

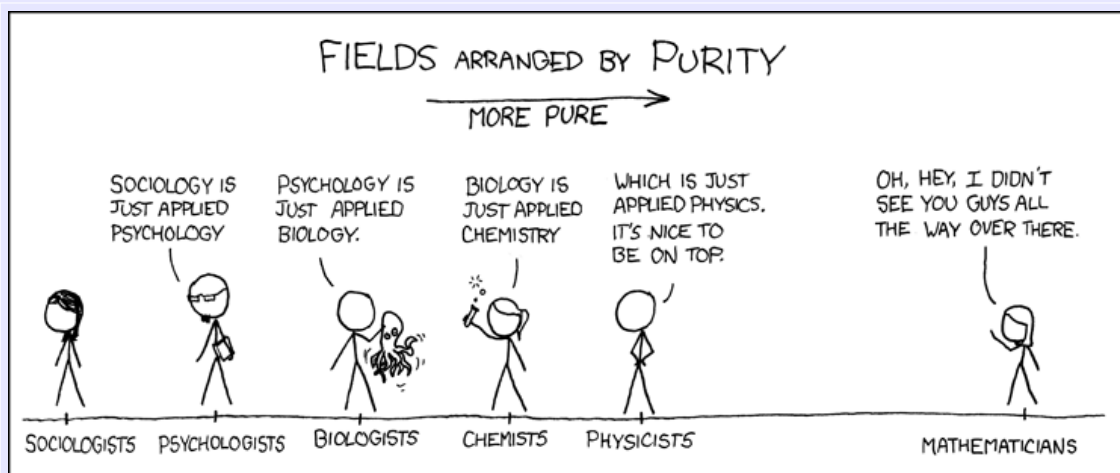
After – maths

Πρόχειρες σημειώσεις και ασκήσεις στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

της Γ' Λυκείου

Κεφάλαιο 1^ο: Συναρτήσεις



ΑΘΗΝΑ 2019

Πρόχειρη έκδοση (αναθεωρημένη)

Γεμάτη λάθη

Περιεχόμενα

Αντί προλόγου	5
1 Μερικά προβλήματα...	6
2 Η έννοια της συνάρτησης	11
2.1 Ο ορισμός της συνάρτησης — Πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής	11
2.1.1 Πεδίο ορισμού συνάρτησης	14
2.1.2 Σύνολο τιμών συνάρτησης	17
2.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης	18
2.3 Άλλες πληροφορίες που μας δίνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης για την ίδια τη συνάρτηση	20
2.3.1 Το (ακριβές) σύνολο τιμών της f	20
2.3.2 Το $f(0)$	21
2.3.3 Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και γενικότερα της εξίσωσης $f(x) = c$ για $c \in \mathbb{R}$	22
2.4 Χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης - Γνωστές συναρτήσεις	23
2.4.1 Σταθερή συνάρτηση	23
2.4.2 Γραμμική συνάρτηση	24
2.4.3 Η συνάρτηση απόλυτη τιμή	24
2.4.4 Παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$	24
2.4.5 Τμήμα παραβολής με κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$	25
2.4.6 Κυβική καμπύλη με κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$	26
2.4.7 Ισοσκελής υπερβολή	26
2.4.8 Ημιτονοειδής καμπύλη	26
2.4.9 Συνημιτονοειδής καμπύλη	27
2.4.10 Καμπύλη εφαπτομένης	27
2.4.11 Εκθετική συνάρτηση	27
2.4.12 Λογαριθμική συνάρτηση	27
2.5 Εποπτική ερμηνεία του ορισμού της συνάρτησης	28
3 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων — Διάταξη συναρτήσεων	32
3.1 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων	33
3.2 Διάταξη συναρτήσεων	33
3.3 Σύνθεση συναρτήσεων: μία «διαφορετική» πράξη μεταξύ συναρτήσεων	34
3.4 Σύνθεση και γραφική παράσταση — Μεταφορές και Συμμετρίες	37
3.4.1 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρτηση $g(x) = x + c$, για $c \in \mathbb{R}$	37
3.4.2 Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = x - c$ με μία συνάρτηση f , για $c \in \mathbb{R}$	39
3.4.3 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με την συνάρτηση $g(x) = -x$	39
3.4.4 Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = -x$ με μία συνάρτηση f	41
3.4.5 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρτηση $g(x) = x $	41
3.4.6 Η σύνθεση της $g(x) = x $ με μία συνάρτηση f	42
3.5 Συμμετρικές συναρτήσεις — Άρτιες και περιττές συναρτήσεις	47
3.5.1 Άρτιες συναρτήσεις	47
3.5.2 Περιττές συναρτήσεις	48
3.6 Περιοδικές συναρτήσεις	49
4 Μονοτονία και ακρότατα συναρτήσεων	50
4.1 Μονοτονία συναρτήσεων	51

4.2	(Τοπικά) ακρότατα συνάρτησης	52
5	Συναρτήσεις 1-1 — Αντίστροφη συνάρτηση	57
5.1	Εποπτική ερμηνεία της 1-1 ιδιότητας	59
5.2	Αντίστροφη συνάρτηση	59
5.3	Εύρεση της αντίστροφης μίας συνάρτησης — Εύρεση συνόλου τιμών μίας συνάρτησης	61
5.4	Γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης	62
5.5	Αντίστροφη συνάρτηση και μονοτονία	65
5.6	Σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}	65
6	Δύο βασικές εφαρμογές της μονοτονίας και της 1-1 ιδιότητας	67
6.1	Επίλυση εξισώσεων με τη χρήση της 1-1 ιδιότητας	67
6.2	Επίλυση ανισώσεων με τη χρήση της μονοτονίας	68
7	Ασκήσεις	69
7.1	Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους	69
7.2	Α΄ Ομάδα	71
7.3	Β΄ Ομάδα	76
7.4	Γ΄ Ομάδα	79

Αντί προλόγου

Ποτέ δεν κατάλαβα γιατί αποκαλούμε «αντί προλόγου» το εισαγωγικό σημείωμα ενός βιβλίου και τελικά καταλήγουμε να γράφουμε έναν τυπικό πρόλογο για αυτό, αλλά, αφού το κάνουν όλοι, ποιος είμαι εγώ να πάω κόντρα. Λοιπόν, σε αυτόν τον «αντιπρόλογο», θα εξηγήσουμε γιατί και πώς έχετε καταλήξει να κρατάτε αυτό εδώ το έντυπο στα χέρια σας.

Αρχικά, το πιο πιθανό είναι να μην κρατάτε το ίδιο το έγγραφο στα χέρια σας, μιας και ο κύριος τρόπος διάθεσης αυτού του υλικού είναι σε ηλεκτρονική μορφή (δε μας φταίνει κάτι τα δέντρα στον Αμαζόνιο). Όπως και να έχει, τι είναι αυτό που πρόκειται, καλώς εχόντων των πραγμάτων, να διαβάσετε. Όπως λέει και στο εξώφυλλο, στις επόμενες σελίδες θα βρείτε «Πρόχειρες σημειώσεις και ασκήσεις στα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ' Λυκείου». Οι σημειώσεις βασίζονται, κατά κύριο λόγο, στην ύλη του σχολικού βιβλίου της Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, με αρκετές, βεβαίως, προσθήκες και «παρεκβάσεις» όπου αυτό κρίθηκε αναγκαίο, αλλά και με αρκετά περισσότερα παραδείγματα και σχήματα. Σε ό,τι έχει να κάνει με τις ασκήσεις, αυτές «πατάνε» πάνω στην ύλη όπως αυτή αναπτύσσεται στις επόμενες ενότητες των σημειώσεων, χωρίς όμως να περιορίζονται σε αυτήν.

Αυτό που σίγουρα δεν είναι αυτές οι σημειώσεις είναι ένα υποκατάστατο του σχολικού βιβλίου, ειδικά για όσους διαβάζουν για να συμμετέχουν στις πανελλήνιες εξετάσεις. Ο ρόλος τους είναι συμπληρωματικός και υποστηρικτικός, έτσι ώστε να βοηθήσουν στην βαθύτερη κατανόηση της ύλης που μελετάται σε αυτήν την τάξη και να παρέχουν υλικό προς εξάσκηση. Αυτή ακριβώς η φύση τους, καθορίζει και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να μελετά αυτό το υλικό. Ξεκινώντας από τις σημειώσεις και τις έννοιες που εξετάζονται, μπορεί κανείς, να προχωρά στην επίλυση κάποιων σχετικών ασκήσεων από το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, έπειτα να συνεχίζει τη μελέτη της ύλης από το μέρος των σημειώσεων, να επιλύει κάποιες σχετικές ασκήσεις και να συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο.

Ειδικότερα, σε αυτό το κεφάλαιο καλύπτεται το πρώτο μέρος της ύλης που αφορά τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων (ορισμός, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, γραφική παράσταση, μονοτονία, ακρότατα, «1-1», αντίστροφη συνάρτηση) και μία κατά το δυνατόν αναλυτική παρουσίασή τους. Έχει γίνει προσπάθεια να περιέχονται όσο το δυνατόν περισσότερες αποδείξεις των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται, ακόμα και αν αυτές δεν εμπίπτουν στην εξεταστέα ύλη, για να έχει τη δυνατότητα όποιος ενδιαφέρεται να τις μελετήσει. Επίσης, για την ευκολότερη κατάκτηση της παρουσιαζόμενης ύλης, συμπληρωματικά μπορεί κανείς να συμβουλευτεί και τις διαφάνειες των μαθημάτων που αντιστοιχούν στην εν λόγω ύλη, οι οποίες βρίσκονται αναρτημένες στον ιστότοπο <https://aftermathsgr.wordpress.com/> (στην ενότητα του [διδαχτικού υλικού](#)), καθώς και στην αντίστοιχη σελίδα στο [Slideshare](#).

Καλό διάβασμα!

1 Μερικά προβλήματα...

Πριν ξεκινήσουμε την παρουσίαση της ύλης, παραθέτουμε μερικά προβλήματα τα οποία είναι και σε μεγάλο βαθμό η αφορμή για να ασχοληθούμε με τα φετινά μαθηματικά.

Πρόβλημα 1

Σας δίνονται 1000 μέτρα συρματοπλέγματος, τέσσερις πάσσαλοι και μία πολύ μεγάλη έκταση. Ο ιδιοκτήτης αυτής της έκτασης σας λέει ότι έχετε μία ευκαιρία να περιφρέξετε μία περιοχή σχήματος ορθογωνίου με όποιον τρόπο θέλετε και να πάρετε την έκταση που θα περιφράξετε. Θεωρώντας ότι δε θα πληρώνετε Εν.Φ.Ι.Α. για αυτήν την έκταση¹, πώς πρέπει να διατάξετε τους πασσάλους και το συρματοπλέγμα;

Πρόβλημα 2

Πόσο κάνουν τα ακόλουθα αθροίσματα με άπειρους όρους:

1. $1 + 1 + 1 + \dots$,
2. $0 + 0 + 0 + \dots$,
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$,
4. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$,
5. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$;
6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots$;

Αν δεν μπορείτε να τα υπολογίσετε ακριβώς, μπορείτε να βρείτε αν είναι πεπερασμένα ή άπειρα;

Πρόβλημα 3

Έχει λύσεις η εξίσωση:

$$x^5 + x + 1 = 0;$$

Αν ναι, πόσες λύσεις έχει;

Γνωρίζουμε πώς να λύνουμε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού και, μάλιστα, με σχετική άνεση. Υπάρχουν επίσης και τύποι για τις εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού οι οποίοι, βεβαίως, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Τι γίνεται όμως με εξισώσεις πέμπτου ή μεγαλύτερου βαθμού, όπως αυτή εδώ; Για κακή μας τύχη, υπάρχει ένα θεώρημα, των Abel-Ruffini, το οποίο μας λέει ότι για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5 δεν μπορούμε να βρούμε τις λύσεις τους, αν υπάρχουν, μέσα από τους συντελεστές της εξίσωσης, όπως κάναμε και για τις εξισώσεις μέχρι και τετάρτου βαθμού. Με άλλα λόγια, το θεώρημα μας λέει ότι δεν υπάρχει τύπος για τις λύσεις τέτοιων εξισώσεων. Ωστόσο, πολλές φορές, αν είμαστε «τυχεροί» μπορεί κάποια ρίζα να «φαίνεται», όπως στην εξίσωση:

$$x^5 + x = 0$$

όπου μία προφανής ρίζα είναι το 0 και μάλιστα είναι και μοναδική, αφού:

$$x^5 + x = x(x^4 + 1)$$

και $x^4 + 1 > 0$, άρα, πράγματι, η εξίσωση δεν έχει άλλες λύσεις. Όμως, στην περίπτωση της δοσμένης εξίσωσης, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά...

¹Αρα δεν έχετε λόγο να μην πάρετε τη μεγαλύτερη έκταση που μπορείτε.

Πρόβλημα 4

Υπάρχει κλειστό σχήμα το οποίο να έχει εμβαδόν ίσο με $10m^2$ και άπειρη περίμετρο; Αν υπάρχει, μπορείτε να το σχεδιάσετε; Αν όχι, γιατί;

Πρόβλημα 5 «(Αντίστροφο» του προηγούμενου)

Υπάρχει κλειστό σχήμα το οποίο να έχει περίμετρο $10m$ και άπειρο εμβαδόν; Αν υπάρχει, μπορείτε να το σχεδιάσετε; Αν όχι, γιατί;

Πρόβλημα 6

Είδαμε στα μαθηματικά προσανατολισμού της Β' Λυκείου ότι το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

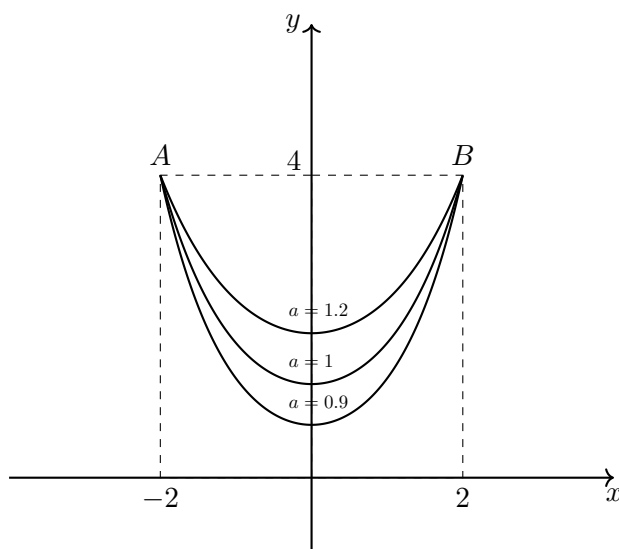
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Τι γίνεται όμως αν θέλουμε να βρούμε το μήκος μίας τυχούσας καμπύλης που συνδέει δύο σημεία; Για παράδειγμα, ας πάρουμε μία εύκαμπτη αλυσίδα και ας την κρεμάσουμε στα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 4)$. Τότε η αλυσίδα θα έχει ένα σχήμα που περιγράφεται ακριβώς από την εξίσωση:

$$y = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά της αλυσίδας (γραμμική μάζα και τάσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στους «κρίκους» της αλυσίδας). Μπορούμε, λοιπόν, να βρούμε το μήκος της αλυσίδας με μόνο δεδομένο το σχήμα της κρεμασμένης αλυσίδας;

Στο σχήμα 1 φαίνεται η εν λόγω καμπύλη για τρεις διαφορετικές τιμές του $a > 0$.



Σχήμα 1: Τρεις αλυσίδες

Η παραπάνω καμπύλη ονομάζεται **αλυσσοειδές** και εμφανίζεται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή. Για παράδειγμα, τα καλώδια που κρέμονται ανάμεσα στους μεγάλους πυλώνες ηλεκτρισμού έχουν ένα τέτοιο σχήμα, όπως επίσης και η αλυσίδα της άγκυρας που ρίχνει ένα πλοίο στη θάλασσα, όταν η άγκυρα φτάσει στον βυθό. Η ίδια καμπύλη παρουσιάζεται, επίσης, στους ιστούς των αραχνών, σε κρεμαστές γέφυρες και, ανεστραμμένη, σε πολλές εκκλησίες και άλλα κτήρια ιδιαίτερης αρχιτεκτονικής και αισθητικής αξίας.

Στο εύλογο ερώτημα, γιατί όλα αυτά δε μένουν απλά σε μία ευθεία γραμμή αλλά ακολουθούν τέτοιες καμπύλες, δεν μπορούμε να δώσουμε εύκολα απάντηση, ακόμα και με τα εργαλεία που θα αναπτύξουμε μέσα στη χρονιά. Μία διαισθητική ερμηνεία όμως, είναι η ακόλουθη: Η αλυσίδα

«θέλει» να έχει την ελάχιστη ενέργεια στην κατάσταση ισορροπίας της, επομένως πρέπει να βρει τον συνδυασμό που θα ελαχιστοποιεί το άθροισμα της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης της αλυσίδας. Επομένως, δε γίνεται να έχει μηδενική παραμόρφωση γιατί γίνεται ιδιαίτερα μεγάλη η βαρυτική δυναμική ενέργεια, άρα πρέπει να «λυγίσει» λίγο.

