1 Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - e^{1-x}$. Αν υπολογίσουμε το όριό της στο $+\infty$, βλέπουμε ότι:

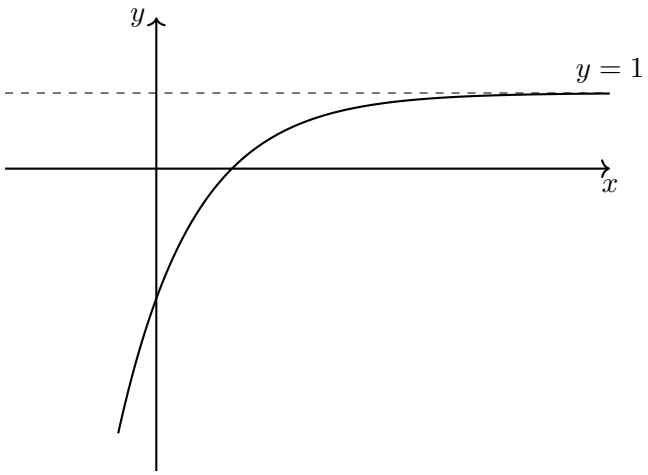
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

[48] Γιατί;

[49] Εντάξει, σταματάει το αστείο εδώ...

[50] Γενικά, μέσα από τα όρια μπορούμε, πέρα από εκτιμήσεις, όπως είχαμε δει στο πρόβλημα της πετρελαιοκηλίδας, να μελετήσουμε και φαινόμενα σε «παθολογικά» σημεία, δηλαδή σε σημεία που δεν έχουμε καλή συμπεριφορά, αλλά θα θέλαμε να ξέρουμε τι συμβαίνει. Επίσης, μπορούμε να μελετήσουμε και την εξέλιξη διαφόρων φαινομένων μέσα στον χρόνο καθώς ο χρόνος περνά ($t \to +\infty$).

Αν χαράξουμε και τη γραφική της παράσταση, όπως ξέρουμε πολύ καλά[51] βλέπουμε ότι αυτή έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 15. Επιβεβαιώνουμε έτσι, σχετικά εύκολα, αυτό που βρήκαμε



Σχήμα 15: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - e^{1-x}$

στους υπολογισμούς μας· καθώς η $x \to +\infty$ η $f(x) \to 1$, δηλαδή, όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, θα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να πλησιάζει όλο και περισσότερο την ευθεία $y = 1$.

Ας πάρουμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x}\,\eta\mu\, x$. Εδώ, μπορούμε να δούμε ότι:

$$|\eta\mu\, x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu\, x \leq 1 \Leftrightarrow -e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$$

και ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = 0 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x},$$

οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

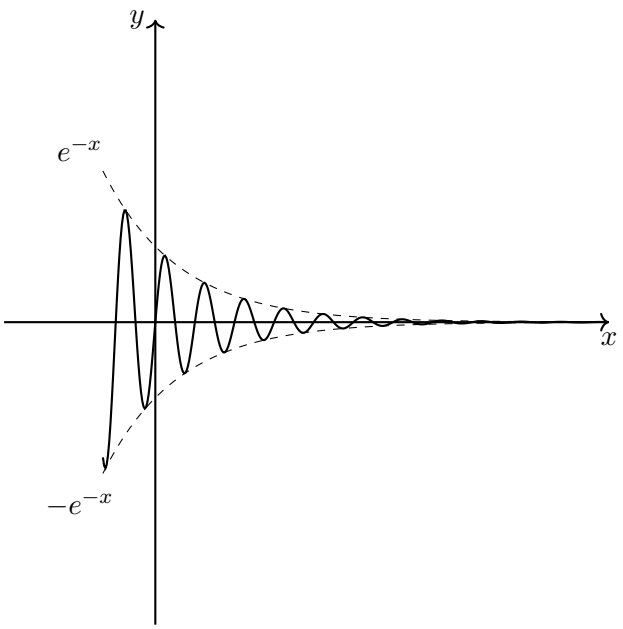
Αν χαράξουμε και τη γραφική παράσταση[52] της g, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 16, παρατηρούμε, και πάλι, ότι καθώς $x \to +\infty$, η $f(x) \to 0$, δηλαδή, η γραφική παράσταση της f, όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, πλησιάζει όλο και περισσότερο τον άξονα $x'x$ (δηλαδή την ευθεία $y = 0$). Ας δούμε άλλη μία, πιο παράξενη, περίπτωση. Για τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x}+x-1$, $x \in \mathbb{R}$, αν υπολογίσουμε το όριό της στο $+\infty$, βλέπουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{-x} + x - 1) = 0 + (+\infty) - 1 = +\infty.$$

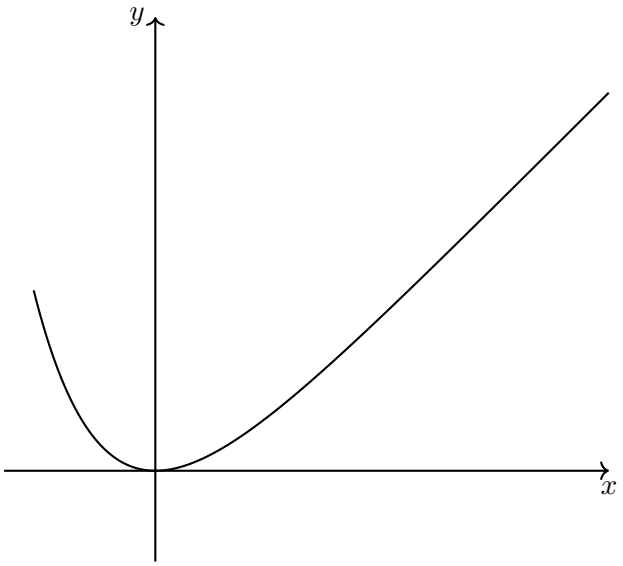
Άρα, εδώ η h δεν πλησιάζει προς κάποιον αριθμό όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, άρα και η γραφική παράσταση της h δε θα πλησιάζει κάποια ευθεία της μορφής $y = c$, για $c \in \mathbb{R}$. Αυτό φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση, στο σχήμα 17. Όπως όμως θα παρατηρήσει κανείς, φαίνεται λες και η γραφική παράσταση της h πλησιάζει προς κάποια ευθεία της μορφής $y = \lambda x+\beta$. Αν ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 18 θα δούμε ότι, πράγματι, αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y = x-1$, η παρατήρησή μας επαληθεύεται άμεσα. Αν παίξουμε λίγο ακόμα, θα δούμε ότι και η συνάρτηση

[51] Ξεκινάμε από την e^x, περνάμε στην e^{-x} με μία ανάκλαση ως προς τον άξονα $y'y$, περνάμε στην $e^{1-x} = e^{-(x-1)}$ με μία μεταφορά προς τα δεξιά κατά 1, περνάμε στην $-e^{1-x}$ με μία ανάκλαση ως προς τον $x'x$ και, τέλος, περνάμε στην $f(x)$ με μία μεταφορά προς τα πάνω κατά 1.