Πρόβλημα 7 (Αστικός σχεδιασμός)

Στη βιομηχανική ζώνη μιας πόλης, υπάρχουν δύο εργοστάσια, στις θέσεις A, B , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 18 χλμ. Το εργοστάσιο A εκπέμπει αέριους ρύπους συγκέντρωσης 80ppm ημερησίως, ενώ το εργοστάσιο B συγκέντρωσης² 720ppm ημερησίως. Θεωρήστε ότι οι ρύποι διαδίδονται ομοιόμορφα στον χώρο γύρω από τα εργοστάσια και ότι οι ρύποι που φτάνουν σε κάθε σημείο έχουν πυκνότητα αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από το αντίστοιχο εργοστάσιο. Γύρω από το εργοστάσιο A υπάρχει μία περιοχή ακτίνας 1 χλμ στην οποία απαγορεύεται η δόμηση ενώ γύρω από το εργοστάσιο B αυτή η ζώνη έχει ακτίνα 2 χλμ. Αν έχετε την επιλογή να αγοράσετε ένα οικόπεδο για να χτίσετε ένα σπίτι πάνω στον (ευθύγραμμο) δρόμο που συνδέει τα A, B , σε ποιο σημείο θα το χτίζατε; Για ποιον λόγο;

Πρόβλημα 8 (Βήχας)

Πόσο γρήγορα «τρέχει» ο αέρας όταν βήχουμε; Αρχικά, ας δούμε πώς λειτουργεί ο μηχανισμός του βήχα στον άνθρωπο. Όταν κάποιος βήχει, συνήθως με σκοπό να διώξει κάτι από την τραχεία έτσι ώστε να μην περάσει στους πνεύμονες ή, εν γένει, να αποβάλλει κάτι από το αναπνευστικό του σύστημα, αυτό που συμβαίνει είναι να στενεύει η τραχεία (η οδός που οδηγεί τον αέρα προς και από τους πνεύμονες) με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ταχύτητα του αέρα που διέρχεται από αυτή. Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι, αν $v(r)$ είναι η ταχύτητα του αέρα που περνά από την τραχεία και r η ακτίνα της τραχείας, τότε ισχύει η σχέση:

$$v(r) = ar^2(r_0 - r)$$

όπου r_0 είναι η φυσιολογική ακτίνα της τραχείας και το a μία θετική σταθερά. Θεωρώντας ότι, προφανώς, το r είναι θετικό και ότι $r \leq r_0$, μιας και η τραχεία δεν μπορεί να διογκωθεί, να βρείτε την ακτίνα που πρέπει να αποκτήσει η τραχεία έτσι ώστε ο αέρας να περνά μέσα από την τραχεία με τη μέγιστη ταχύτητα.

Πρόβλημα 9 (Μέγιστο κέρδος)

Ο κύριος Τάδης Δεινόπουλος έχει μία επιχείρηση με φθηνά φωτιστικά. Έχει υπολογίσει ότι όταν παράγει q χιλιάδες φωτιστικά μέσα σε έναν μήνα, τότε αυτά θα πωληθούν σε μία τιμή που δίνεται από τη σχέση:

$$p(q) = 22.2 - 1.2q \text{ € ανά φωτιστικό.}$$

Το συνολικό κόστος παραγωγής αυτών των q χιλιάδων μονάδων δίνεται από τη σχέση:

$$C(q) = 0.4q^2 + 3q + 40 \text{ χιλιάδες €}.$$

Πόσα φωτιστικά πρέπει να παράξει ο κύριος Δεινόπουλος έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του; Πόσα πρέπει να παράξει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του; Πόσα πρέπει να παράξει για να ελαχιστοποιήσει το κατά μονάδα κόστος:

$$A(q) = \frac{C(q)}{q};$$

Είναι ίδια αυτά τα τρία νούμερα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 10 (Ο κανόνας του Merton)

Στο κολλέγιο του Merton της Οξφόρδης, στην Αγγλία, κατά τον 14^ο αιώνα, ξεκίνησαν να διαμορφώνονται πολλές από τις ιδέες και τα προβλήματα που θα απασχολούσαν την επιστήμη για

²Τα ppm είναι μονάδα μέτρησης της πυκνότητας όταν αναφερόμαστε σε μικροσωματίδια και αντιστοιχεί σε μικροσωματίδια ανά ένα εκατομμύριο (parts per million).

τους επόμενους αιώνες. Ένα από αυτά ήταν και η έννοια της *ομαλής κίνησης*. Όριζαν ως ομαλή μία κίνηση αν σε ίσα χρονικά διαστήματα διανύονταν ίσες αποστάσεις, από όπου προκύπτει φυσιολογικά, όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, ότι η ταχύτητα του κινούμενου σώματος δίνεται από τον τύπο³:

$$v = \frac{\text{διανυόμενη απόσταση σε χρόνο } t}{\text{χρόνος } t}.$$

Επίσης, όριζαν, ανάλογα, ως ομαλή *επιτάχυνση* εκείνη για την οποία παρατηρούνταν ίσες μεταβολές της ταχύτητας σε ίσα χρονικά διαστήματα. Σε αυτήν την κίνηση — την *ομαλά επιταχυνόμενη* — δεν μπορούσε να οριστεί με βάση τις απλές έννοιες που είχαν στα χέρια τους εκείνη την εποχή η στιγμιαία ταχύτητα του κινούμενου σώματος και, ως εκ τούτου, ήταν πιο δύσκολη η εύρεση της απόστασης που έχει διανύσει σε δεδομένο χρονικό διάστημα ένα σώμα με δεδομένη και σταθερή επιτάχυνση.

Αντ' αυτού, οι ερευνητές του Merton κατέληξαν στο ακόλουθο πολύ βασικό συμπέρασμα:

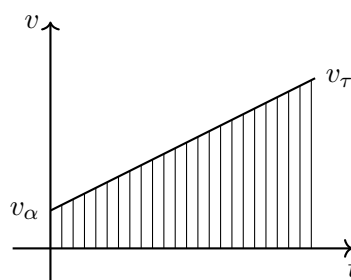
Αν ένα κινητό έχει ομαλή επιτάχυνση σε δοθέν χρονικό διάστημα τότε η συνολική απόσταση s που διανύει είναι ίση με αυτήν που θα διήνυε στο ίδιο χρονικό διάστημα ένα κινητό που θα εκτελούσε ομαλή κίνηση (στο ίδιο χρονικό διάστημα) με ταχύτητα ίση με τον μέσο όρο της αρχικής ταχύτητας v_α και της τελικής ταχύτητας v_τ .

Σε συμβολική γραφή, αυτό που λέει η παραπάνω διατύπωση, διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό, είναι ότι:

$$s = \frac{v_\alpha + v_\tau}{2} t,$$

αποτέλεσμα που προκύπτει, πράγματι, από τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, όπως γνωρίζουμε.

Λίγα χρόνια αργότερα, ένας Γάλλος μαθηματικός, ο Nicole Oresme, εισάγει στην μελέτη των κινήσεων τη θεμελιώδη έννοια της γραφικής παράστασης ταχύτητας-χρόνου (το γνωστό μας, από το Γυμνάσιο, διάγραμμα $v-t$), με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο από αυτόν που το κατασκευάζουμε σήμερα, αλλά με το ίδιο αποτέλεσμα και ερμηνεία. Για την ακρίβεια, ο Oresme φανταζόταν ότι σε κάθε χρονική στιγμή υπήρχε μία γραμμή με μήκος ακριβώς όσο και αυτό της ταχύτητας εκείνη τη στιγμή. Στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, αν κάνει κανείς πολλά «στιγμιότυπα» αυτής της γραμμής, θα δει ότι τα άνω άκρα της σχηματίζουν μία ευθεία όπως και στο συνηθισμένο διάγραμμα $v-t$ (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Η ιδέα της γραφικής παράστασης του Oresme

Έπειτα, ο Oresme υπολόγιζε το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση και, χωρίς κάποια περαιτέρω αιτιολόγηση, κατέληγε στο ότι αυτό το εμβαδόν είναι ίσο με την απόσταση που είχε

³Σε έναν τύπο της μορφής

$$A = \frac{\text{μεταβολή του } \Phi \text{ σε χρόνο } t}{\text{χρόνος } t}$$

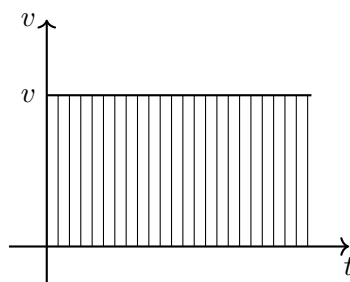
το δεξί μέλος ονομάζεται λόγος μεταβολής του Φ ως προς t και το A ονομάζεται *ρυθμός μεταβολής* του Φ .

διανύσει το σώμα κατά την κίνησή του. Στην προκειμένη περίπτωση, που το χωρίο κάτω από την καμπύλη έχει σχήμα τραπεζίου, το εμβαδόν του είναι ίσο με:

$$E = \frac{v_a + v_t}{2}t$$

που είναι ακριβώς ο τύπος που προκύπτει από τον κανόνα του Merton.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει και τον τύπο της ομαλής κίνησης, καθώς το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου σε αυτήν την περίπτωση είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 3 (η ταχύτητα παραμένει σταθερή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3): Σε αυτήν την περίπτωση, το χωρίο



Σχήμα 3: Το διάγραμμα $v - t$ της ομαλής κίνησης

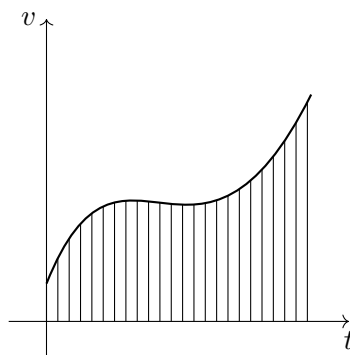
κάτω από την καμπύλη είναι ορθογώνιο, οπότε το εμβαδόν του είναι ίσο με:

$$E = vt$$

το οποίο συμπίπτει με την απόσταση που διανύει το κινούμενο σώμα σε χρόνο t , όπως είδαμε παραπάνω.

Εδώ προκύπτουν δύο βασικά ερωτήματα:

1. Πώς, ενδεχομένως, σκέφτηκε ο Oresme να συσχετίσει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $v - t$ με την απόσταση που διανύει το σώμα;
2. Ισχύει αυτό και σε άλλες, μη «ομαλές» κινήσεις; Αν ισχύει, τότε πώς θα υπολογίζαμε την απόσταση που διανύει ένα σώμα του οποίου η ταχύτητα μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο όπως στο σχήμα 4;



Σχήμα 4: Μία μη «ομαλή» κίνηση

Πρόβλημα 11

Τα παρακάτω αποτελούν προϊόν μυθοπλασίας και ουδεμία σχέση έχουν με την πραγματικότητα. Η μόνη αλήθεια είναι τα μαθηματικά.

Καλοκαίρι, απόγευμα, ο ήλιος όλη μέρα ζεμάταγε, η θάλασσα έβραζε και έχουμε μαζέψει όση ακτινοβολία UV εκπέμπει ο ήλιος σε έναν χρόνο, οπότε αποφασίζουμε να πάμε σε ένα ήσυχο παραλιακό μαγαζάκι, με την κλασσική αυλή, μισοστρωμένη με τσιμέντο, τα πατροπαράδοτα τροπικά πεύκα και τα παραδοσιακά τετράγωνα τραπέζια. Καθόμαστε, έρχεται ο σερβιτόρος και όπως αφήνει τα νερά, συνειδητοποιούμε ότι το τραπέζι δεν πατάει καλά στο ανώμαλο έδαφος. Πριν καλά-καλά προλάβουμε να πάρουμε ένα χαρτάκι να το βάλουμε από κάτω, πετάγεται ο σερβιτόρος και με μία κίνηση τύπου «Ράμπο», στρίβει το τραπέζι και, ξαφνικά, αυτό σταματάει να παλαντζάει. Εκστασιασμένοι όλοι, τον κοιτάμε με το στόμα ανοιχτό να μας λέει: «Πάντα μπορεί να στρίψεις το τραπέζι έτσι ώστε να ισορροπεί». Έχει, άραγε, δίκιο ο σερβιτόρος;

2 Η έννοια της συνάρτησης

Κεντρικό ρόλο στην επίλυση όλων των παραπάνω προβλημάτων θα παίξει μία κεντρική⁴ έννοια των μαθηματικών: αυτή της συνάρτησης. Στόχος μας από εδώ και εμπρός θα είναι να μελετήσουμε, σε όποιο βάθος μπορούμε, αυτήν την έννοια και τις ιδιότητές της και, μέσω αυτών, σταδιακά να δώσουμε απαντήσεις σε όλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ξεκινάμε, λοιπόν με τον ορισμό της συνάρτησης⁵.

2.1 Ο ορισμός της συνάρτησης — Πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής

Ορισμός 1 (Συνάρτηση)

Έστω A, B δύο μη κενά⁶ σύνολα. Μία διαδικασία—αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ θα λέμε ότι είναι συνάρτηση από το A στο B αν **κάθε στοιχείο** του A το αντιστοιχίζει σε **ένα και μοναδικό στοιχείο** του B . Καλούμε επίσης το A πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , το B πεδίο τιμών της συνάρτησης f και το στοιχείο στο οποίο η f αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $a \in A$ το ονομάζουμε **τιμή της f στο a** .

Παρατήρηση 1

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση πρέπει να «στέλνει» **κάθε** στοιχείο του πεδίου ορισμού της σε κάποιο (**μοναδικό**) στοιχείο του πεδίου τιμών της αλλά δεν είναι απαραίτητο οι τιμές της συνάρτησης να καλύπτουν όλο το πεδίο τιμών της. Το σύνολο που αποτελείται από τις τιμές της συνάρτησης f είναι το **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

Συνήθως, για να συμβολίσουμε το **μοναδικό** στοιχείο του συνόλου B στο οποίο η f αντιστοιχίζει το a χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f(a)$ (f του a), όπου εννοούμε ότι:

$$a \xrightarrow{f} f(a)$$

δηλαδή ότι η συνάρτηση f «στέλνει» το a στο $f(a)$.

Παρατήρηση 2

Δε γίνεται να υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία, x, y , του συνόλου B στα οποία η συνάρτηση να «στέλνει» το ίδιο στοιχείο a του A . Με άλλα λόγια, δε γίνεται να ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

$$f(a) = x \text{ και } f(a) = y$$

⁴Καταλαβαίνετε ότι είναι στο επίκεντρο της επιστήμης, ότι κατέχει κεντρικής σημασίας ρόλο και ότι επικεντρωνόμαστε σε κάτι σημαντικό. Εξ ου και η κατάχρηση της «κεντρικότητας».

⁵Ο ορισμός που θα χρησιμοποιούμε εδώ δεν είναι ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά αλλά ένας πιο «χαλαρός» ορισμός που χρησιμοποιείται στο σχολικό βιβλίο (Σ.Β.) ο οποίος όμως είναι «διαισθητικά» σύμφωνος με τον αυστηρό ορισμό της συνάρτησης.

⁶Δεν είναι απαραίτητο να είναι και τα δύο σύνολα μη κενά, αλλά αυτό δε θα μας απασχολήσει καθόλου στα πλαίσια της σχολικής ύλης.

παρά μόνο αν $x = y$. Επομένως, από τον ορισμό έπεται ότι:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

για κάθε $a, b \in A$. Όπως θα δούμε από τα ακόλουθα παραδείγματα, η αντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή η:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$$

δεν ισχύει πάντα για μία συνάρτηση, ούτε είναι αναμενόμενο να ισχύει⁷.

Ακολουθούν τώρα μερικά παραδείγματα με στόχο να αποσαφηνίσουμε τα λεπτά σημεία του ορισμού της συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Η αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ όπου:

$A =$ το σύνολο όλων των κλειδιών της Αθήνας

$B =$ το σύνολο όλων των πορτών της Αθήνας

που αντιστοιχίζει κάθε κλειδί στην πόρτα την οποία ξεκλειδώνει, αγνοώντας τα κλειδιά πασπαρτού⁸, είναι μία συνάρτηση αφού **κάθε κλειδί** ξεκλειδώνει ακριβώς **μία** πόρτα.

Αντιθέτως, η αντιστοίχιση $g : B \rightarrow A$ που αντιστοιχίζει κάθε πόρτα στα κλειδιά που την ξεκλειδώνουν **δεν είναι συνάρτηση** καθώς, αν σε ένα σπίτι μένουν περισσότερα του ενός άτομα τότε, ενδεχομένως, να υπάρχουν πάνω από ένα κλειδιά που ξεκλειδώνουν την ίδια πόρτα.

Παράδειγμα 2

Η αντιστοίχιση Παιδί : $A \rightarrow B$ όπου:

$A =$ το σύνολο των ενηλίκων που ζουν στην Σουμάτρα

$B =$ το σύνολο των ανθρώπων που ζουν στην Σουμάτρα

που αντιστοιχίζει κάθε γονέα στο παιδί του, δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση, καθώς ενδέχεται να μην ικανοποιείται καμία από τις δύο ιδιότητες του ορισμού. Δηλαδή:

1. ενδέχεται να υπάρχει κάποιος ενήλικας, ας τον ονομάσουμε E , που δεν έχει παιδιά, άρα η τιμή Παιδί(E) δεν ορίζεται,
2. ενδέχεται κάποιος γονέας να έχει δύο ή περισσότερα παιδιά.

Παράδειγμα 3

Η αντιστοίχιση $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο x^2 είναι συνάρτηση καθώς, κάθε πραγματικός αριθμός έχει έναν και μόνο αριθμό που είναι το τετράγωνό του.

Παράδειγμα 4

Η αντιστοίχιση $F : T \rightarrow K$ όπου:

$T =$ το σύνολο όλων των τεντζέρηδων του κόσμου

$K =$ το σύνολο όλων των καπακιών του κόσμου

που αντιστοιχίζει κάθε τέντζερη στο καπάκι του είναι συνάρτηση, αν εμπιστευτούμε τον θυμόσοφο λαό μας. Η αντιστοίχιση $H : K \rightarrow F$ που αντιστοιχίζει κάθε καπάκι στον τέντζερή της δεν είναι συνάρτηση γιατί δεν είναι απαραίτητο όλα τα καπάκια του κόσμου να είναι καπάκια κάποιου τέντζερη⁹.

⁷Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτές οι συναρτήσεις λέγονται $1 - 1$ και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες.

⁸Πασπαρτού λέγεται ένα αντικείμενο που ανοίγει όλες τις κλειδαριές (ex του passe partout των γαλλικών που σημαίνει «περνάει από παντού»). Πασπαρτού έλεγαν και τον (ταλαίπωρο) υπηρέτη του Φιλέα Φογκ στο γνωστό έργο του Ιουλίου Βερν «Ο γύρος του κόσμου σε 80 ημέρες».

⁹Τέντζερη λέμε γενικά οποιοδήποτε χάλκινο μαγειρικό σκεύος, αν και, τώρα πια, αποτελεί παρωχημένο όρο.

Παρατήρηση 3

Είναι σημαντικό εδώ να παρατηρήσουμε ότι τα σύνολα A, B , και ειδικότερα το σύνολο A , είναι μέρος της συνάρτησης f , όπως φαίνεται και από τον ορισμό της και από τα παραπάνω παραδείγματα. Δηλαδή, δεν μπορούμε να μιλάμε για μία συνάρτηση που αντιστοιχίζει όλα τα στοιχεία ενός συνόλου A σε κάποια στοιχεία ενός συνόλου B αν δεν έχουμε καθορίσει προηγουμένως ποιο είναι το σύνολο A . Έτσι, το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι βασικό τμήμα της.

Στα πλαίσια της ύλης μας, θα ασχοληθούμε, κυρίως, με συναρτήσεις που αντιστοιχίζουν πραγματικούς αριθμούς σε πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή τα A, B είναι και τα δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τέτοιες συναρτήσεις τις αποκαλούμε *πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής* και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της συνάρτησης ως εξής¹⁰:

Ορισμός 2 (Πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής)

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μία διαδικασία—αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ θα λέμε ότι είναι συνάρτηση από το A στο B αν **κάθε στοιχείο** του A το αντιστοιχίζει σε **ένα και μοναδικό στοιχείο** του B . Καλούμε επίσης το A *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f , το B *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f και το στοιχείο στο οποίο η f αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $a \in A$ το ονομάζουμε *τιμή της f στο a*

Κάποια παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής (θα τις λέμε απλά συναρτήσεις, από εδώ κι εμπρός) είναι τα ακόλουθα¹¹:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \quad x \in \mathbb{R} \\ g(x) &= x^2, \quad x \in [0, 1] \\ q(x) &= \sqrt{x} + 2, \quad x \in [0, +\infty) \\ h(x) &= \frac{2x}{\sqrt{x} - 1}, \quad x \in [0, 1) \cup (5, 17.2) \\ s(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι στις παραπάνω δεν προσδιορίζουμε το σύνολο B (το πεδίο τιμών) και δεχόμαστε «σιωπηρά» ότι αυτό είναι πάντα το $\mathbb{R}$. Αυτό γενικά είναι πάντα αλήθεια για τις πραγματικές συναρτήσεις, οπότε δεν μας προβληματίζει ιδιαίτεως¹².

Γενικότερα, αν για μία συνάρτηση μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να περιγράψουμε με μαθηματικά σύμβολα (πράξεις κ.λπ.) το πώς αυτή «στέλνει» το οποιοδήποτε x του πεδίου ορισμού της στο $f(x)$ τότε λέμε ότι έχουμε έναν **τύπο** για αυτήν τη συνάρτηση. Προφανώς, υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε τύπο (όπως η συνάρτηση που στέλνει κάθε κλειδί στην πόρτα του δεν έχει τύπο, για παράδειγμα) αλλά εμάς θα μας απασχολήσουν, κυρίως, συναρτήσεις για τις οποίες έχουμε τύπο, όταν θα ασχολούμαστε με συγκεκριμένα παραδείγματα. Έτσι, για να πούμε ότι γνωρίζουμε ποια είναι μία συνάρτηση που μας δίνεται, πρέπει να έχουμε:

- τον τύπο της,
- το πεδίο ορισμού της.

Από αυτά παίρνουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

¹⁰ Δεν υπάρχει καμμία ουσιαστική αλλαγή πέρα από το ότι τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

¹¹ Για λόγους ευκολίας, αντί να γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \dots$, γράφουμε απλά

$$f(x) = \dots, \quad x \in A$$

όπου A το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

¹² Αν θέλουμε να βρούμε το *σύνολο τιμών* μίας συνάρτησης f και όχι απλά το πεδίο τιμών, δηλαδή το σύνολο που περιέχει μόνο τις τιμές της f τότε θα πρέπει να εργαστούμε με έναν ειδικό τρόπο, ο οποίος θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα.

Ορισμός 3 (Ισότητα συναρτήσεων)

Δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες αν και μόνο αν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A = B$ και,
2. έχουν τον ίδιο τύπο, δηλαδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Τότε θα γράφουμε:

$$f = g.$$

Ας δούμε τώρα τα παρακάτω παραδείγματα πάνω στην ισότητα συναρτήσεων:

Παράδειγμα 5

Αν $f(x) = x^4$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^4$ με $x \in [0, 1]$ τότε $f \neq g$ αφού, αν και οι f, g έχουν τον ίδιο τύπο, δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

Παράδειγμα 6

Αν $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ με $x \in (1, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$ με $x \in (1, +\infty)$ τότε οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και, όπως θα δείξουμε, έχουν τον ίδιο τύπο. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x} + 1 = \\ &= g(x) \end{aligned}$$

οπότε οι δύο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο, άρα είναι ίσες, δηλαδή $f = g$.

2.1.1 Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Συχνά, και πάλι για λόγους ευκολίας, αντί να αναφέρουμε και τον τύπο και το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης, αναφέρουμε μόνο τον τύπο της, υπονοώντας ότι, σε αυτήν την περίπτωση, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ο τύπος που μας δίνεται έχει νόημα. Για παράδειγμα, αν μας δίνεται μία συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = x^5 + 4x^2 + 1$$

τότε, αυτός ο τύπος έχει νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δεν υπάρχει, με άλλα λόγια, κάτι που να μας περιορίζει από τον τύπο της f), άρα, σε αυτήν την περίπτωση, το πεδίο ορισμού της f υπονοείται ότι είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Αν μας δοθεί, για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + 1)$$

τότε, για να βρούμε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης πρέπει να εργαστούμε ως εξής:

- Εξετάζουμε πότε η υπόρριξη ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

ή, με άλλα λόγια, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- Εξετάζουμε πότε η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο είναι θετική, δηλαδή:

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} > -1$$

το οποίο είναι αληθές για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, μιας και η $\sqrt{x^2 - 1}$ είναι πάντα ένας μη αρνητικός αριθμός.

- Συναληθεύουμε τους περιορισμούς που έχουμε βρει (δηλαδή, κρατάμε μόνο τα κοινά στοιχεία), οπότε παίρνουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Υπενθυμίζουμε εδώ, σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να παίρνουμε περιορισμούς:

Μορφή τύπου	Περιορισμός
$\frac{1}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\ln g(x)$	$g(x) > 0$
$g(x)^{h(x)}$	$g(x) > 0$

Ακολουθούν τώρα μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7

Για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 + 4x - 5}$$

έχουμε:

- Ο παρονομαστής πρέπει να μη μηδενίζεται, επομένως, θέλουμε:

$$x^2 + 4x - 5 \neq 0.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -5$$

οπότε παίρνουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς:

$$x \neq 1 \text{ και } x \neq -5.$$

- Θέλουμε η υπόρριξη ποσότητα να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

δηλαδή $x \in [2, +\infty)$.

- Συναληθεύουμε του περιορισμούς και βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$D_f = [2, +\infty).$$

Παράδειγμα 8

Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{\sqrt{x+2} - 1}$$

έχουμε:

- Η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

δηλαδή $x \in (-1, +\infty)$.

- Η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

δηλαδή $x \in [-2, +\infty)$.

- Ο παρονομαστής πρέπει να είναι μη μηδενικός, δηλαδή:

$$\sqrt{x+2} - 1 \neq 0.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

οπότε παίρνουμε τον περιορισμό:

$$x \neq -1.$$

- Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f :

$$D_f = (-1, +\infty).$$

Παράδειγμα 9

Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$$

έχουμε:

- Η εσωτερική υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x \geq 0$$

δηλαδή $x \in [0, +\infty)$.

- Η ενδιάμεση υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$1 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

δεδομένου ότι $x \geq 0$, δηλαδή $x \in [0, 1]$.

- Η εξωτερική υπόρριζη παράσταση πρέπει να είναι μη αρνητική:

$$1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \geq 0$.

- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f :

$$D_f = [0, 1].$$

Παράδειγμα 10

Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\ln x}$$

έχουμε:

- Η βάση της δύναμης πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

δηλαδή $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

- Η παράσταση μέσα στον λογάριθμο να είναι θετική, δηλαδή:

$$x > 0$$

δηλαδή $x \in (0, +\infty)$.

- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f :

$$D_f = (1, +\infty).$$

2.1.2 Σύνολο τιμών συνάρτησης

Είδαμε στον ορισμό της συνάρτησης ότι εκτός από το πεδίο ορισμού, εμφανίζεται και ένα άλλο σύνολο: το σύνολο τιμών. Ως πεδίο τιμών, ορίζουμε οποιοδήποτε σύνολο περιέχει όλες τις τιμές που παίρνει μία συνάρτηση f . Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$, τότε το πεδίο τιμών της f θα μπορούσε να είναι όλο το $\mathbb{R}$, ή το διάστημα $(-4, +\infty)$ ή το διάστημα $[-2020, +\infty)$ ή, γενικά, οποιοδήποτε άλλο σύνολο περιέχει μέσα του το $[0, +\infty)$. Ως εκ τούτου, συνήθως θεωρούμε ως πεδίο τιμών κάθε συνάρτησης όλο το $\mathbb{R}$.

Έχει όμως ιδιαίτερη σημασία, πολλές φορές, να γνωρίζουμε ακριβώς ποιες τιμές παίρνει μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Γι' αυτόν τον σκοπό ορίζουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης, να είναι το σύνολο που περιέχει **αποκλειστικά** τις τιμές της συνάρτησης. Αυστηρά, έχουμε:

Ορισμός 4 (Σύνολο τιμών)

Αν $f : A \rightarrow B$ είναι μία συνάρτηση τότε ορίζουμε ως **σύνολο τιμών της f** και συμβολίζουμε με $f(A)$ το σύνολο όλων των $y \in B$ τα οποία «προέρχονται» από κάποιο $x \in A$ μέσω της f , δηλαδή:

$$f(A) = \{y \in B \mid \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y\}.$$

Εν γένει, δεν έχουμε ακόμα κάποιον σαφή τρόπο για να βρίσκουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης — στην πορεία της ύλης, θα αναπτύξουμε μία αρκετά γενική στρατηγική γι' αυτόν τον σκοπό — επομένως, περιοριζόμαστε στην αναζήτηση του συνόλου τιμών πολύ απλών συναρτήσεων, τις οποίες μπορούμε να χειριστούμε εύκολα αλγεβρικά. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 11

Αν $f(x) = x^2 - 4$, $x \in [0, 6]$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f , ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$0 \leq x \leq 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f :

$$0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 0 &\leq x^2 \leq 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4 &\leq x^2 - 4 \leq 32.\end{aligned}$$

Επομένως, $f([0, 6]) = [-4, 32]$.

Παράδειγμα 12

Αν $f(x) = 2 - 4\sqrt{x-2}$, $x \in [2, 6)$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f , ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$2 \leq x < 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f :

$$\begin{aligned}2 &\leq x < 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x - 2 < 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \sqrt{x-2} < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &\geq -4\sqrt{x-2} > -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 &\geq 2 - 4\sqrt{x-2} > -6,\end{aligned}$$

Επομένως, $f([2, 6)) = (-6, 2]$.

2.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Όπως είδαμε, ο Oresme χρησιμοποιούσε διαγράμματα για να περιγράψει διάφορες κινήσεις σωμάτων. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή τη μέθοδο και να φτιάξουμε γραφικές παραστάσεις διαφόρων συναρτήσεων ως εξής:

Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $f(x)$ κάθετο στον άξονα $x'x$ και κρατάμε μόνο το άνω άκρο αυτού του ευθυγράμμου τμήματος.

Έτσι, τα σημεία που κρατάμε σχηματίζουν, πιθανώς, μία καμπύλη την οποία ονομάζουμε γραφική παράσταση της f . Ο τυπικός ορισμός της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 5 (Γραφική Παράσταση Συνάρτησης)

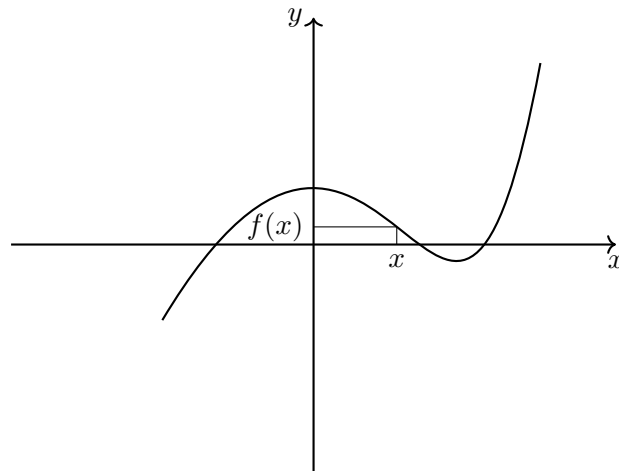
Ορίζουμε ως γραφική παράσταση C_f μίας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι:

1. $x \in A$,
2. $y = f(x)$.

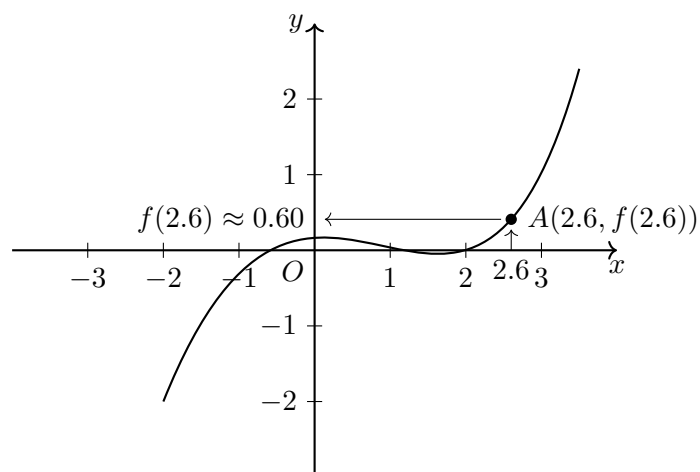
Με άλλα λόγια, γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το σύνολο:

$$C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Η ιδέα του ορισμού φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 5. Για την μελέτη των συναρτήσεων που θα κάνουμε στα πλαίσια της ύλης μας, μία συνάρτηση καθορίζεται πλήρως για εμάς από την γραφική της παράσταση, δηλαδή, αν μας δοθεί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, τότε θεωρούμε ότι τη γνωρίζουμε πλήρως. Πράγματι, μέσω της γραφικής παράστασης γνωρίζουμε κάθε x του πεδίου ορισμού της σε ποιον ακριβώς αριθμό αντιστοιχίζεται, απλώς κατασκευάζοντας μία κάθετη προς τον άξονα $x'x$ από το σημείο $(x, 0)$ μέχρι και την καμπύλη (οπότε θα «πέσουμε» πάνω στο σημείο $(x, f(x))$) και από εκεί μία ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ μέχρι και τον άξονα, οπότε «πέφτουμε» πάνω στο σημείο $(0, f(x))$. Σχηματικά, η διαδικασία αυτή περιγράφεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



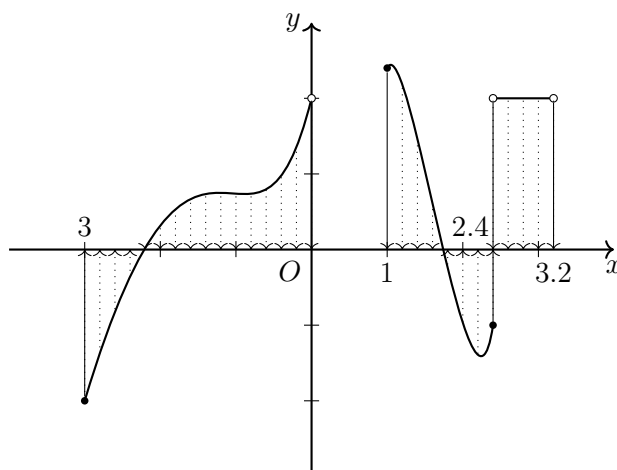
Σχήμα 6: Εύρεση της τιμής $f(2.6)$ μέσω της γραφικής παράστασης της f

Επίσης, από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε και το πεδίο ορισμού της άμεσα: είναι η προβολή¹³ της γραφικής παράστασης πάνω στον άξονα $x'x$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του σχήματος 7 έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_f = [-3, 0) \cup [1, 2.4] \cup (2.4, 3.2) = [-3, 0) \cup [1, 3.2).$$

Επομένως, εφ' όσον από την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης μπορούμε να «αντλήσουμε» και τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της, πράγματι, όταν μας δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μάς δίνεται και η ίδια η συνάρτηση.

¹³Να θυμίσουμε ότι για να προβάλουμε ένα οποιοδήποτε σχήμα πάνω σε μία ευθεία (ε) φέρνουμε από κάθε σημείο A του σχήματος ένα ευθύγραμμο τμήμα AB κάθετο προς την ευθεία (ε) και όλα αυτά τα σημεία B που προκύπτουν από τα A είναι η προβολή του σχήματος πάνω στην ευθεία (ε). Αλήθεια, η αντιστοίχιση που παίρνει ένα σημείο και το αντιστοιχίζει στην προβολή του πάνω σε μία ευθεία, είναι συνάρτηση;



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

2.3 Άλλες πληροφορίες που μας δίνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης για την ίδια τη συνάρτηση

Εκτός από τον «τύπο» και το πεδίο ορισμού¹⁴ μίας συνάρτησης f , τι άλλες πληροφορίες μπορούμε να «αντλήσουμε» από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης; Ίσως να φαίνεται παράξενο, αλλά, τις περισσότερες φορές, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας δίνει, άμεσα, πολύ περισσότερες πληροφορίες από ό,τι αν μας δινόταν απλώς ο τύπος της συνάρτησης. Μερικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

2.3.1 Το (ακριβές) σύνολο τιμών της f

Υπενθυμίζουμε ότι για μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$, το A λέγεται πεδίο ορισμού της f και το B πεδίο τιμών της f . Το σύνολο τιμών της f είναι **ακριβώς** εκείνες οι τιμές που παίρνει η f , δηλαδή είναι το σύνολο:

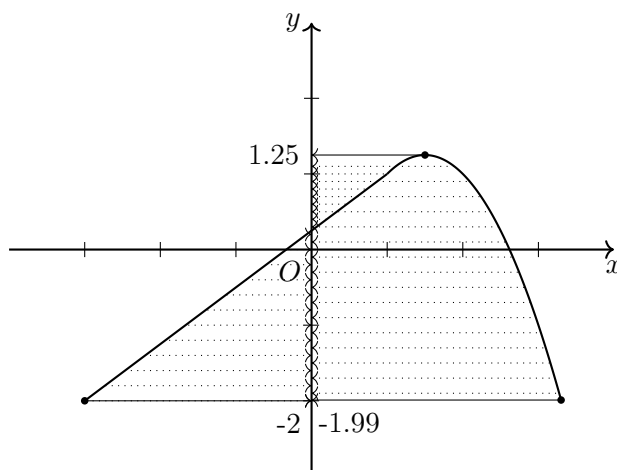
$$T = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει κάποιο } x \in A \text{ με } y = f(x)\}.$$

Συνήθως, το σύνολο T το συμβολίζουμε με¹⁵ $f(A)$ και, εν γένει, είναι διαφορετικό από το πεδίο τιμών το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύνολο περιέχει το $f(A)$. Από τη γραφική παράσταση της f αυτό μπορούμε να το βρούμε άμεσα, καθώς, κατ' αναλογία με το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών είναι η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον άξονα y/y' . Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 8 έχει ως σύνολο τιμών το σύνολο:

$$T = [-2, 1.25].$$

¹⁴Όπως είδαμε, δεν παίρνουμε ακριβώς τον τύπο, αν υπάρχει τύπος, μέσα από τη γραφική παράσταση, αλλά μπορούμε να βρούμε για κάθε x το $f(x)$, το οποίο μας είναι αρκετό.