[52] Δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της g ακόμα, αλλά ένα τρυκ που βοηθά σε αρκετές περιπτώσεις που έχουμε να κάνουμε με συναρτήσεις της μορφής $f(x)\,\eta\mu\, x$ είναι να σχεδιάζουμε πρώτα τις f και $-f$ και, στη συνέχεια, να παρεμβάλουμε ανάμεσά τους ένα «κύμα», όπως είναι η γραφική παράσταση του ημιτόνου. Όλα αυτά, μόνο για να πάρουμε μια ιδέα, όχι γενικά. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτός ο τρόπος είναι σχετικά ακριβής; Γιατί σχεδιάζουμε και την f και τη $-f$;



Σχήμα 16: Η γραφική παράσταση της $g(x) = e^{-x}\,\text{ημ}\,x$



Σχήμα 17: Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$

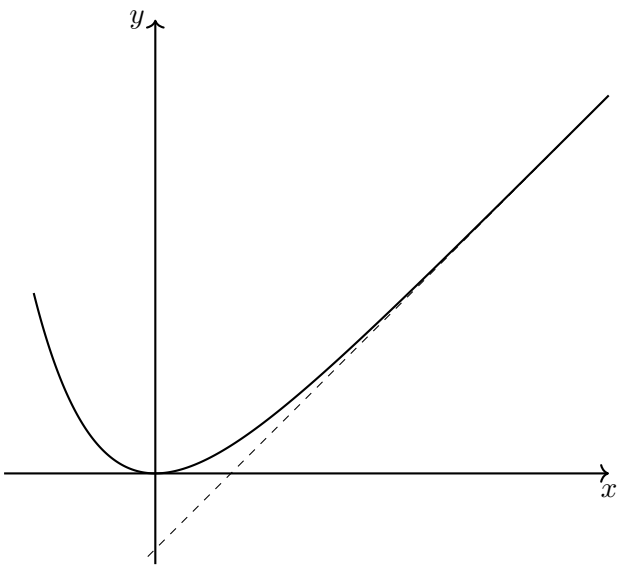
$s(x) = e^{-x}\,\text{συν}\,x + x$ έχει παρόμοια συμπεριφορά, καθώς $x \to +\infty$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 19. Ενδέχεται όμως να παρατηρήσουμε και παρόμοια ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μία ακόμα περίπτωση.

4.2 Όρια συνάρτησης στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της

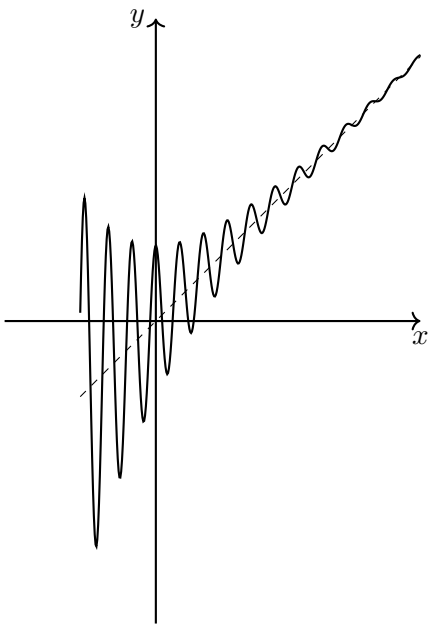
Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x^2$, $x \neq 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln x^2 \xrightarrow[y\to 0]{y=x^2} \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty,$$

δηλαδή, όσο πλησιάζουμε το 0, εκατέρωθεν, η $f(x) \to -\infty$, δηλαδή μειώνεται απεριόριστα πολύ. Αυτό αποτυπώνεται γεωμετρικά και στη γραφική της παράστασης όπως φαίνεται στο σχήμα 20.



Σχήμα 18: Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$ με την ευθεία $y = x - 1$.



Σχήμα 19: Η γραφική παράσταση της $s(x) = e^{-x}\,\text{συν}\,x + x$ με την ευθεία $y = x$.

Ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζει και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, καθώς, αν και το όριο:

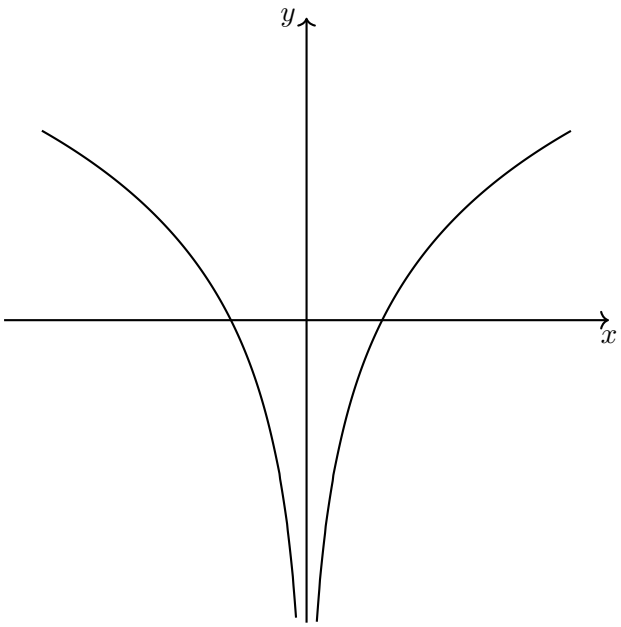
$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