¹⁵Η ιδέα του συμβολισμού είναι ότι όπως με $f(x)$ συμβολίζουμε τον αριθμό στον οποίο η f «στέλνει» τον x , έτσι και με $f(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο αριθμών στο οποίο η f στέλνει τους αριθμούς από το A .



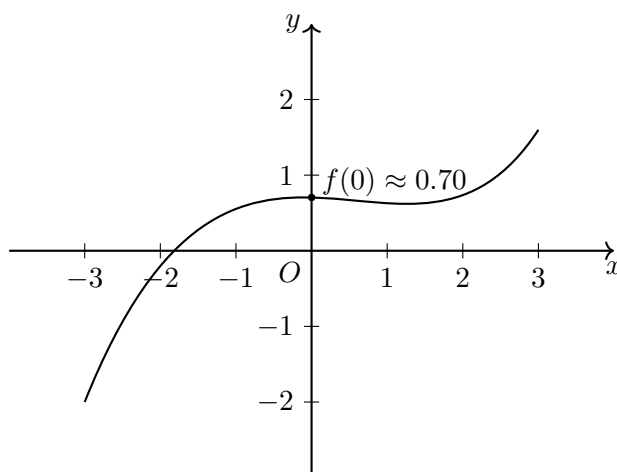
Σχήμα 8: Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

2.3.2 Το $f(0)$

Από την γραφική παράσταση της f μπορούμε να βρούμε άμεσα¹⁶ το $f(0)$, βρίσκοντας το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα, το $f(0)$ της συνάρτησης f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 9 είναι ο αριθμός:

$$f(0) \approx 0.70.$$

Προφανώς, αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης¹⁷, δεν έχει νόημα να υπολο-



Σχήμα 9: Το $f(0)$ της συνάρτησης f

γίσουμε το $f(0)$

¹⁶Ουσιαστικά, δεν υπάρχει καμμία διαφορά ανάμεσα στο πώς θα υπολογίζαμε το $f(x)$ μέσω της γραφικής παράστασης της f όπως περιγράψαμε παραπάνω από το πώς υπολογίζουμε το $f(0)$, απλώς, στην περίπτωση του $f(0)$ η κάθετη ευθεία που φέρουμε από το 0 προς τον άξονα $x'x$ είναι ο ίδιος ο άξονας $y'y$, οπότε γλυτώνουμε ένα βήμα. Παρ' όλα αυτά, ξεχωρίζουμε το $f(0)$ γιατί, σε επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι μας είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε που τέμνει μία συνάρτηση τον άξονα $y'y$.

¹⁷Δηλαδή, αν η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

2.3.3 Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και γενικότερα της εξίσωσης $f(x) = c$ για $c \in \mathbb{R}$

Οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

όπου f είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , είναι ακριβώς εκείνοι οι αριθμοί που ανήκουν στο A τους οποίους η συνάρτηση f «στέλνει» στο 0. Επομένως, αν $x_0 \in A$ είναι μία λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $f(x_0) = 0$, άρα το σημείο $M(x_0, 0)$ που βρίσκεται πάνω στον άξονα¹⁸ $x'x$ είναι ένα σημείο **και** της γραφικής παράστασης της f . Αντίστροφα, αν ένα σημείο M της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε αυτό πρέπει να είναι της μορφής $M(x_1, 0)$. Όμως κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f είναι και της μορφής $(x, f(x))$, άρα, πρέπει να ισχύει ότι $f(x_1) = 0$, άρα το x_1 είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Δηλαδή:

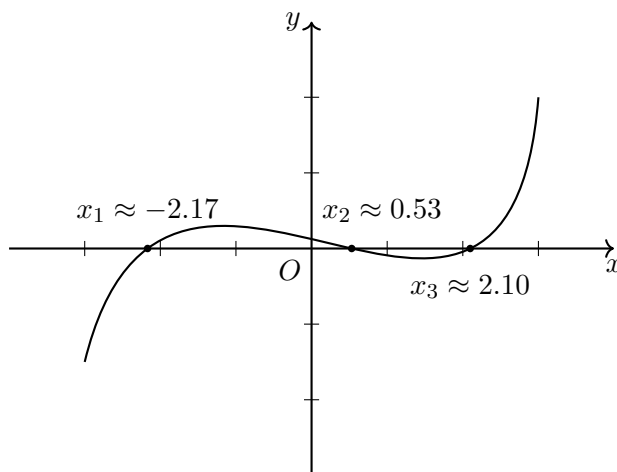
Οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 0$$

είναι **ακριβώς** οι τετμημένες¹⁹ των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Για παράδειγμα, οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 10 είναι οι αριθμοί:

$$x_1 \approx -2.17, \quad x_2 \approx 0.53, \quad x_3 \approx 2.10.$$



Σχήμα 10: Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύσεις, αν αυτή δεν τέμνει σε κανένα σημείο τον άξονα $x'x$.

Με ανάλογο τρόπο, μπορεί κανείς να δείξει ότι η εξίσωσης:

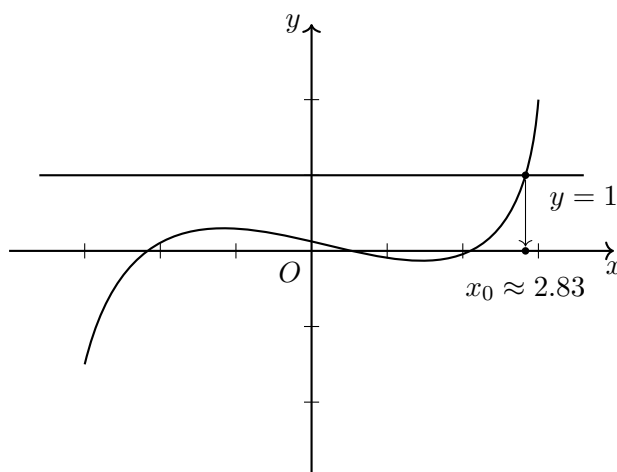
$$f(x) = c,$$

¹⁸Γιατί;

¹⁹Υπενθυμίζουμε ότι τετμημένη ενός σημείου $A(x, y)$ λέγεται η πρώτη συντεταγμένη του σημείου (το x , που λέμε).

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, έχει ως λύσεις ακριβώς εκείνους τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που είναι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = c$. Για παράδειγμα, αν f είναι η συνάρτηση του σχήματος 10, τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα 11, η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, την:

$$x_0 \approx 2.83.$$



Σχήμα 11: Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 1$

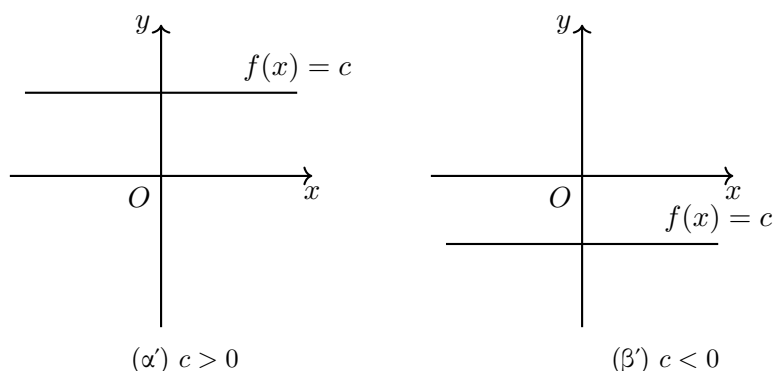
2.4 Χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης - Γνωστές συναρτήσεις

Από τις τρεις παραπάνω διαδικασίες, η πρώτη και η τελευταία — εύρεση συνόλου τιμών και εύρεση ριζών της εξίσωσης $f(x) = c$ — είναι αρκετά περίπλοκες²⁰ όταν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης χωρίς τη γραφική της παράσταση, πράγμα που θα φανεί ιδιαίτερα στην πορεία. Επομένως, το να έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή το να μπορούμε με σχετική ευκολία να τη σχεδιάσουμε αν μας δίνεται ο τύπος της είναι ένα εργαλείο που θα μας χρειαστεί για την μελέτη των συναρτήσεων. Στόχος μας, στη συνέχεια, θα είναι να μελετήσουμε όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων που θα μας διευκολύνουν στο να σχεδιάσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης έχοντας, αρχικά, μόνο τον τύπο της. Παραθέτουμε εδώ, τις γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων που έχουμε συναντήσει σε προηγούμενες τάξεις και οι οποίες θεωρούνται γνωστές.

2.4.1 Σταθερή συνάρτηση

Η σταθερή συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = c$, για κάποιον σταθερό αριθμό $c \in \mathbb{R}$ και γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 12.

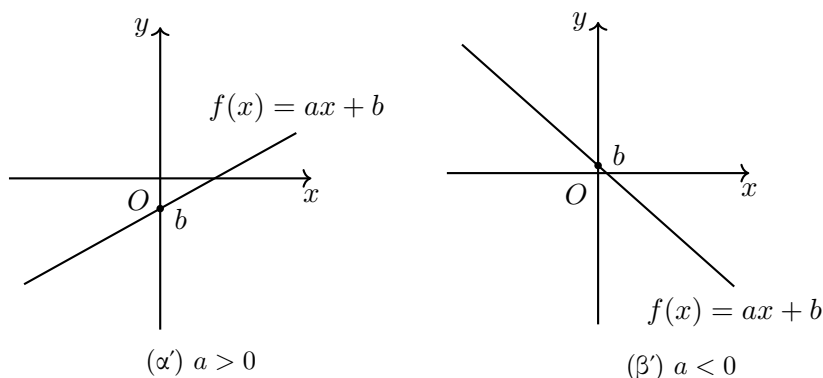
²⁰ Αντιθέτως, αν έχουμε τον τύπο μίας συνάρτησης, για να βρούμε το $f(0)$ δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε το 0 στη θέση του x στον τύπο της συνάρτησης και να κάνουμε τις πράξεις.



Σχήμα 12: Η σταθερή συνάρτηση για διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$

2.4.2 Γραμμική συνάρτηση

Μία γραμμική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = ax + b$ με $a \neq 0$ — αλλιώς θα ήταν μία σταθερή συνάρτηση — και γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 13 για της διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το b είναι πάντα ίσο με το $f(0)$ (προκύπτει άμεσα από τον τύπο της f) ενώ το a είναι η κλίση της ευθείας.



Σχήμα 13: Η γραμμική συνάρτηση για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

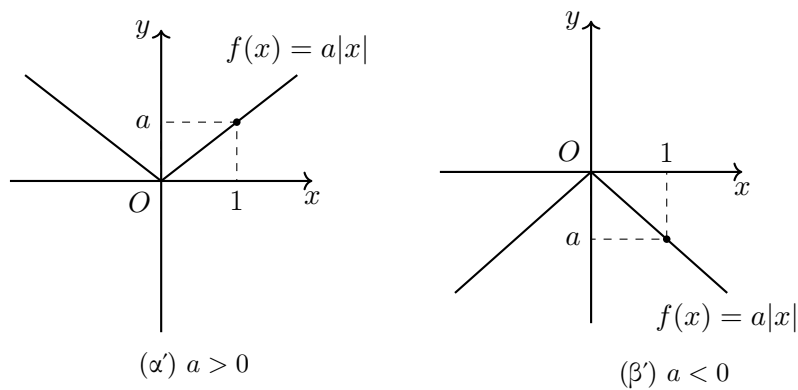
2.4.3 Η συνάρτηση απόλυτη τιμή

Η συνάρτηση απόλυτη τιμή έχει τύπο $f(x) = a|x|$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και γραφική παράσταση, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 14.

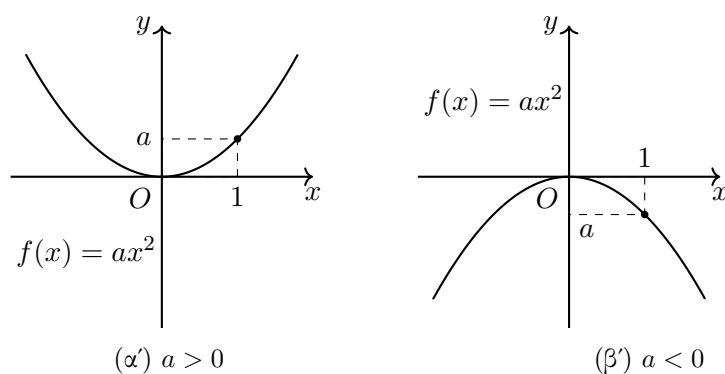
2.4.4 Παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα y/y

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση παραβολή, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 15, με κορυφή το $(0,0)$ έχει τύπο $f(x) = ax^2$, όπου $a \neq 0$ και το a εκφράζει πόσο «ανοικτή» ή «κλειστή» είναι η παραβολή. Για την ακρίβεια, όσο πιο μεγάλες τιμές παίρνει το a , κατ' απόλυτη τιμή²¹ τόσο πιο «στενή» και απότομη γίνεται η παραβολή — αυτό θα το εξετάσουμε αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο.

²¹ Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο γίνεται το $|a|$ ή, σχηματικά, όσο πιο μακριά βρίσκεται το a από το 0.



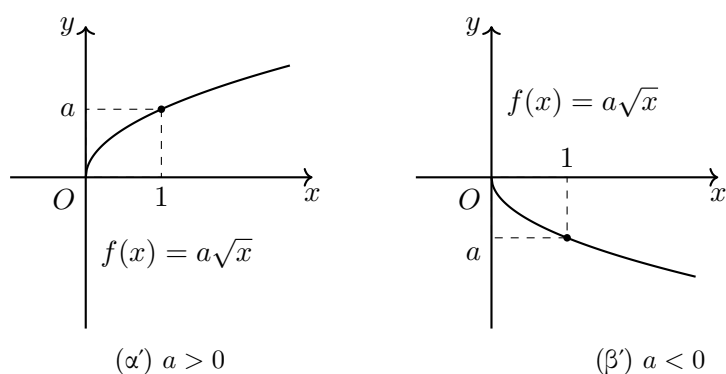
Σχήμα 14: Η συνάρτηση απόλυτη τιμή για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$



Σχήμα 15: Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

2.4.5 Τμήμα παραβολής με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα x'

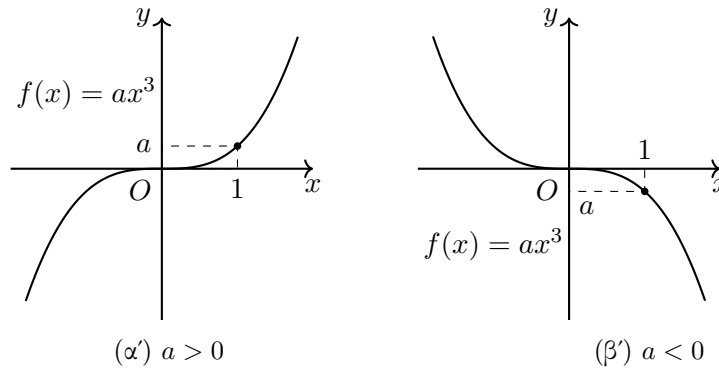
Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση τμήμα παραβολής με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα x' , όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 16, έχει τύπο της μορφής $f(x) = a\sqrt{x}$.



Σχήμα 16: Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

2.4.6 Κυβική καμπύλη με κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

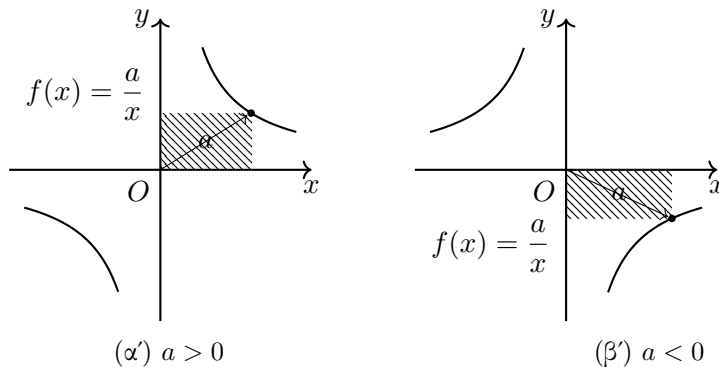
Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 17 έχει τύπο $f(x) = ax^3$, όπου $a \neq 0$ και, όπως και με την παραβολή, το a εκφράζει το πόσο «ανοικτή» είναι η καμπύλη.



Σχήμα 17: Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

2.4.7 Ισοσκελής υπερβολή

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση ισοσκελή υπερβολή, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 18 έχει τύπο $f(x) = \frac{a}{x}$ με $a \neq 0$ και $x \neq 0$. Εδώ το a εκφράζει το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου με μία κορυφή την αρχή των αξόνων και διαγώνιο που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στην υπερβολή, όπως φαίνεται στο σχήμα 18.

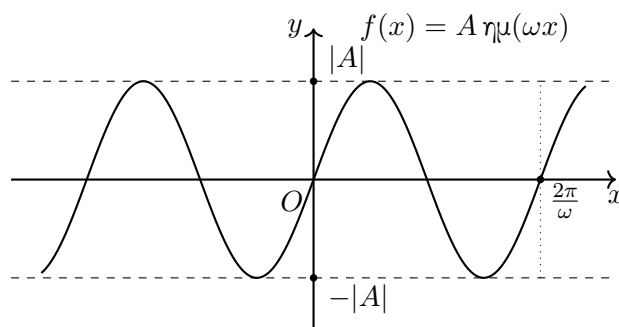


Σχήμα 18: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

2.4.8 Ημιτονοειδής καμπύλη

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία ημιτονοειδή καμπύλη, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 19, έχει εξίσωση της μορφής²² $f(x) = A \eta\mu(\omega x)$. Το A καθορίζει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης, ενώ το ω καθορίζει την περίοδο της, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

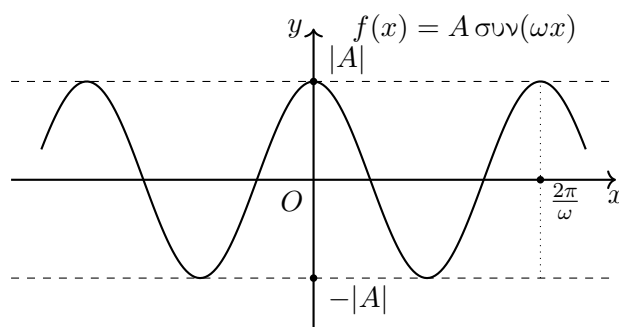
²²Εδώ θα μπορούσαμε να γράψουμε $f(x) = a \eta\mu(bx)$, απλώς «δανειστήκαμε» τον συμβολισμό από την φυσική, όπου συναντάμε πολλά περιοδικά μεγέθη των οποίων οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής $y = A \eta\mu(\omega t)$, όπου A είναι συνήθως το πλάτος της κίνησης (δηλαδή, το εύρος των θέσεων μέσα στο οποίο κινείται το σώμα) και ω η γωνιακή του συχνότητα (δηλαδή, πόσες τέτοιες κινήσεις εκτελεί σε ένα δευτερόλεπτο).



Σχήμα 19: Η συνάρτηση $f(x) = A \eta\mu(\omega x)$

2.4.9 Συνημιτονοειδής καμπύλη

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία συνημιτονοειδή καμπύλη, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 20, έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = A \sigma\upsilon\upsilon(\omega x)$. Ανάλογα με την ημιτονοειδή συνάρτηση, το A καθορίζει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης, ενώ το ω καθορίζει την περίοδο της, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Σχήμα 20: Η συνάρτηση $f(x) = A \sigma\upsilon\upsilon(\omega x)$

2.4.10 Καμπύλη εφαπτομένης

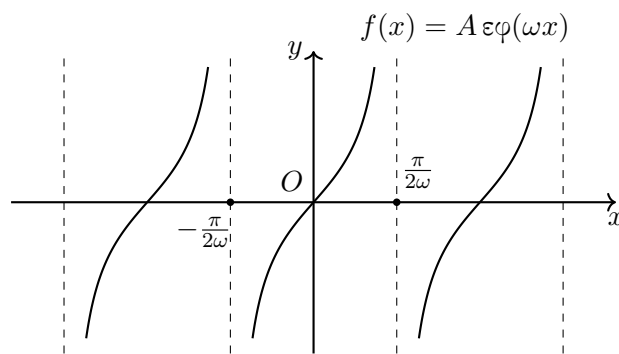
Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία καμπύλη εφαπτομένης, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 21, έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = A \epsilon\phi(\omega x)$. Ανάλογα με την ημιτονοειδή και τη συνημιτονοειδή συνάρτηση, το ω καθορίζει την περίοδο της, $T = \frac{\pi}{\omega}$ αλλά το A καθορίζει το πόσο «ανοικτή» ή «κλειστή» είναι η καμπύλη (ανάλογα με την παραβολή ή την κυβική καμπύλη).

2.4.11 Εκθετική συνάρτηση

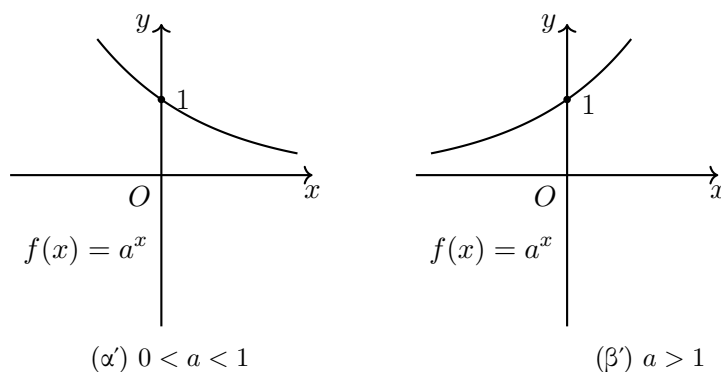
Μία εκθετική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ και η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του a , όπως φαίνεται και στο σχήμα 22. Να παρατηρήσουμε ότι όλες οι εκθετικές καμπύλες, ανεξαρτήτως της τιμής του a , διέρχονται από το σημείο $(0, 1)$.

2.4.12 Λογαριθμική συνάρτηση

Μία λογαριθμική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = \log_a x$ με $0 < a \neq 1$ και η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του a , όπως φαίνεται και στο σχήμα 23. Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι με $\ln x$ συμβολίζουμε,



Σχήμα 21: Η συνάρτηση $f(x) = A \tan(\omega x)$

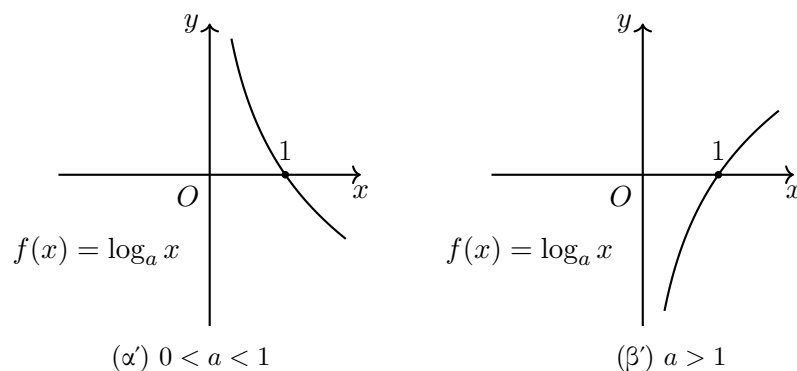


Σχήμα 22: Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$

ειδικά, τον φυσικό λογάριθμο, δηλαδή:

$$\ln x = \log_e x.$$

Να παρατηρήσουμε, επίσης, ότι όλες οι λογαριθμικές καμπύλες, ανεξαρτήτως της τιμής του a , διέρχονται από το σημείο $(1, 0)$.



Σχήμα 23: Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$

2.5 Εποπτική ερμηνεία του ορισμού της συνάρτησης

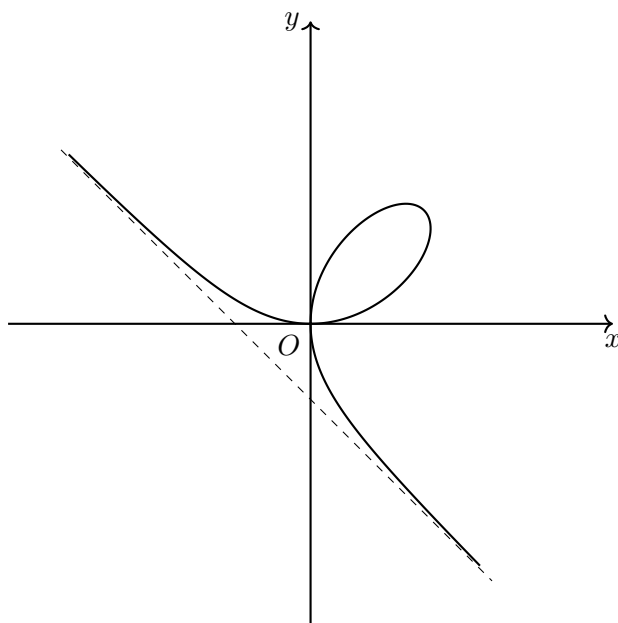
Είδαμε ότι μία αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ είναι συνάρτηση αν στέλνει κάθε στοιχείο του A σε ένα και μοναδικό στοιχείο του B , με άλλα λόγια αν, για κάθε $x \in A$ υπάρχει ένα και μοναδικό

$f(x) \in B$. Παρατηρήστε τώρα τις προηγούμενες δέκα περιπτώσεις απλών συναρτήσεων που παραθέσαμε και, ειδικά τις γραφικές παραστάσεις. Πώς φαίνεται αυτή η μοναδικότητα του $f(x)$ πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ; Προκύπτει κάθε καμπύλη του επιπέδου και, γενικότερα, κάθε σύνολο από σημεία του επιπέδου, από μία συνάρτηση;

Ας δούμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα. Θα μιλήσουμε τώρα λίγο για μία διάσημη καμπύλη, το φύλλο του Καρτέσιου, η οποία έχει εξίσωση:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

και η καμπύλη που περιγράφεται από αυτήν την εξίσωση²³ είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 24: Το ότι κάθε x αντιστοιχίζεται μέσω της f σε ένα και **μοναδικό** $f(x)$ σημαίνει ότι, αν



Σχήμα 24: Το φύλλο του Καρτέσιου

τραβήξουμε μία ευθεία κάθετη σε ένα σημείο του άξονα $x'x$ — με άλλα λόγια, αν διαλέξουμε ένα $x \in \mathbb{R}$ — τότε έχουμε δύο πιθανά σενάρια:

1. είτε θα «χτυπήσουμε» τη γραφική παράσταση της f σε ένα σημείο, το $(x, f(x))$ και, προφανώς, από την **μοναδικότητα** του $f(x)$, σε κανένα άλλο,
2. είτε, αν το x δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δε θα χτυπήσουμε τη γραφική της παράσταση σε κανένα σημείο.

Επομένως έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα:

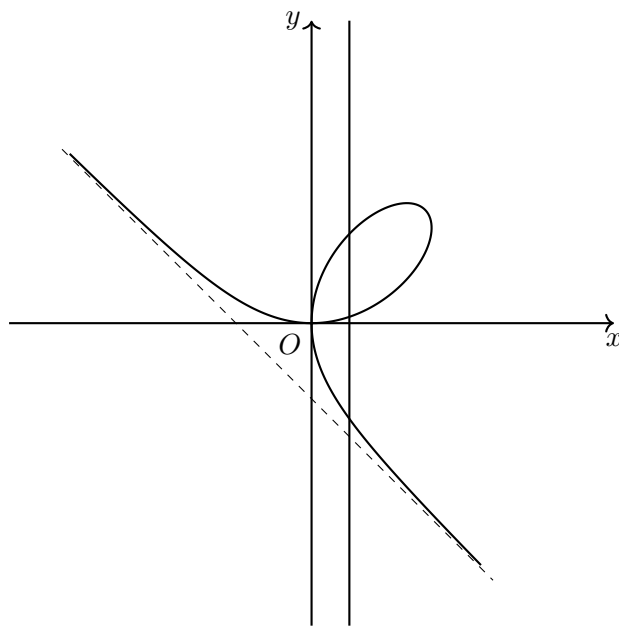
Μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνον αν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

Έτσι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 25 το φύλλο του Καρτέσιου δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, αφού υπάρχουν πολλές ευθείες κάθετες στον $x'x$ που τέμνουν την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία. Ωστόσο, αν χωρίσουμε την καμπύλη σε τρία τμήματα όπως φαί-

²³Γενικά, φύλλο του Καρτέσιου ονομάζουμε κάθε καμπύλη με εξίσωση της μορφής

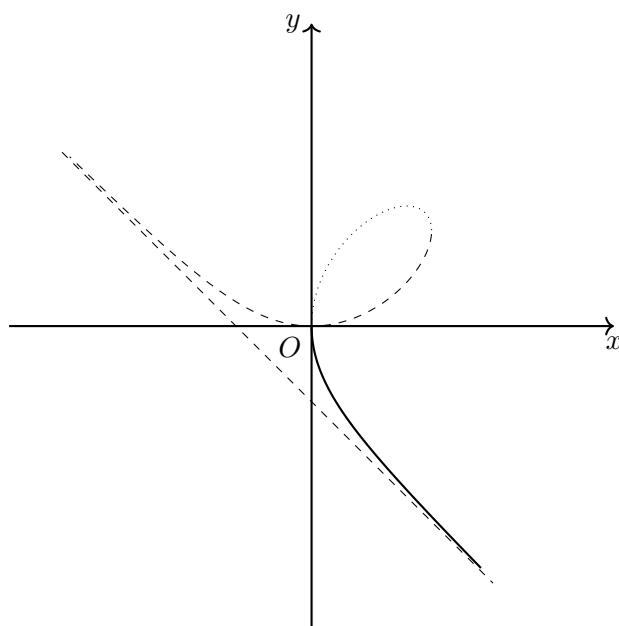
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ απλώς, για λόγους απλότητας εστιάζουμε στην περίπτωση $a = 1$.



Σχήμα 25: Το φύλλο του Καρτέσιου δεν είναι συνάρτηση

νεται στο σχήμα 26 τότε, το καθένα από αυτά αποτελεί τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης.



Σχήμα 26: Το φύλλο του Καρτέσιου «καταχρεουργημένο»

Επομένως, αν μας δοθεί μία καμπύλη, μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε αν είναι ή όχι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, απλώς εξετάζοντας αν υπάρχει ευθεία κάθετη στον άξονα x' που να την τέμνει σε περισσότερα από ένα σημεία.

Συνήθως, όμως, δε θα είμαστε τόσο τυχεροί έτσι ώστε να έχουμε την καμπύλη στα χέρια μας και το μόνο δεδομένο που θα έχουμε θα είναι η εξίσωσή της. Άλλωστε, ακόμα και για το φύλλο του Καρτέσιου για το οποίο συζητάμε, δεν είναι απλό να σχεδιάσει κανείς την καμπύλη που

περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad (\star)$$

Θα θέλαμε, επομένως, και έναν τρόπο να μπορούμε να δούμε αν μία καμπύλη μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο από την εξίσωσή της. Ας σκεφτούμε λίγο: για να μπορεί να γραφτεί το y σαν συνάρτηση του x , πρέπει κάθε x να αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό y . Αυτό όμως σημαίνει ότι, όποια τιμή του x και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $(\star)$ αυτή θα μας δίνει κάθε φορά μία και μοναδική λύση για το y . Δηλαδή, αν θέσουμε $x = a$, όπου a είναι κάποιος, αυθαίρετος, πραγματικός αριθμός, τότε πρέπει η εξίσωση:

$$a^3 + y^3 - 3ay = 0$$

να έχει μία και μοναδική λύση ως προς y , ας πούμε την $y = b$. Αν παίζουμε λίγο με τις τιμές που μπορούμε να δώσουμε στο a , θα δούμε ότι για $a = 1$ προκύπτει η εξίσωση:

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

η οποία έχει ακριβώς 3 πραγματικές λύσεις²⁴ επομένως, δεν υπάρχει ένα μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ στο οποίο να αντιστοιχίζεται το $x = 1$, άρα το y δεν μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x .

Αν όμως μπορεί να γραφτεί το x σαν συνάρτηση του y ; Αν υπάρχει δηλαδή μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$x = g(y), \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R};$$

Στην προκειμένη περίπτωση, μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια και, θέτοντας $y = 1$ στην εξίσωση $(\star)$ να δούμε ότι προκύπτει η εξίσωση:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

η οποία έχει ακριβώς 3 πραγματικές λύσεις, οπότε και πάλι δεν μπορούμε να γράψουμε ούτε το x σαν συνάρτηση του y .

Ας δούμε τώρα την παρακάτω καμπύλη:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x > 0 \quad (\dagger)$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει μία καμπύλη στο επίπεδο (βλ. σχήμα 27). Είναι αυτή η καμπύλη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, είτε του x είτε του y ; Ας εξετάσουμε πρώτα αν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του x . Μετά από λίγο πειραματισμό, βλέπουμε ότι αντικαθιστώντας $x = \frac{1}{2}$ στην $(\dagger)$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

η οποία έχει δύο λύσεις ως προς y , τις $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, επομένως το y δεν μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x .

Αν όμως προσπαθήσουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς x , έχουμε:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{1 - y^2}.$$

Εδώ σταματάμε για να σκεφτούμε. Στην εξίσωση της καμπύλης έχουμε ότι $x > 0$, επομένως η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

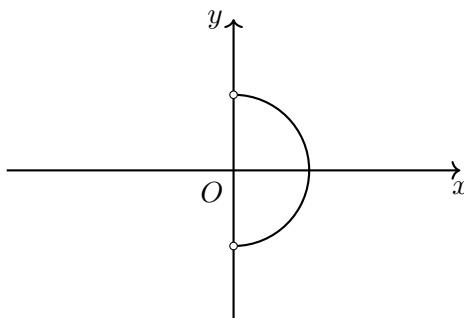
$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

²⁴Το πώς και το γιατί αυτή η εξίσωση έχει 3 λύσεις θα το δούμε αργότερα μέσα στην ύλη μας. Αν, ωστόσο, κάποιος βιάζεται να δει πώς λύνουμε τριτοβάθμιες εξισώσεις γενικά — όχι με τον τρόπο που θα μας απασχολήσει φέτος — μπορεί να αναζητήσει στο διαδίκτυο τον τύπο του Cardano.