δεν υπάρχει, τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και μάλιστα:

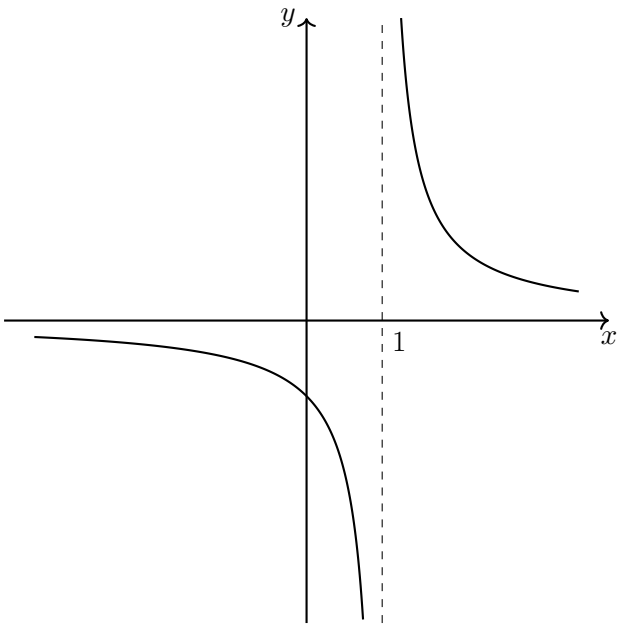
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$

το οποίο γεωμετρικά αποτυπώνεται στο σχήμα 21. Αντίστοιχα, και για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \\ x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$



Σχήμα 20: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x^2$.

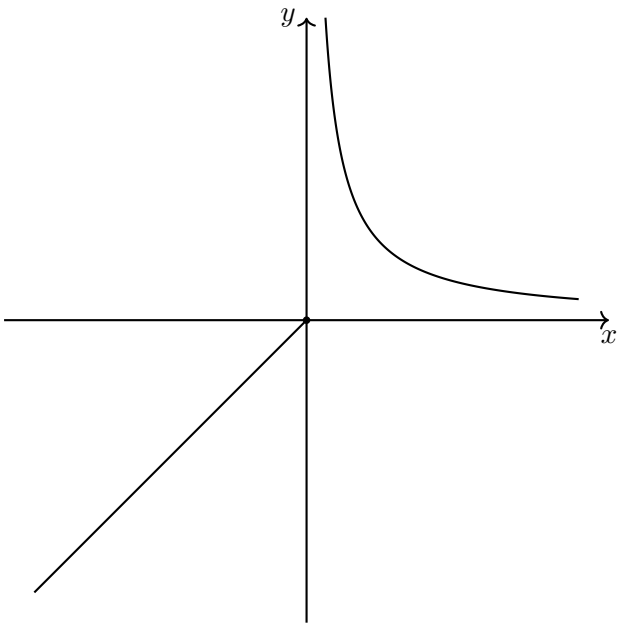


Σχήμα 21: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

παρατηρούμε ότι, ενώ το όριό της στο 0 δεν υπάρχει, για τα πλευρικά της όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

το οποίο γεωμετρικά αποτυπώνεται στο σχήμα 22. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι, καθώς πλησιάζουμε έναν αριθμό x_0 από τουλάχιστον μία μεριά, το αντίστοιχο πλευρικό όριο της συνάρτησης απειρίζεται, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης να προσεγγίζει μία ευθεία απεριόριστα πολύ, χωρίς όμως να συμπίπτει με αυτή. Αυτό που επί της ουσίας συμβαίνει και στις δύο περιπτώσεις (είτε η ευθεία είναι της μορφής $x = x_0$ είτε της μορφής $y = \lambda x + \beta$) είναι ότι η συνάρτηση προσεγγίζει την ευθεία οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε,



Σχήμα 22: Η γραφική παράσταση της f.

δηλαδή:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(\lambda x+\beta))=0$$

ή, αν η ευθεία έχει μορφή $x=x_0$:

$$\lim_{x\to x_o^{\pm}} f(x)=\pm\infty.$$

4.3 Ορισμός ασύμπτωτης γραφικής παράστασης συνάρτησης

Όλα τα παραπάνω παραδείγματα, μας οδηγούν στο να ορίσουμε την έννοια της *ασύμπτωτης* της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση, καθώς το $x\to\pm\infty$ προσεγγίζει απεριόριστα μία ευθεία της μορφής $y=\lambda x+\beta$, τότε θα μιλούμε για *πλάγια ασύμπτωτη*. Σε αυτήν την περίπτωση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:
   Ορισμός 10
   Μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ θα λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) αν:

   $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda y-\beta)=0 \text{ (αντίστοιχα, } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0),$$

   και $\lambda\neq 0$. Αν $\lambda=0$, η ασύμπτωτη θα λέγεται οριζόντια[53].

2. Αν η συνάρτηση προσεγγίζει μία κατακόρυφη ευθεία (της μορφής $x=x_0$) για κάποιο x_0, τότε θα μιλούμε για *κατακόρυφη ασύμπτωτη*. Σε αυτήν την περίπτωση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:
   Ορισμός 11
   Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της f αν **τουλάχιστον** ένα από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

[53] Αυτή είναι μια διάκριση που κάνει το σχολικό βιβλίο.

4.4 Εύρεση ασυμπτώτων γραφικής παράστασης συνάρτησης

Για να βρούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f στις εξής περιπτώσεις:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

στις εξής περιπτώσεις:

- στα $\pm\infty$,
- στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της,
- στα x_0 στα οποία το όριο της f δεν υπάρχει ή υπάρχει και δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Παρατήρηση 8
Προφανώς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις ασύμπτωτες[54] και επίσης, δεν επιβάλλεται μία συνάρτηση να έχει ασύμπτωτες όλων των τύπων (και κατακόρυφες και πλάγιες και οριζόντιες). Αυτό θα φανεί και στα επόμενα παραδείγματα.

Θα δούμε τώρα ένα βασικό θεώρημα που θα κάνει την εύρεση πλαγίων ασυμπτώτων πιο εύκολη.
Θεώρημα 2
Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη κοντά στο $+\infty$ (αντίστοιχα, κοντά στο $-\infty$). Τότε, μία ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) **αν και μόνον αν** ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ (αντίστοιχα $x \to -\infty$) και
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$ (αντίστοιχα $x \to -\infty$).