άρα, υπάρχει μία συνάρτηση g , η $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, τέτοια ώστε, για κάθε²⁵ $y \in (-1, 1)$, να ισχύει ότι:

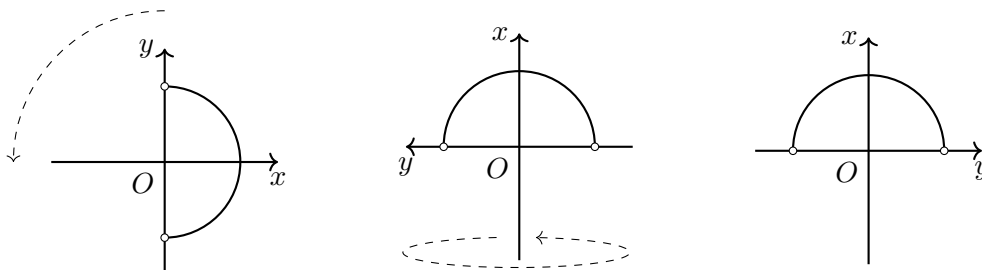
$$x = g(y)$$

επομένως, η παραπάνω καμπύλη είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης g . Αν σχε-



Σχήμα 27: Η καμπύλη (†)

διάσουμε την καμπύλη με εξίσωση (†), όπως φαίνεται στο σχήμα 27, παρατηρούμε αμέσως ότι δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του x . Για να δούμε ότι μπορεί να είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του y , πρέπει πρώτα να φέρουμε τους άξονες στη «σωστή» τους θέση: τον $y'y$ στη θέση του $x'x$ και τον $x'x$ στη θέση του $y'y$, όπως φαίνεται στο σχήμα 28. Τώρα είναι σαφές ότι όποια ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ και να φέρουμε, αυτή θα τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο, άρα η καμπύλη αυτή είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης²⁶ του y .



Σχήμα 28: Στρίβοντας τους άξονες

3 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων — Διάταξη συναρτήσεων

Ως άνθρωποι²⁷, μας αρέσει να ανάγουμε τα νέα και τα άγνωστα πράγματα σε γνωστά και να τα συγκρίνουμε με αυτά, πράγμα απόλυτα λογικό, αφού τα γνωστά προς εμάς πράγματα, έννοιες κ.λπ. μπορούμε να τα χειριστούμε ευκολότερα. Έτσι, λοιπόν, θα θέλαμε να συσχετίσουμε τις συναρτήσεις με κάτι γνωστό σε εμάς, για παράδειγμα, με τους αριθμούς. Μάλιστα, θα ήταν και λίγο έως πολύ αναμενόμενο οι συναρτήσεις να διατηρούν πολλές από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, δεδομένου ότι, στο κάτω-κάτω της γραφής, μία (πραγματική) συνάρτηση f παίρνει κάποιους αριθμούς x και τους αντιστοιχίζει σε κάποιους άλλους αριθμούς $f(x)$. Πράγματι, οι

²⁵Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, είναι εύκολο, αλλά έχει μία μικρή λεπτομέρεια που πρέπει να προσέξετε.

²⁶Αυτό μπορούσαμε να το δούμε, ομολογουμένως, και από το αρχικό σχήμα, σχεδιάζοντας ευθείες κάθετες στον άξονα $y'y$ όπως ήταν, αλλά η διαδικασία των περιστροφών των αξόνων που ακολουθήσαμε στο σχήμα 28 θα μας φανεί χρήσιμη και στην πορεία.

²⁷Ετοιμάζεται να αρχίσει την αμπελοφιλοσοφία, μαζέψτε τον!

συναρτήσεις, έχουν αρκετές από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (προφανώς όχι όλες) και, σαφώς, έχουν και κάποια νέα χαρακτηριστικά, ιδιαίτερα χρήσιμα, τα οποία θα φανούν στην πορεία. Εμείς προς το παρόν θα σχοληθούμε με τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

3.1 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Μπορούμε να προσθέσουμε συναρτήσεις; Ε, ναι, μπορούμε, ποιος μας περιορίζει να πούμε ότι αν έχουμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f + g$ θα είναι η συνάρτηση που θα αντιστοιχίζει κάθε x όχι στο $f(x)$, ούτε στο $g(x)$, αλλά στο $f(x) + g(x)$; Δηλαδή θα κάνει την εξής δουλειά²⁸:

$$x \xrightarrow{f+g} f(x) + g(x)$$

ή, με άλλα λόγια:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Είναι όμως η αντιστοίχιση $f + g$ συνάρτηση; Και, αν είναι, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Σε ότι αφορά το πρώτο ερώτημα, η $f + g$ είναι συνάρτηση διότι κάθε x έχει ένα και μοναδικό $f(x)$ και ένα και μοναδικό $g(x)$, επομένως, το $f(x) + g(x)$ είναι και αυτό μοναδικά καθορισμένο για κάθε x . Για το πεδίο ορισμού, η φυσιολογική απαίτηση είναι να έχει νόημα και το $f(x)$ και το $g(x)$, με άλλα λόγια, να είναι ορισμένες και οι δύο συναρτήσεις έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε²⁹ το $f(x)$ και το $g(x)$. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει το x να ανήκει και στο πεδίο ορισμού της f και στο πεδίο ορισμού της g , άρα, το πεδίο ορισμού της $f + g$ θα είναι το σύνολο $A \cap B$.

Ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε και τις άλλες συνήθεις αριθμητικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα³⁰:

Πράξη	Πεδίο ορισμού
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$A \cap B$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$A \cap B$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$A \cap B$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$A \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$

3.2 Διάταξη συναρτήσεων

Μία άλλη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που κληρονομούν οι συναρτήσεις είναι η διάταξή τους. Όπως λέμε ότι ένας αριθμός είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από έναν άλλο, έτσι μπορούμε να πούμε και ότι μία συνάρτηση είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από μία άλλη, με βάση τον ακόλουθο ορισμό:

²⁸Το ότι συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη «δουλειά» για να μιλήσουμε για μία συνάρτηση δεν είναι τυχαίο. Οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν διαδικασίες, σε διάφορους τομείς. Επίσης, ο λόγος που χρησιμοποιούμε συνήθως το γράμμα f για να συμβολήσουμε μία συνάρτηση είναι ότι αυτό προέρχεται από το ρήμα *fungor*, που στα λατινικά σημαίνει «λειτουργώ».

²⁹Σκεφτείτε, για παράδειγμα, τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{-x}$. Εδώ η $f + g$ δεν έχει νόημα, γιατί εκεί που ορίζεται η f δεν ορίζεται η g , καθώς $D_f = [1, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 0]$.

³⁰Επί της ουσίας, η διαδικασία που ακολουθούμε για να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν μας δίνεται μόνο ο τύπος, προκύπτει από το πώς ορίζεται το πεδίο ορισμού των πράξεων μεταξύ συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν

$$h(x) = \sqrt{x} + \ln(1-x)$$

απαιτούμε και $x \geq 0$, δηλαδή το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x}$, και $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, δηλαδή το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $g(x) = \ln(1-x)$, δηλαδή απαιτούμε να ανήκει στην τομή τους.

Ορισμός 6 (Διάταξη συναρτήσεων)

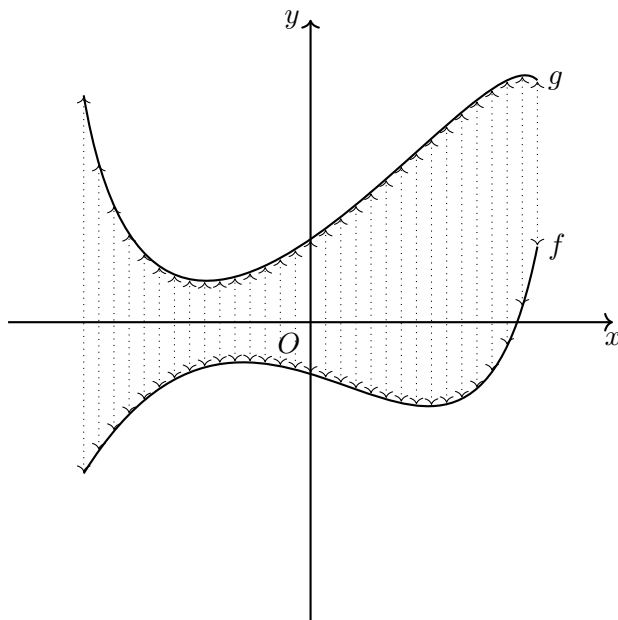
Έστω f και g δύο συναρτήσεις. Θα λέμε ότι η f είναι μικρότερη από την g και θα γράφουμε $f < g$ αν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και
2. $f(x) < g(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους.

Παρατήρηση 4

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για να συγκρίνονται δύο συναρτήσεις, πρέπει να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Επομένως, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ δεν συγκρίνονται, εφ' όσον η πρώτη ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ η δεύτερη μόνο για $x \in [0, +\infty)$. Αν όμως περιοριστούμε σε ένα διάστημα που να ορίζονται και οι δύο, ας πούμε στο $[3, 4]$, τότε αυτές συγκρίνονται και ισχύει ότι $g < f$ στο διάστημα $[3, 4]$.

Εποπτικά, η διάταξη των συναρτήσεων ερμηνεύεται ως εξής: αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με $f < g$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι «κάτω» από την γραφική παράσταση της g σε **κάθε σημείο**, όπως φαίνεται στο σχήμα 29.



Σχήμα 29: Διάταξη συναρτήσεων: $f < g$

3.3 Σύνθεση συναρτήσεων: μία «διαφορετική» πράξη μεταξύ συναρτήσεων

Πέρα από τις συνηθισμένες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε και άλλη μία πράξη, βασιζόμενοι στη φύση των συναρτήσεων, η οποία δεν έχει νόημα στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτήν την πράξη, που θα την ονομάσουμε **σύνθεση** συναρτήσεων και θα τη συμβολίζουμε με $\circ$, την ορίζουμε ως εξής:

Ορισμός 7 (Σύνθεση συναρτήσεων)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις και $g(B) \cap A \neq \emptyset$, τότε ορίζουμε ως σύνθεση της g με την f τη συνάρτηση $f \circ g : D_{f \circ g} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

από το εν λόγω λαχανικό³¹. Έτσι, η τιμή:

$$(f \circ g)(\mu\alpha\rho\acute{o}\upsilon\lambda\iota)$$

είναι μία μαρουλοσαλάτα.

Γενικότερα, για τον υπολογισμό της τιμής $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ακολουθούμε την εξής πορεία:

1. υπολογίζουμε πρώτα την τιμή της g στο x , δηλαδή την $g(x)$ και, στη συνέχεια,
2. υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης f στο $g(x)$, δηλαδή³² την $f(g(x))$.

Σχηματικά, έχουμε αυτό που φαίνεται στο σχήμα 30.

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) = (f \circ g)(x) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & & \end{array}$$

Σχήμα 30: Η σύνθεση της g με την f .

Παρατήρηση 5

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων δεν έχει πάντα νόημα³³. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$, τότε παρατηρούμε ότι η σύνθεση $g \circ f$ δεν έχει νόημα, αφού $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$.

Παρατήρηση 6

Εν γένει, η σύνθεση δύο συναρτήσεων είναι *μη μεταθετική πράξη*, δηλαδή **δεν** ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f,$$

για κάθε δύο συναρτήσεις f και g . Αυτό γίνεται σαφές και από την προηγούμενη παρατήρηση όπου η μία εκ των δύο συνθέσεων δεν υπάρχει, αλλά και αν κανείς θεωρήσει τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$. Σε αυτήν την περίπτωση οι $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν διαφορετικό τύπο, μιας και:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{\ln x} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \ln(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Δεν έχουμε κάνει ακόμα εκτενή αναφορά στο πεδίο ορισμού της σύνθεσης της g με την f . Εδώ, θέλουμε να ικανοποιείται μία φυσιολογική απαίτηση:

- $\alpha\varphi'$ ενός πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g , έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x)$ και,

³¹Na επισημάνουμε ότι η σαλάτα δεν έχει ούτε λάδι ούτε αλάτι ούτε τίποτα· μόνο το λαχανικό, πλυμένο και κομμένο.

³²Προσοχή! Όχι στο x , αλλά στο $g(x)$! Αφού το πλύνουμε το μαρούλι, δε θα πάμε να κόψουμε το άπλυτο, το πλυμένο θα κόψουμε!

³³ Όπως δεν έχει νόημα το «ανακάτεμα» διαφόρων λειτουργιών στη ζωή. Για παράδειγμα, κανείς δεν προσπαθεί να πλύνει ένα καρπούζι και μετά να το βάλει σε ένα παπούτσι, απλά γιατί το καρπούζι δεν είναι συμβατό με το παπούτσι.

- αφ' ετέρου, πρέπει το $g(x)$ που θα υπολογίσουμε να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε και το $f(g(x))$, δηλαδή, τελικά, το $(f \circ g)(x)$.

Επομένως, πρέπει από εκείνα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της g , δηλαδή του B , να κρατήσουμε εκείνα που η g τα «στέλνει» στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή στο A . Άρα, το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ είναι ακριβώς όσα στοιχεία x περιέχονται και στο B και το $g(x)$ ανήκει στο A , δηλαδή:

$$D_{f \circ g} = \{x \in B \mid g(x) \in A\}.$$

Παράδειγμα 13

Αν $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}$, τότε η σύνθεση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\} = \\ &= \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} < 1 \text{ ή } \sqrt{x+2} > 1\} = \\ &= \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \neq 1\} = \\ &= \{x \in [-2, +\infty) \mid x \neq -1\} = \\ &= [-2, -1) \cup (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Από την άλλη, η σύνθεση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid \frac{1}{x-1} \in [-2, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid \frac{1}{x-1} \geq -2\right\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right\} = \\ &= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 7

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ είναι το σύνολο που περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή το:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

και όχι απαραίτητα το σύνολο που προκύπτει από τον τύπο της $f \circ g$ όπως περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Για παράδειγμα, αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} = x$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in (0, +\infty) \mid \ln x \in \mathbb{R}\} = \\ &= (0, +\infty). \end{aligned}$$

Αν όμως πάμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον τύπο της τότε παίρνουμε ότι:

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

το οποίο είναι διαφορετικό από το $(0, +\infty)$. Γενικά, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ προκύπτει ουσιαστικά από τον τρόπο με τον οποίο «κατασκευάζεται» η $f \circ g$, δηλαδή, από το πώς «ανακατεύονται» οι δύο λειτουργίες που περιγράφουν οι f, g . Στο παράδειγμά μας, δεδομένου ότι πρώτα πρέπει να πάρουμε τον λογάριθμο του x , περιοριζόμαστε αναγκαστικά στους θετικούς αριθμούς x και στη συνέχεια, «επιστρέφουμε», μέσω της e^x ξανά στους θετικούς αριθμούς x και όχι σε όλους³⁴.

3.4 Σύνθεση και γραφική παράσταση — Μεταφορές και Συμμετρίες

Γενικά, είναι δύσκολο, ακόμα, να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της σύνθεσης δύο συναρτήσεων f, g ακόμα και αν αυτές είναι σχετικά απλές, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Μπορούμε όμως να εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις συνθέσεων που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες και είναι σχετικά απλές στο επίπεδο της χάραξης της γραφικής του παράστασης.

3.4.1 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρτηση $g(x) = x + c$, για $c \in \mathbb{R}$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + c$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \\ &= D_f. \end{aligned}$$

Ας πάρουμε τώρα μία συνάρτηση f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 31. Τότε, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ αποτελείται από τα σημεία τη μορφής $(x, (g \circ f)(x))$,

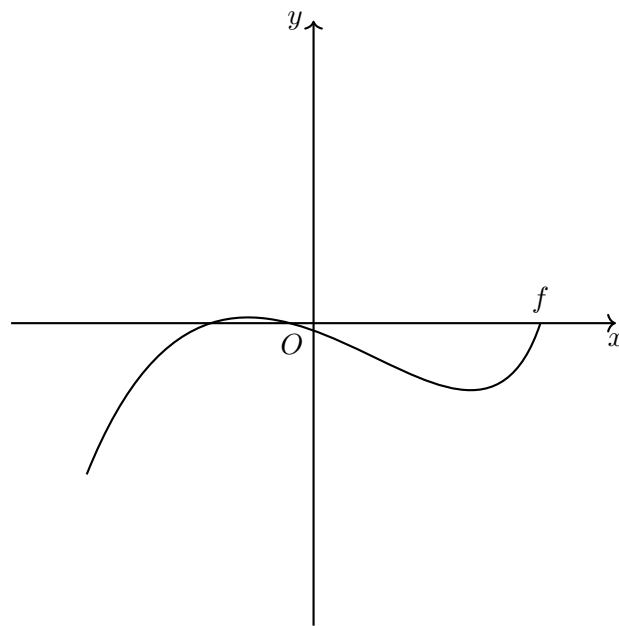
³⁴Ειδικά σε ό,τι έχει να κάνει με λογαρίθμους, σκεφτείτε και το ακόλουθο παράδειγμα. Στη χημεία, ορίζουμε το pH ενός διαλύματος να είναι ο αντίθετος του λογαρίθμου της συγκέντρωσης κατιόντων οξονίων στο διάλυμα, δηλαδή:

$$\text{pH} = -\log_{10}[H_3O^+].$$

Δεδομένου ότι οι συγκεντρώσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές, αυτός ο ορισμός έχει πάντα νόημα. Αν θέλουμε να βρούμε τη συγκέντρωση των κατιόντων οξονίων με δεδομένο το pH ενός διαλύματος, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση 10^{-x} . Τότε, επί της ουσίας υπολογίζουμε την τιμή της σύνθετης συνάρτησης:

$$10^{\log_{10} x}$$

για $x = [H_3O^+]$ οπότε βρίσκουμε τη ζητούμενη συγκέντρωση. Όμως, όπως και στο παράδειγμα, έτσι κι εδώ, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι μόνο οι θετικοί αριθμοί, πράγμα που προκύπτει και από τη διαδικασία που περιγράψαμε αλλά και από τους φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος (οι συγκεντρώσεις δεν παίρνουν μη θετικές τιμές).

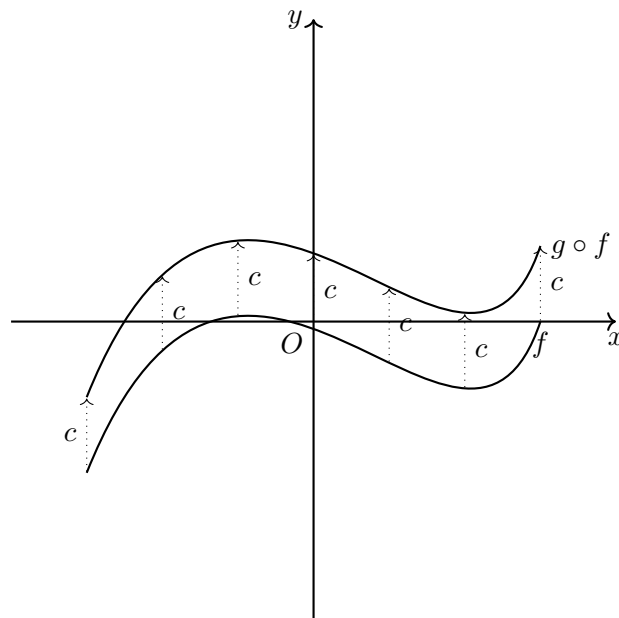


Σχήμα 31: Η συνάρτηση f

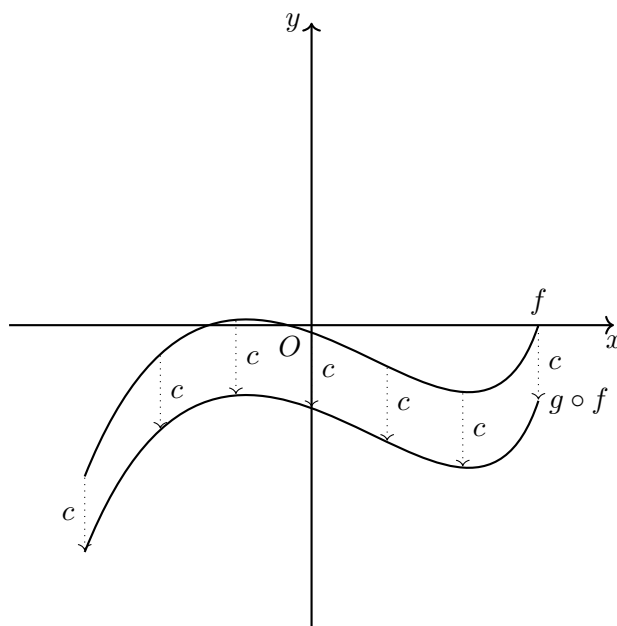
δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, f(x) + c).$$

Επί της ουσίας, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη παράλληλα στον άξονα $y'y$ κατά c . Επομένως, αν $c > 0$, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ βρίσκεται πάνω από αυτήν της f σε απόσταση c ενώ αν $c < 0$ η γραφική παράσταση της $g \circ f$ βρίσκεται κάτω από αυτήν της f σε απόσταση $|c|$ όπως φαίνεται στα σχήματα 32 και 33.



Σχήμα 32: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c > 0$



Σχήμα 33: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c < 0$

3.4.2 Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = x - c$ με μία συνάρτηση f , για $c \in \mathbb{R}$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - c)$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in D_f\}. \end{aligned}$$

Είναι δηλαδή εκείνοι οι αριθμοί x που, αν τους αφαιρέσουμε c τότε το $x - c$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Για παράδειγμα, αν $D_f = (0, 1)$ και $c = -1$, εκείνοι οι αριθμοί που αν τους αφαιρέσουμε -1 θα ανήκουν στο $(0, 1)$ είναι ακριβώς οι αριθμοί που βρίσκονται στο $(-1, 0)$, άρα, σε αυτήν την περίπτωση το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ θα ήταν το $(-1, 0)$.

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $(x, (f \circ g)(x))$ δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

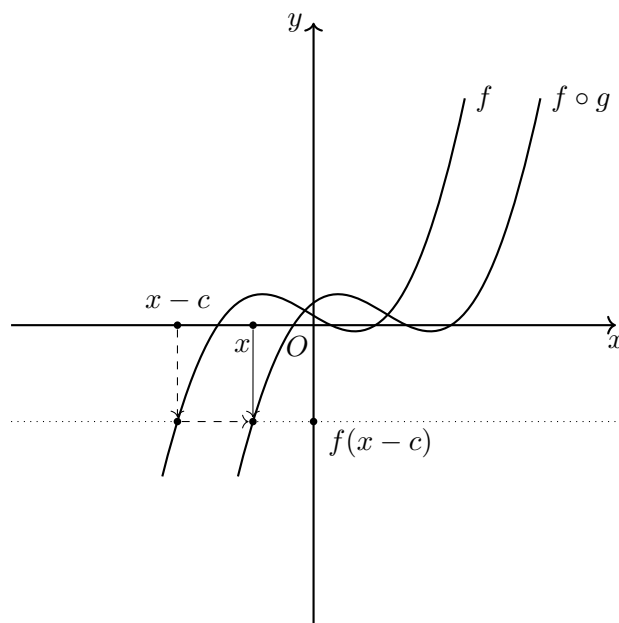
$$(x, f(x - c)).$$

Σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f , η γραφική παράσταση της $f \circ g$ είναι μετατοπισμένη παράλληλα στον άξονα $x'x$ κατά c . Αν μάλιστα το c είναι θετικό τότε αυτή είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά ενώ αν είναι αρνητικό είναι προς τα αριστερά, όπως φαίνεται και στα σχήματα 34 και 35.

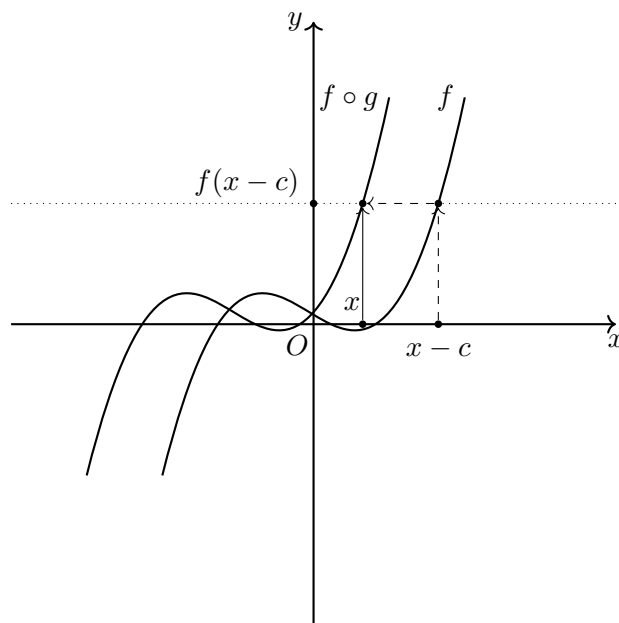
3.4.3 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με την συνάρτηση $g(x) = -x$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -f(x)$$



Σχήμα 34: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c > 0$



Σχήμα 35: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c < 0$

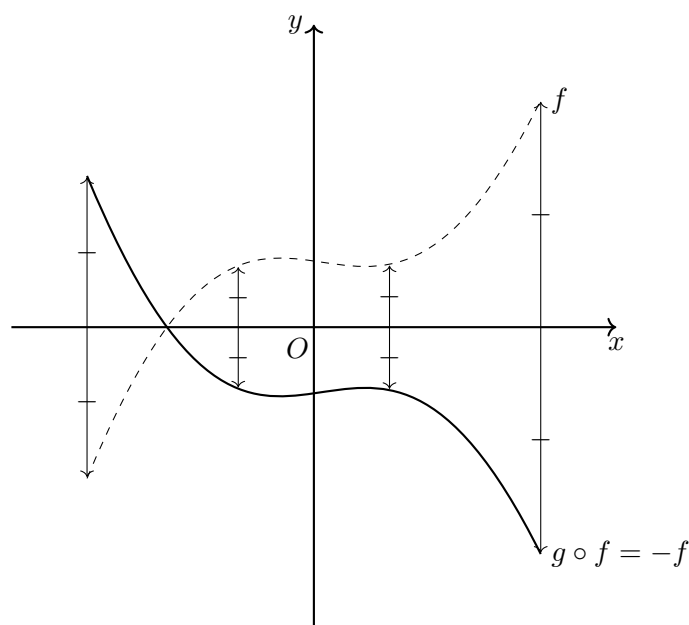
και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \\ &= D_f. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (g \circ f)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, -f(x)).$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της $g \circ f = -f$ είναι, ουσιαστικά, η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 36.



Σχήμα 36: Η γραφική παράσταση της $g \circ f = -f$

3.4.4 Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = -x$ με μία συνάρτηση f

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x)$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από εκείνους τους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ο αντίθετός τους ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-1, 4)$ τότε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $(-4, 1)$.

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (f \circ g)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, f(-x)).$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της $f \circ g$ είναι, ουσιαστικά, η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 37.

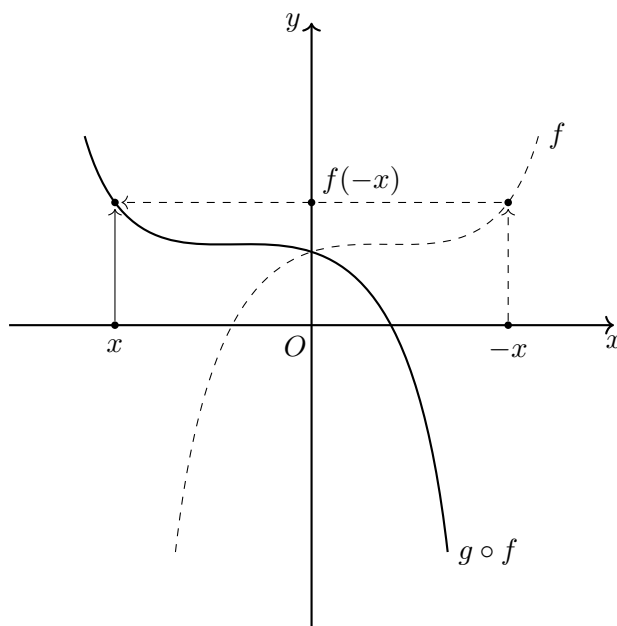
3.4.5 Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρτηση $g(x) = |x|$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \end{aligned}$$



Σχήμα 37: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$

$$= D_f.$$

Η γραφική παράσταση της $g \circ f = |f|$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (g \circ f)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, |f(x)|).$$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$$

δηλαδή, η γραφική παράσταση της $|f|$ συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της f όπου η f είναι μη αρνητική (δηλαδή βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή τον τέμνει) και με τη γραφική παράσταση της $-f$ όπου η f είναι αρνητική (δηλαδή βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$). Για παράδειγμα, για την συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 38, η $g \circ f = |f|$ έχει γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 39.

3.4.6 Η σύνθεση της $g(x) = |x|$ με μία συνάρτηση f

Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

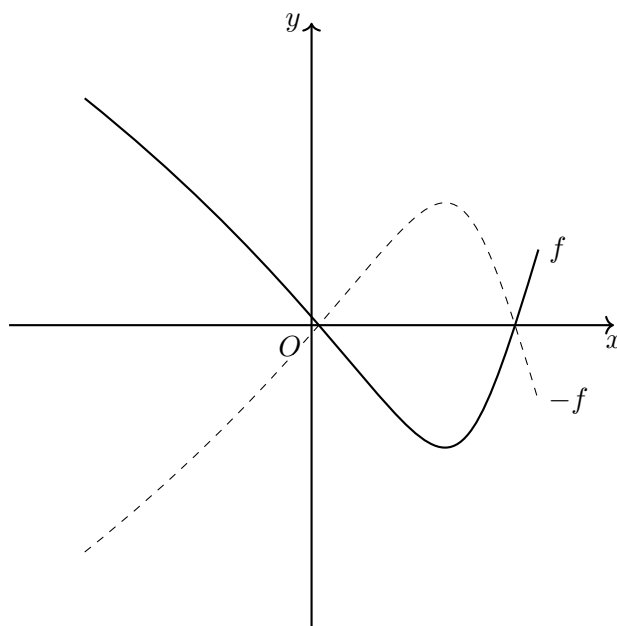
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|)$$

και πεδίο ορισμού:

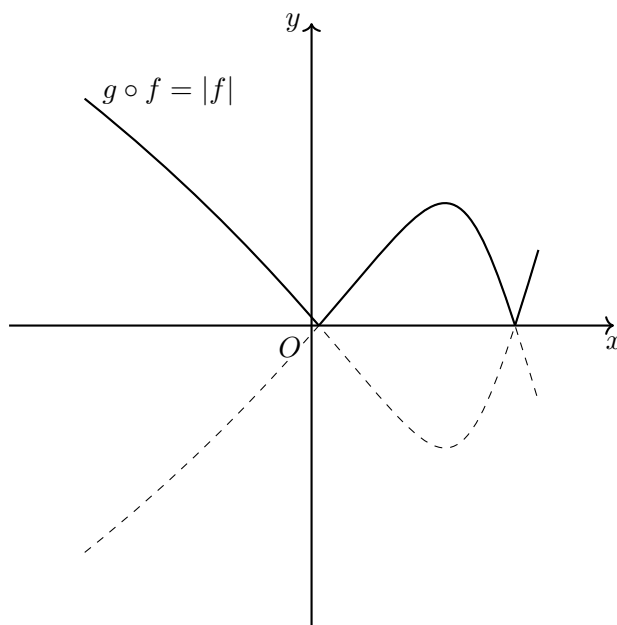
$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in D_f\} \end{aligned}$$

Εδώ είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι η παραπάνω σύνθεση, σε αντίθεση με τις άλλες που περιγράψαμε, ενδέχεται να μην ορίζεται πάντα. Αν, για παράδειγμα, $f(x) = \sqrt{-1-x}$, τότε η σύνθεση

$$(f \circ g)(x) = f(|x|) = \sqrt{-1-|x|}$$



Σχήμα 38: Η συνάρτηση f και η $-f$



Σχήμα 39: Η γραφική παράσταση της $g \circ f = |f|$

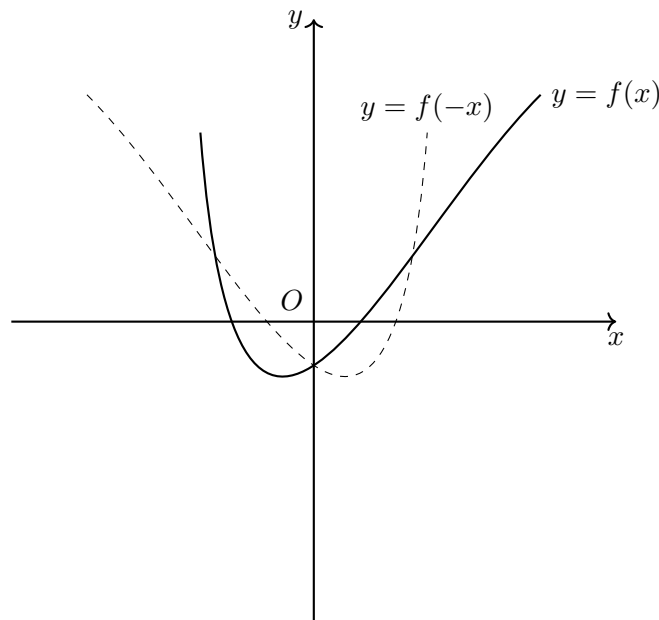
δεν έχει νόημα, καθώς $-1 - |x| \leq -1 < 0$ και δεν μπορούμε να μιλάμε για τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών³⁵.

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ περιέχει ακριβώς τα σημεία της μορφής $(x, f(|x|))$, δηλαδή τα σημεία της μορφής:

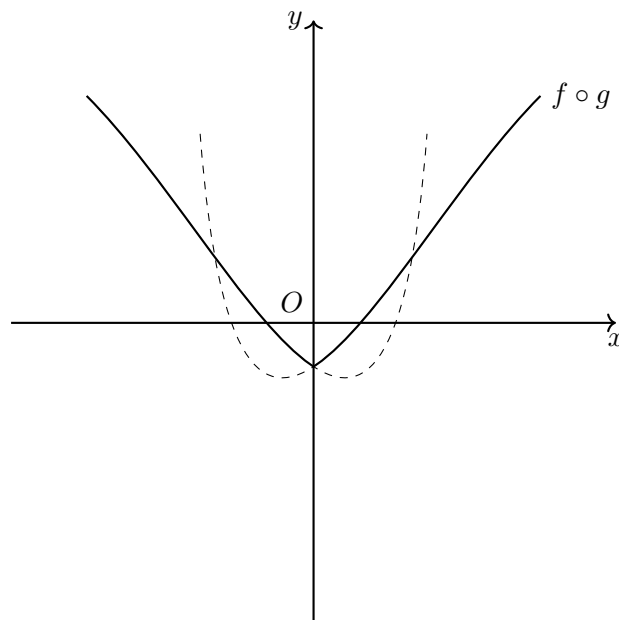
$$\begin{cases} (x, f(x)) & \text{αν } x \geq 0 \\ (x, f(-x)) & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

³⁵Γενικά, για να έχει νόημα η συνάρτηση $f(|x|)$ πρέπει η συνάρτηση f να μη «ζει» ολόκληρη στο αριστερό ημιεπίπεδο, δηλαδή πρέπει το πεδίο ορισμού της να περιέχει και μη αρνητικούς αριθμούς (στο παράδειγμά μας, το πεδίο ορισμού της συνάρτησής μας ήταν το $(-\infty, -1]$).

Ουσιαστικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$ είναι, για $x \geq 0$ η γραφική παράσταση της f και, για $x < 0$, η γραφική παράσταση της $f(-x)$, αρκεί το $-x$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Με άλλα λόγια, είναι το τμήμα της γραφικής παράστασης της f δεξιά από τον άξονα $y'y$ και το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 40, η $f(|x|)$ έχει γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 41.



Σχήμα 40: Η γραφική παράσταση της $f(x)$ και της $f(-x)$



Σχήμα 41: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$

Επομένως, έχουμε εμπλουτίσει αρκετά το «οπλοστάσιό» μας σε ό,τι αφορά το για ποιες συναρτήσεις μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική τους παράσταση. Ωστόσο, οι δυνατότητές μας παραμένουν ακόμα αρκετά περιορισμένες, καθώς δεν έχουμε τα εργαλεία να χαράξουμε γραφικές

παραστάσεις όπως, για παράδειγμα, της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln x + x$$

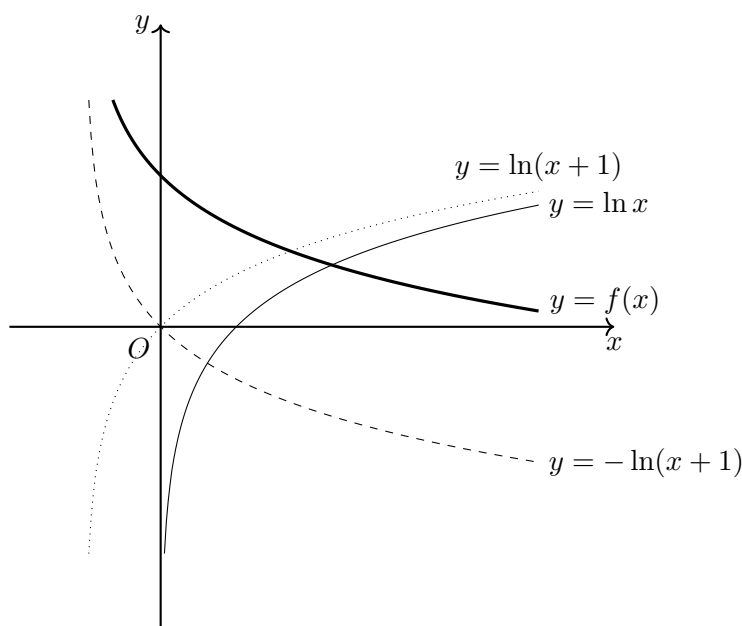
που είναι απλώς το άθροισμα δύο συναρτήσεων με γνωστή γραφική παράσταση. Αλλά αυτά τα απαραίτητα εργαλεία θα τα αναπτύξουμε στην πορεία. Ας δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων χρησιμοποιώντας και τις νέες μας γνώσεις.