Απόδειξη
Εφ' όσον έχουμε να αποδείξουμε μία ισοδυναμία (αν και μόνον αν), πρέπει να αποδείξουμε δύο κατευθύνσεις. Ξεκινάμε με το ευθύ.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Τότε, εξ ορισμού:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x - \beta) = 0.$$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - \lambda x - \beta$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και:

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \lambda x - \beta \Leftrightarrow g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \lambda = \frac{g(x)+\beta}{x}. \end{aligned}$$

Τώρα, παίρνοντας όρια στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \lambda\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\beta}{x} = \frac{0+\beta}{+\infty} = 0,$$

άρα:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

[54] Γιατί;

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta,$$

οπότε ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες.

($\Leftarrow$)Έστω ότι ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες, δηλαδή ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta\in\mathbb{R}.$$

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0.$$

Αυτό όμως είναι άμεσο, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0,$$

οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Άμεσο πόρισμα του παραπάνω είναι ότι, για να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση έχει ασύμπτωτες και, σε περίπτωση που έχει, να τις βρούμε, είναι να υπολογίσουμε τα όριο:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

και αν αυτό είναι ίσο με $\lambda\in\mathbb{R}$, να εξετάσουμε και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$$

και, αν και αυτό είναι ίσο με $\beta\in\mathbb{R}$ τότε να αποφανθούμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 39

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το όριο της f υπάρχει. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε τα $\pm\infty$ και 0 για την ύπαρξη ασυμπτώτων.

- Για το $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{+\infty}=1+0=1,$$

  επομένως $\lambda=1$. Για το δεύτερο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

  επομένως $\beta=0$ και, επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$, εργαζόμαστε ανάλογα και προκύπτει ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$.

- Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + (-\infty) = +\infty$$

οπότε και η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Παράδειγμα 40

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης: $f(x) = |x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}$, $x \neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε πρέπει να αναζητήσουμε ασύμπτωτες στα $\pm\infty$ και 0.

- Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}}{x} \overset{\substack{|x|=x\\ x>0}}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\eta\mu\, x}{x^2}\right) = \\ = 1 + 0 = 1,$$

αφού $-1 \leq \eta\mu\, x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \eta\mu\, x \leq \frac{1}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

άρα, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x^2} = 0.$$

Επομένως $\lambda = 1$. Για το άλλο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x} - x\right) \overset{\substack{|x|=x\\ x>0}}{=\!=\!=} \\ = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{\eta\mu\, x}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x} = 0.$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}}{x} \overset{\substack{|x|=-x\\ x<0}}{=\!=\!=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{x} + \frac{\eta\mu\, x}{x^2}\right) = \\ = -1 + 0 = -1,$$

αφού $-1 \leq \eta\mu\, x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \eta\mu\, x \leq \frac{1}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

άρα, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x^2} = 0.$$

Επομένως $\lambda = -1$. Για το άλλο όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \left(|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x} + x\right) \overset{\substack{|x|=x\\ x>0}}{=\!=\!=} \\ = \lim_{x\to-\infty} \left(-x + \frac{\eta\mu\, x}{x} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x} = 0.$$

Επομένως, η ευθεία $y = -x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

- Για το 0 υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$$

επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, άρα δεν έχουμε ασύμπτωτη.

Παράδειγμα 41
Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Από το πεδίο ορισμού της f είναι σαφές ότι θα αναζητήσουμε ασύμπτωτες στα σημεία $-1, 1$.

- Για το 1, υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Θέτουμε $y = 1 - x^2$, οπότε, αφού:

$$\lim_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 1 - 1 = 0,$$

έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = +\infty,$$

διότι $\sqrt{y} > 0$ κοντά στο 0 και $\lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt{y} = 0$. Επομένως η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

- Για το -1 εργαζόμαστε αναλόγως[55] και προκύπτει ότι η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

5 Ασκήσεις

5.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως *Σωστές ή Λανθασμένες* και, για όσες είναι σωστές, να αιτολογήσετε κατάλληλα, ενώ, για όσες είναι λανθασμένες, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

1. Αν $f(x) = \frac{1}{x-4}$, τότε, το όριο:
$$\lim_{x\to 4} f(x)$$
υπάρχει και είναι $+\infty$.

2. Το πεδίο ορισμού, D_f, της $f(x) = \varepsilon\varphi\, x$ έχει σημεία συσσώρευσης όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

3. Δεν υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x}.$$

[55] Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι η f είναι άρτια και υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ θέτοντας $y = -x$.

4. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε υπάρχουν και τα όρια:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x).$$

5. Υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

6. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε ούτε το όριο:
$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^2$$
υπάρχει.

7. Αν
$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2019,$$
τότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.

8. Το όριο:
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{1944}}{(x+1)^{2019}}$$
δεν υπάρχει.

9. Το όριο της συνάρτησης:
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x & x<0 \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} & x\geq 0,\end{cases}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

10. Αν τα όρια:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x)$$
δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο:
$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right).$$

11. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))$.

12. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

13. Αν $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τρεις συναρτήσεις τέτοιες ώστε:
    - $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ και
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$,

    τότε $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ή $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0.

14. Ισχύει ότι:
$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \text{ για κάθε } a>0.$$

15. Αν $f(4) = 2019$ και η f είναι ορισμένη κοντά στο 4, τότε:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 2019.$$

16. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x),$$

τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x).$$

17. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε ούτε το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)|$$

υπάρχει.

18. Δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

19. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

20. Αν $f(x) > 2019$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ υπάρχει, τότε:

$$\lim_{x\to 3} f(x) > 2019.$$

21. Αν $|f(x)| \leq 6$ για κάθε x κοντά στο -6, τότε υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to-6} (x+6)f(x).$$

22. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

23. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, τότε υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to 1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

24. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\eta\mu\, x)$ δεν υπάρχει για καμμία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

25. Αν $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| = 4$ τότε:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \text{ ή } \lim_{x\to 2} f(x) = -4.$$

26. Υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\text{συν}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\text{ημ}\,x\right).$$

27. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, τότε:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty \text{ ή } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=-\infty.$$

28. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ τότε:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

29. Για κάθε περιττή συνάρτηση:
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

30. Για κάθε άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(-x))=0.$$

5.2 Α΄ Ομάδα

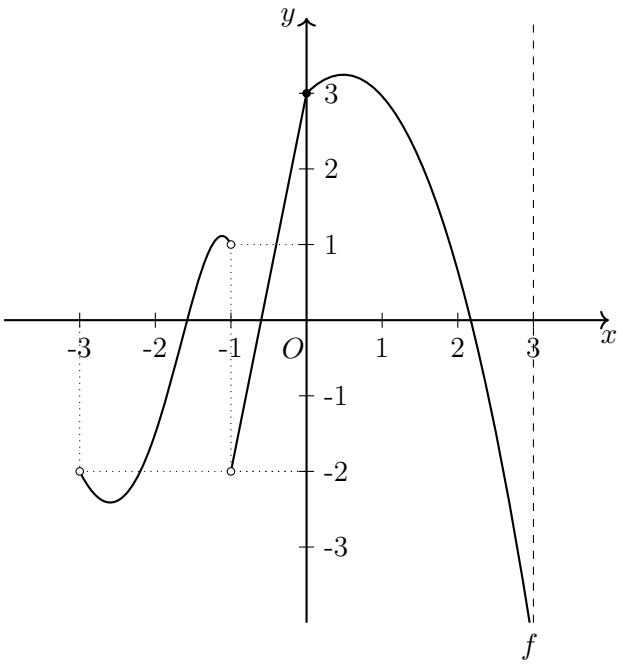
1. Να βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των παρακάτω συνόλων:
   (α΄) $(-4,7]$,
   (β΄) $(-\infty,3)\cup(4,9)$,
   (γ΄) $(0,1)\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$.

2. Έστω μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να δώσετε τιμές στην x έτσι ώστε αυτή να παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο 3, χωρίς όμως να τείνει στο 3 (δηλαδή $x\not\to 3$);

3. Μπορείτε να δώσετε τιμές σε μία μεταβλητή x έτσι ώστε αυτή να παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 1 και οσοδήποτε κοντά στο 2; Ισχύει $x\to 1$ ή $x\to 2$;

4. Αν $f:(-3,3)\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 23, να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:
   (α΄) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$,
   (β΄) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$,
   (γ΄) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,
   (δ΄) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$,

5. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to-\infty}\text{συν}\,x.$$



Σχήμα 23: Η συνάρτηση f

6. Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g, διαφορετικές μεταξύ τους, έτσι ώστε τα όρια:

$$\lim_{x\to 4} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 4} g(x)$$

να μην υπάρχουν αλλά το όριο:

$$\lim_{x\to 4}(f(x)-g(x))$$

να υπάρχει.

7. Σε αυτήν την άσκηση θα προσπαθήσουμε να δούμε πόσο «κακές» συναρτήσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε υπό την εξής έννοια: θα προσπαθούμε να βρούμε σε κάθε βήμα μία συνάρτηση που να μην έχει όριο σε όλο και περισσότερα σημεία.

   (α′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

   (β′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 2} f(x).$$

   (γ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει τα όρια:

$$\lim_{x\to k} f(x),$$

   για κανένα $k = 1, 2, \ldots, 100$.

   (δ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει τα όρια:

$$\lim_{x\to k} f(x),$$

   για κανένα $k \in \mathbb{N}$.

(ε′) Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, προσεγγιστικά.

(ϛ′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

να μην υπάρχει για κανένα $x_0 \in \mathbb{R}$; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

8. Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση f για την οποία να ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

και η $f(x)$ να μην είναι ούτε (μόνο) θετική ούτε (μόνο) αρνητική κοντά στο 0;

9. Μπορούμε να παραλείψουμε κάποια από τις υποθέσεις στο κριτήριο παρεμβολής;

10. Μπορείτε να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g και ένα $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ τέτοιες ώστε τα όρια:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

και

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lambda$$

να υπάρχουν αλλά να μην υπάρχει το όριο της σύνθεσής τους στο x_0:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x);$$

5.3 Β′ Ομάδα

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x \to 0} x^2 - 3x + 2,$$

(β′)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1},$$

(γ′)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2},$$

(δ′)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3},$$

(ε′)
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x}.$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x+1},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+1},$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}.$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-5x+6},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-3x+2},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+3x+2},$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2+5x+6},$$

(η′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x},$$

(ϑ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x^2-3x+2},$$

(ι′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^2+4x+3},$$

(ια′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-4x+7}-2}{x^2-x},$$

(ιβ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{x^2+x-2},$$

(ιγ′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{x^2-x-2},$$

(ιδ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+4x+7}-2}{x^2+3x+2}.$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-(x+1)}{x^2-4x+3},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+3x-5}-x-1}{x^2-3x+2},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x^2-2x+12}-x-2}{x^2+3x+2},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+9}-x-3}{x^2+4x},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x^3-2x+4},$$

(στ′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{2x^4-2x^3-5x^2+2x},$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^9+x^7+x^5+x^3+x^2+2019x},$$

(η′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-3x+6}-2}{2x^6-3x+1},$$

(θ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^3-2x-1},$$

(ι′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-2x+4}-x-1}{x^4-3x+2}.$$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2},$$

(β′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{x+5}-2},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{x+3}-1},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{3-x}-2},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}.$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-3}-2}{x^2-11x+10},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^3+5x^2},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\, x(1-\sigma\upsilon\nu\, x)}{x^2}.$$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4},$$

(β′)
$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^3+8},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-3x^2-9x+27}.$$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{|2-x|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\left|x^2-3x\right|+\left|x^2-4x+3\right|}{|x^2-5x+6|},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^3-3x^2+2x\right|+x-1}{2x^2-5x+3},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^4}.$$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to -\infty}-4x^3+3x^2-2x+6,$$

(β′)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^4+x^3+3x}{-7x^6+11x^3+2018},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3+2x^2+x+4}{7x^3+2x},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^7+4x^4-3x+1}{5x^6+4x^3+2},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x+7},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{4x^1+4}.$$

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2-7}-x+1}{\sqrt{3-x}-1},$$

(β′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-1}{x^3-2x+1},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|-x^2+6x-9}{|3x-x^2|},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^{2018}x}{x^{2020}},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^4-2x^3+2x-1},$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+2x+1},$$

(η′)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^{16}+2x^8+4x^4+8x^2+16}{4x^{17}+3x+1},$$

(ϑ′)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3+2x^2+4x+x^{\ln 2}+e}{4x^3+7x^2+6},$$

(ι′)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x+5^x+4^{2x}}{3^x+6^x},$$

(ια′)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+e^x+2^{3x}}{e^x+6^x+1},$$

(ιβ′)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4x+3}},$$

(ιγ′)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}},$$

(ιδ′)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{3x-\sqrt{9x^2+x+1}},$$

(ιε′)
$$\lim_{x\to+\infty}\eta\mu\,\frac{1}{x^2}.$$

11. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1}{\frac{x-1}{x}-1},$$

(β′)
$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{x},$$

(γ′)
$$\lim_{x\to-1}\frac{\eta\mu(x+1)}{x+1},$$

(δ′)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}},$$

(ε′)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(\frac{x^3-3x+3}{x^4-6x^2+3})-1}{\frac{x^3-3x+3}{x^4-6x^2+3}},$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2^{3x}+3^x+5^x}{e^x+2^x+4^{2x}}},$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{(x-1)^8}+\frac{5}{(x-1)^6}-\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^2}-2}{\frac{2}{(x-1)^8}+\frac{1}{(x-1)^6}-\frac{2016}{(x-1)^4}++3}.$$

12. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το όριο:
$$\lim_{x\to x_0}f(x),$$
για το αντίστοιχο x_0:

(α′)
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x-1}=0,\ \text{για}\ x_0=0,$$

(β′)
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x+1}{x^2-1}=2,\ \text{για}\ x_0=1,$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-f(x)}{x^3-2x+1}=2019,\ \text{για } x_0=1,$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\eta\mu x}{x}}{x^{2019}+x^{2018}+\cdots+x^2+x}=-1,\ \text{για } x_0=0,$$

(ε′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)-x^2-1}{\sqrt{x}-1}=1,\ \text{για } x_0=0,$$

(ϛ′)
$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+1)-2x+1}{x^2-x-2}=0,\ \text{για } x_0=0,$$

(ζ′)
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-1)-x^2+1}{x^2+2x-8}=2019,\ \text{για } x_0=1,$$

(η′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-\sigma\upsilon\nu x+e^x}{x^2-x+1}=2,\ \text{για } x_0=1,$$

(ϑ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)f(x)+1-\eta\mu x^2}{\sqrt{x}+\ln(x+1)}=2019,\ \text{για } x_0=0,$$

(ι′)
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)f(2x-5)-x\sqrt[3]{x}}{x^2-4x+3}=1,\ \text{για } x_0=1,$$

(ια′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)+2}{(x-1)f(x)+1-x^2}=e,\ \text{για } x_0=1,$$

(ιβ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(2)x^3+1}{f(0)x^2-xf(x)}=-2,\ \text{για } x_0=0,$$

(ιγ′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-2)-x^2+1}{x^2-2018x+2019}=f(2),\ \text{για } x_0=-1.$$

13. Να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο όριο:

(α′)
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x},\ \text{αν}\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}=2018,$$

(β′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ \text{αν}\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x\,\sigma\upsilon\nu x-x}=\pi,$$

(γ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2},\ \text{αν}\ |f(x)-x\eta\mu x|\leq \epsilon\varphi^2\, x,$$

(δ′)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ \text{αν}\ \left|xf(x)-\eta\mu(2x^2)\right|\leq \frac{x^2}{\ln x}.$$

5.4 Γ′ Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x-2)^3$.
   (α′) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφή της.
   (β′) Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.
   (γ′) Να υπολογίσετε το όριο:
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{f(x)+f^{-1}(x)}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+x+1$.
   (α′) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
   (β′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.
   (γ′) Να υπολογίσετε τα όρια:
   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \text{και}\ \lim_{x\to-\infty}f(x).$$
   (δ′) Μπορείτε να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική της παράσταση;
   (ε′) Να υπολογίσετε το όριο:
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x^2)}.$$

3. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=e^{\frac{x^3+1}{x^3+2}}$.
   (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
   (β′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
   (γ′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την ανίστροφό της.
   (δ′) Να βρείτε το πεδίο τιμών της f.
   (ε′) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:
   $$\lim_{x\to\sqrt{e}}f^{-1}(x),$$
   $$\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x)).$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ και $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\eta\mu x}$.
   (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να βρείτε το μεγαλύτερο $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f να είναι αντιστρέψιμη στο διάστημα $[0, a]$. Ποια είναι η αντίστροφή της σε αυτήν την περίπτωση;

(δ′) Να λύσετε την εξίσωση:
$$f(\ln(g(x))) = 1.$$

(ε′) Να βρείτε ένα μέγιστο της f.

(ϛ′) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^x+1}$.

(α′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(β′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφό της.

(γ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ′) Να υπολογίσετε τα όρια:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

(ε′) Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική παράσταση της f.

(ϛ′) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} \eta\mu\left(f(x) - e\right).$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:
$$f(x) = \frac{\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) + 1}.$$

(α′) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

(β′) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(δ′) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to 0^+} e^{f(x)}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+\ln x}{\ln x}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β′) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τοην αντίστροφό της.

(δ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(ε′) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

ii. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$,

iii. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$,

iv. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

(στ′) Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική παράσταση της f.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x+2019}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β′) Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

(δ′) Υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x);$$

9. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί την ανισότητα:

$$x+1\leq f(x)\leq e^x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(α′) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

(β′) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^{2018}+x^{2017}+\ldots+x+1}{x^{2019}+x^{2018}+\ldots+x+1}\right).$$

Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$x^2\,\eta\mu\,\frac{1}{x}\leq g(x)\leq x^2, \text{ για κάθε } x\neq0,$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x).$$

10. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\ln\left((f(x))^3+f(x)+1\right)=x^3+x+1.$$

(α′) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

(β′) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι όλες οι ρίζες της f είναι ακριβώς οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^3+x+1=0.$$

(δ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),$$

αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to0} g^{-1}(x)=0$, όπου $g(x)=x^3+x+1$.

5.5 Δ΄ Ομάδα

1. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (α΄) Να δείξετε ότι, αν η f είναι άρτια, το όριο

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

   υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

   $$\lim_{x \to -x_0} f(x)$$

   και μάλιστα:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to -x_0} f(x).$$

   (β΄) Να δείξετε ότι, αν η f είναι περιττή, το όριο

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

   υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

   $$\lim_{x \to -x_0} f(x)$$

   και μάλιστα:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\lim_{x \to -x_0} f(x).$$

   (γ΄) Να δείξετε ότι, αν η f είναι περιοδική με περίοδο T, το όριο

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

   υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

   $$\lim_{x \to x_0 + kT} f(x),$$

   για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + kT} f(x).$$

2. Έχουμε δει ότι μία 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνεπαγωγή:

   $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \text{ για κάθε } x, y \in A.$$

   Ισχύει άραγε κάτι ανάλογο για τα όρια της συνάρτησης; Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, 1-1, τέτοια ώστε να υπάρχουν $x_0 \neq y_0$ σημεία συσσώρευσης του A με

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to y_0} f(x);$$

   Αν ναι, δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης, αν όχι αποδείξτε το. Μπορείτε να το ερμηνεύσετε γραφικά;

3. Μπορείτε να βρείτε μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχουν $x_0 < y_0$ σημεία συσσώρευσης του A με:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to y_0} f(x);$$
Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

4. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
και, επιπρόσθετα, υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
(α′) Να βρείτε το $f(0)$.
(β′) Να δείξετε ότι $f(x - y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(γ′) Να δείξετε ότι το όριο:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και, μάλιστα, ισχύει ότι:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda.$$

5. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x + y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
και, επιπρόσθετα, υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
(α′) Να βρείτε το $f(0)$.
(β′) Να δείξετε ότι $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(γ′) Να δείξετε ότι το όριο:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και, μάλιστα, ισχύει ότι:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f(x_0).$$

6. Αν για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνωρίζετε ότι το όριο:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:
(α′) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(β′) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα τότε να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,$$

για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

(γ′) Αν, αντιθέτως, γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0,$$

για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

7. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f(x))^5+f(x)+3=x,\text{ για κάθε }x\in\mathbb{R}.$$

Έστω επίσης $g(x)=x^5+x+3$.

(α′) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

(β′) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(γ′) Να βρείτε το $f(3)$.

(δ′) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x)=0.$$

(ε′) Αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}.$$

8. Είπαμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_0. Αλλά πόσο κοντά; Για να δούμε...

(α′) Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

(β′) Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

(γ′) Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{200}\right)\cup\left(\frac{1}{200},+\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

(δ′) Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{45{,}698}\right)\cup\left(\frac{1}{45{,}698},+\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

(ε′) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

για κάποιο $a > 0$, κοντά[56] στο 0

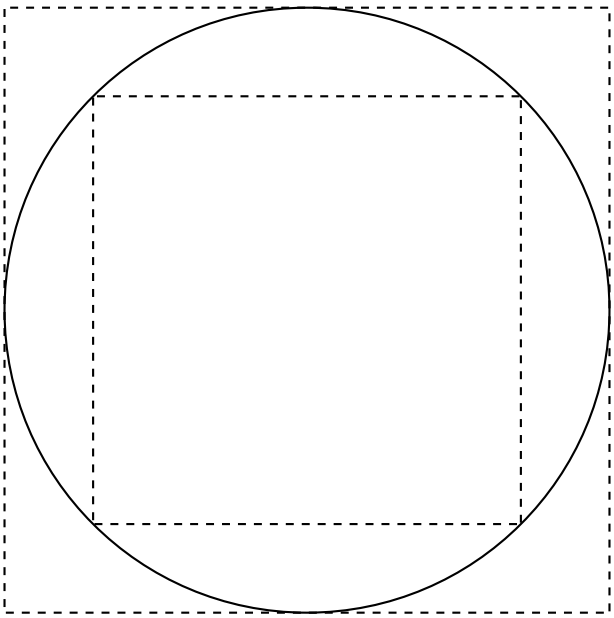
9. Ας δούμε λίγο ένα πρόβλημα από τα παλιά, πριν κλείσουμε τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου. Υπάρχουν πολλά σχήματα των οποίων το εμβαδόν δεν είναι υπολογίσιμο από κάποιον διαισθητικά προφανή τύπου. Για παράδειγμα, ενώ για τα εμβαδά του ορθογωνίου, του τετραγώνου ή ενός τριγώνου είναι εύκολο να ερμηνεύσουμε τους τύπους, διαισθητικά τουλάχιστον, αυτόν του κύκλου δεν το βλέπουμε να φαίνεται στον ορίζοντα. Για την ακρίβεια, ο τύπος[57]:

$$E = \pi \rho^2,$$

έχει αυτή τη μυστήρια σταθερά π, η οποία δεν είναι, μάλλον, κάτι που θα το σκεφτόταν ο καθένας. Αλλά, στα πιο παλιά χρόνια, τα περίεργα εμβαδά, δεν τα υπολόγιζαν ακριβώς έτσι.

Στην αρχαία Ελλάδα, χρησιμοποιούνταν μία μέθοδος για τον υπολογισμό περίεργων εμβαδών που λεγόταν *Μέθοδος της Εξάντλησης*. Αυτή η μέθοδος, με αυτό το πολύ φαντεζύ όνομα, βασιζόταν σε μία «εξαντλητική» διαδικασία που είχε ως εξής (θα την εφαρμόσουμε σε ένα κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$):

- Σχεδιάζουμε τον κύκλο και έπειτα βρίσκουμε ένα άλλο γεωμετρικό σχήμα του οποίου να ξέρουμε το εμβαδόν και το εγγράφουμε και το περιγράφουμε στον κύκλο[58], όπως φαίνεται και στο σχήμα 24 (εμείς επιλέξαμε τετράγωνα).



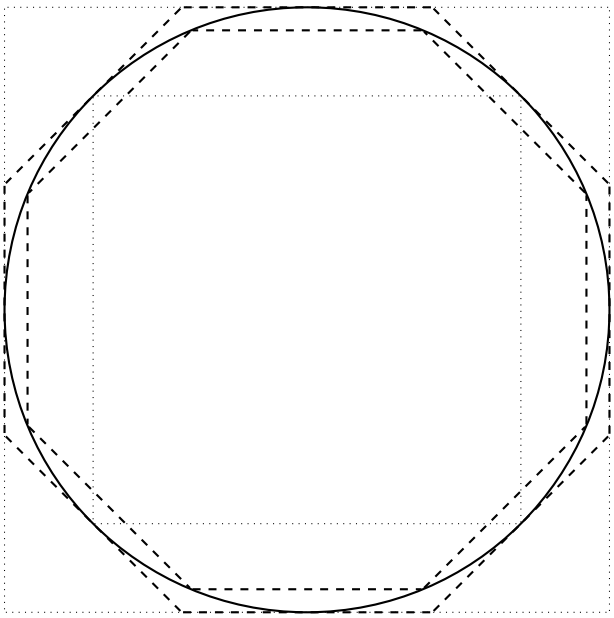
Σχήμα 24: Το πρώτο βήμα της εξάντλησης

- Στη συνέχεια, αφού υπολογίσουμε το εμβαδόν των τετραγώνων, «σπάμε» κάθε πλευρά και σχεδιάζουμε δύο κανονικά *οκτάγωνα*, το ένα εγγεγραμμένο στον κύκλο και το άλλο περιγεγραμμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα 25.

[56] Κάνουμε άσκηση για να δούμε τι πάει να πει κοντά και χρησιμοποιούμε την έννοια του κοντά; Είμαστε σοβαροί; Πάρ' τε το σαν κακό αστείο...

[57] Όποιος πει ότι δεν τον θυμόταν, μαύρο φίδι που τον έφαγε!

[58] Δηλαδή το σχεδιάζουμε από μέσα έτσι ώστε να ακουμπάνε οι κορυφές στον κύκλο και από έξω έτσι ώστε να ακουμπάνε οι πλευρές στον κύκλο.



Σχήμα 25: Το δεύτερο βήμα της εξάντλησης

- Αφού υπολογίσουμε τα δύο εμβαδά, συνεχίζουμε ξαναδιχοτομώντας τα οκτάγωνα σε δεκαεξάγωνα κ.ο.κ..
- Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι, όσο προχωράμε στη διαδικασία τα εγγεγραμμένα και τα περιγεγραμμένα πολύγωνα «προσεγγίζουν» τον κύκλο μας και, ως εκ τούτου, και τα εμβαδά τους θα προσεγγίζουν το εμβαδόν του κύκλου. Άρα, αφού δείξουμε ότι τα «μέσα» και τα «έξω» εμβαδά προσεγγίζουν τον ίδιο αριθμό, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτός ο αριθμός είναι το εμβαδόν του κύκλου[59].

Ας δούμε τώρα και τι ζητάει αυτή εδώ η άσκηση:

(α΄) Σε πρώτο επίπεδο, συμφωνείτε με την ιδέα ότι, αφού τα σχήματα «πλησιάζουν» τον κύκλο, το ίδιο θα κάνουν και τα εμβαδά τους; Αναπτύξτε την απάντησή σας σε μία παράγραφο.

(β΄) Έπειτα, γιατί χρειάζονταν σχήματα και από «μέσα» και από «έξω»; Ποια πιστεύετε ότι ήταν η αιτία που το έκαναν αυτό οι αρχαίοι μαθηματικοί; Σας θυμίζει η όλη διαδικασία κάτι από αυτό το κεφάλαιο;

(γ΄) Μπορείτε να αποδώσετε την παραπάνω διαδικασία με τους όρους, τις έννοιες και τα σύμβολα που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο ($\lim, \to$ κ.λπ.);

10. Ποια από τα προβλήματα του πρώτου κεφαλαίου μπορείτε να λύσετε ή, έστω, να τα πάτε λίγο παρακάτω, τώρα;

[59] Και να φανταστείτε ότι αυτό που εμείς εδώ το λέμε με λόγια, ο Εύδοξος και η παρέα του το έκαναν μόνο με γεωμετρία και πολύ αυστηρά, μάλιστα.

Κατάλογος Σχημάτων

1 Η θέση του a_μ . . . 7
2 Λιγότερο «τακτοποιημένες» τιμές . . . 8
3 Το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του A . . . 9
4 Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ . . . 14
5 Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ . . . 15
6 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) - f(x) = x^2 - x$. . . . 17
7 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) - g(x) = x - x^2$. . . . 18
8 Η συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. . . . 21
9 Το κριτήριο παρεμβολής — $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. . . . 22
10 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . . . 23
11 Οι εκθετικές συναρτήσεις . . . 26
12 Οι λογαριθμικές συναρτήσεις . . . 26
13 Δύο ακόμα γνωστά όρια . . . 28
14 Η συνάρτηση $x^2\,\eta\mu\frac{1}{x}$ . . . 47
15 Η γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - e^{1-x}$ . . . 56
16 Η γραφική παράσταση της $g(x) = e^{-x}\,\eta\mu\,x$ . . . 57
17 Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$ . . . 57
18 Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$ με την ευθεία $y = x - 1$. . . . 58
19 Η γραφική παράσταση της $s(x) = e^{-x}\,\sigma\upsilon\nu\,x + x$ με την ευθεία $y = x$. . . . 58
20 Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x^2$. . . . 59
21 Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x-1}$. . . . 59
22 Η γραφική παράσταση της f. . . . 60
23 Η συνάρτηση f . . . 68
24 Το πρώτο βήμα της εξάντλησης . . . 83
25 Το δεύτερο βήμα της εξάντλησης . . . 84

Κατάλογος Πινάκων

1 Άλγεβρα των ορίων . . . 16
2 Πράξεις με τα άπειρα . . . 18
3 Πράξεις με αριθμούς και άπειρα . . . 19
4 Όλες οι απροσδιόριστες μορφές που θα μας απασχολήσουν. . . . 19
5 Πηλίκα που «μοιάζουν» αλλά δεν είναι απροσδιοριστίες . . . 20
6 Πίνακας της $f(x) = \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$ . . . 33