Παράδειγμα 14

Αν $f(x) = 2 - \ln(x+1)$, με $x > -1$, τότε για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$,
2. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1, παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\ln(x+1)$,
3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της $\ln(x+1)$ ως προς τον άξονα x' παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1)$ και, τέλος,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1) + 2$, δηλαδή της f .

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 42.



Σχήμα 42: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \ln(x+1)$

Παράδειγμα 15

Αν $f(x) = \left| \frac{1}{2-x} \right|$, με $x \neq 2$ τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα³⁶:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$,

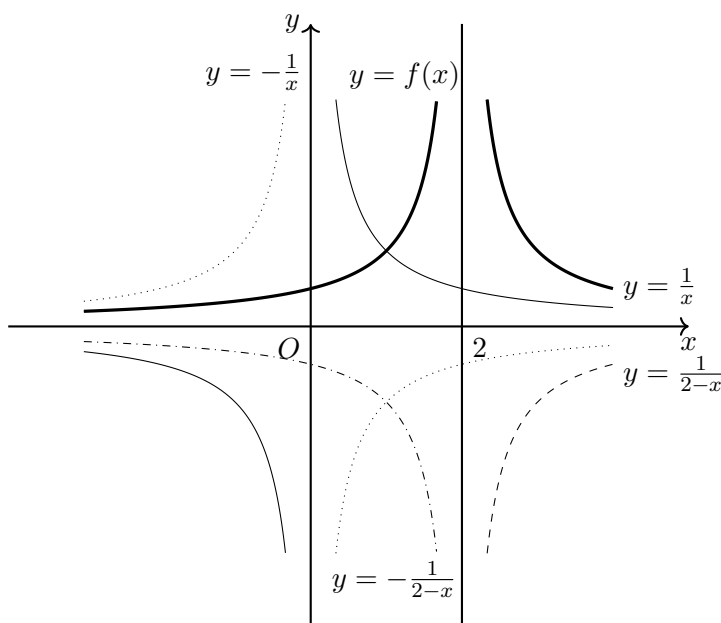
³⁶ Ίσως μας βοηθήσει να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f(x) = \left| \frac{1}{-(x-2)} \right|$$

έτσι ώστε να φαίνεται η οριζόντια μεταφορά κατά 2 προς τα δεξιά.

2. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\frac{1}{x}$, δηλαδή της $\frac{1}{-x}$,
3. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{-(x-2)}$, δηλαδή τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{2-x}$, και, τέλος,
4. σχεδιάζοντας και τη συμμετρική της $\frac{1}{2-x}$ ως προς τον άξονα $x'x$ και κρατώντας τα τμήματα που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\left| \frac{1}{-(x-2)} \right|$, δηλαδή της f .

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 43.



Σχήμα 43: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \left| \frac{1}{2-x} \right|$

Παράδειγμα 16

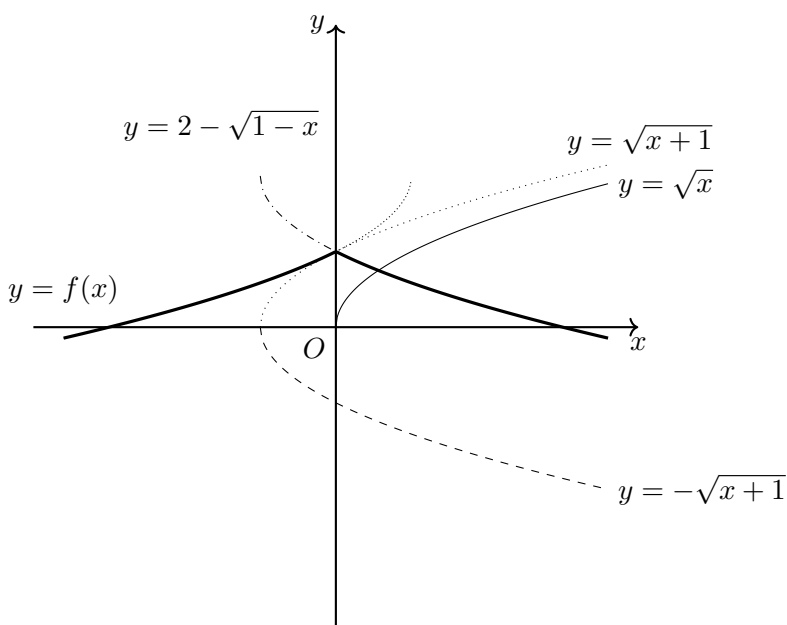
Αν $f(x) = 2 - \sqrt{1+|x|}$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x}$,
2. με μία μετατόπιση κατά 1 προς τα αριστερά σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x - (-1)}$, δηλαδή της $\sqrt{x+1}$,
3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\sqrt{x+1}$,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 προς τα πάνω παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{x+1}$ και, τέλος,
5. σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1-x}$ και κρατώντας, αν $x \geq 0$ τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1+x}$ και αν $x < 0$ τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1-x}$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1+|x|}$, δηλαδή της $f(x)$.

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 44.

Παρατήρηση 8

Στη συνέχεια της ύλης θα ασχοληθούμε, ως επί το πλείστον, με συναρτήσεις των οποίων το πεδίο



Σχήμα 44: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{1 + |x|}$

ορισμού θα είναι είτε διάστημα είτε ένωση διαστημάτων.

3.5 Συμμετρικές συναρτήσεις — Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Υπάρχουν κάποιες ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων οι οποίες μας απασχολούν συχνά λόγω κάποιων ιδιαίτερων χαρακτηριστικών. Δύο εξ αυτών είναι οι άρτιες και οι περιττές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν και οι δύο γραφικές παραστάσεις με κάποια μορφή συμμετρίας.

3.5.1 Άρτιες συναρτήσεις

Ορισμός 8 (Άρτια συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται άρτια αν:

1. το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ έχουμε και $-x \in A$ και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(-x) = f(x).$$

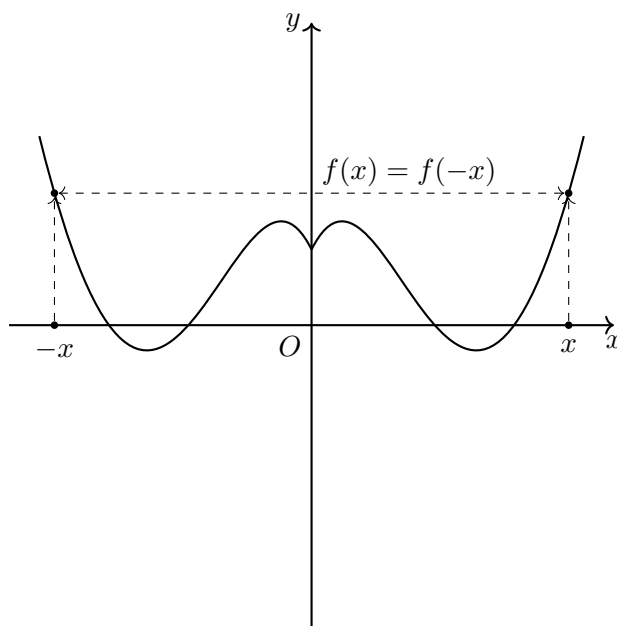
Για παράδειγμα, μία άρτια συνάρτηση είναι η $f(x) = x^2$. Μάλιστα, οι άρτιες συναρτήσεις οφείλουν το όνομά τους σε αυτήν την συνάρτηση και στις «εξαδέλφες» της, τις $f(x) = x^\nu$, όπου ν άρτιος (ζυγός) αριθμός. Εν γένει, μία συνάρτηση που είναι άρτια έχει την εξής ιδιότητα:

$$f(x) = f(|x|)$$

καθώς, αν $x \geq 0$ τότε $|x| = x$, ενώ αν $x < 0$ τότε έχουμε $|x| = -x$ και, αφού η f είναι άρτια:

$$f(|x|) = f(-x) = f(x).$$

Εποπτικά, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f , εφ' όσον συμπίπτει με την $f(|x|)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y/y , όπως φαίνεται και στο σχήμα 45.



Σχήμα 45: Μία άρτια συνάρτηση

3.5.2 Περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 9 (Περιττή συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται περιττή αν:

1. το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ έχουμε και $-x \in A$ και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(-x) = -f(x).$$

Για παράδειγμα, μία περιττή συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3$. Μάλιστα, όπως και με τις άρτιες συναρτήσεις, έτσι και οι περιττές οφείλουν τον όνομά της σε αυτήν και τις «εξαδέλφες» της, τις $f(x) = x^\nu$, όπου ν περιττός (μονός) αριθμός. Σε ό,τι αφορά τις περιττές συναρτήσεις, δεν έχουμε συμμετρία ως προς κάποιον άξονα, αλλά κεντρική συμμετρία, δηλαδή συμμετρία ως προς κάποιο σημείο (κέντρο). Μάλιστα, το κέντρο συμμετρίας κάθε περιττής συνάρτησης είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 46.

Παρατήρηση 9

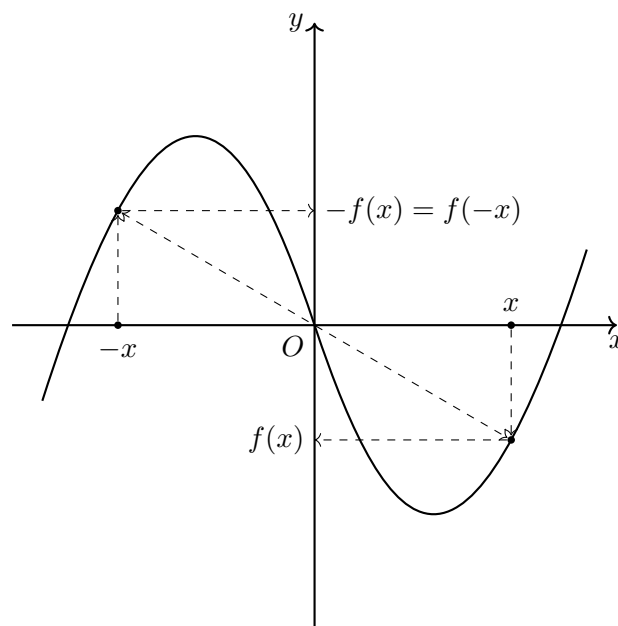
Να παρατηρήσουμε ότι αναγκαία συνθήκη³⁷ για να είναι μία συνάρτηση περιττή είναι να ισχύει ότι $f(0) = 0$, αν φυσικά το 0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = -f(x)$$

τότε, για $x = 0$ παίρνουμε:

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

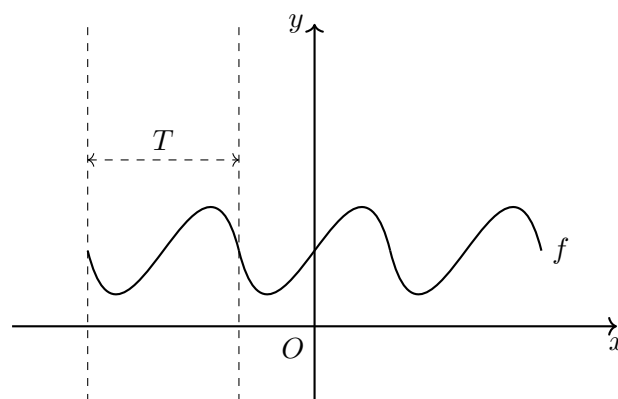
³⁷Αναγκαία λέγεται μία συνθήκη για ένα γεγονός αν, όταν αυτή η συνθήκη δεν ισχύει, δεν πραγματοποιείται ούτε το εν λόγω γεγονός. Για παράδειγμα, αναγκαία συνθήκη για να φάει κάποιος είναι να έχει φαγητό.



Σχήμα 46: Μία περιττή συνάρτηση

3.6 Περιοδικές συναρτήσεις

Διάφορα φαινόμενα στην φύση επαναλαμβάνονται με συγκεκριμένο τρόπο κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα, όπως, π.χ. η περιφορά της Γης γύρω από τον ήλιο, η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, η ταλάντωση μίας κούνιας σε μία παιδική χαρά κ.α.. Όλα αυτά τα φαινόμενα και όλες αυτές οι κινήσεις μπορούν να περιγραφούν από συναρτήσεις που «μιμούνται» αυτήν την περιοδικότητα, παίρνοντας, ανά κάποια διαστήματα, τις ίδιες τιμές, όπως φαίνεται στο σχήμα 47. Προχωράμε τώρα στον τυπικό ορισμό μιας περιοδικής συνάρτησης.



Σχήμα 47: Μία περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 10 (Περιοδική συνάρτηση)

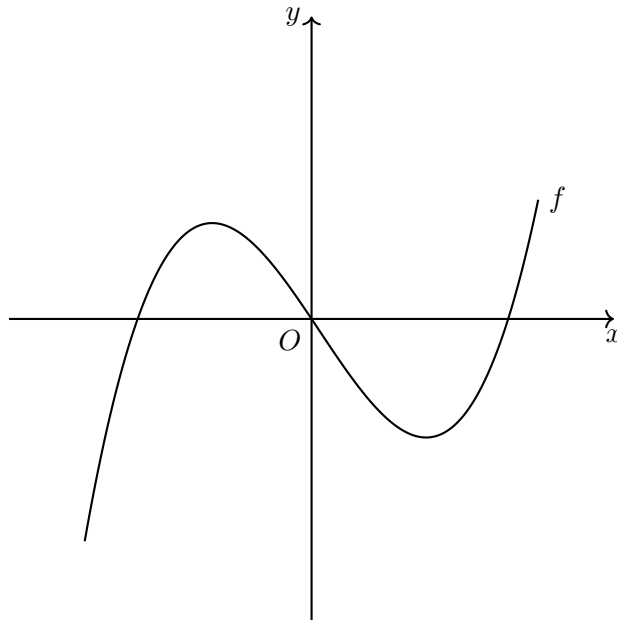
Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται T -περιοδική αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x + T) = f(x).$$

Τέτοιες συναρτήσεις είναι επίσης όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημ x , συν x κ.λπ.).

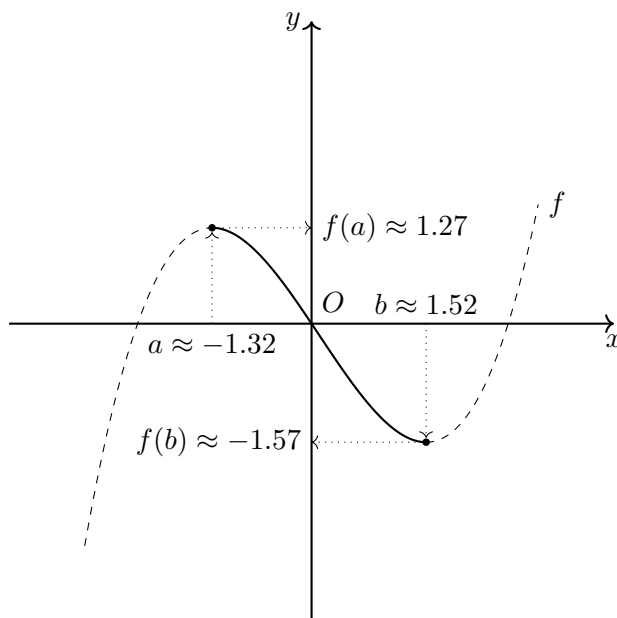
4 Μονοτονία και ακρότατα συναρτήσεων

Ας παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα 48. Βλέ-



Σχήμα 48: Η συνάρτηση f

πουμε ότι υπάρχουν διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης, «διασχίζοντάς» την από αριστερά προς τα δεξιά, «ανεβαίνει» ενώ σε άλλα διαστήματα «κατεβαίνει», όπως φαίνεται και στο σχήμα 49. Επίσης, παρατηρούμε ότι στο σημείο $(a, f(a))$ η f σταματάει να «ανεβαί-

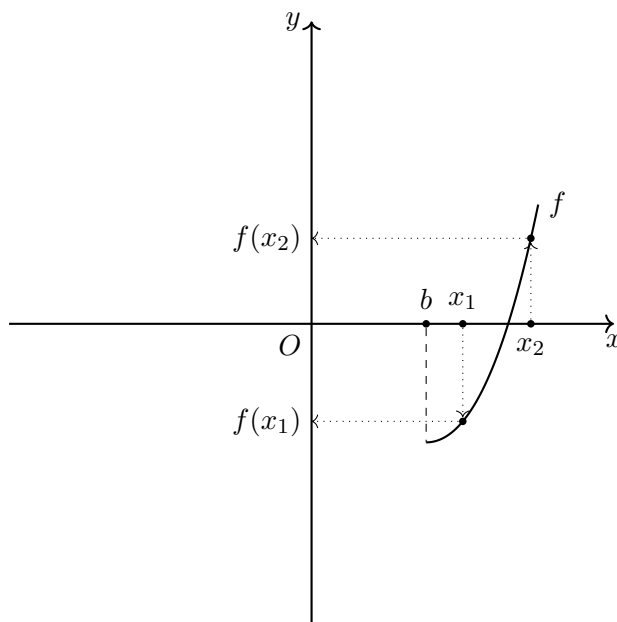


Σχήμα 49: Μονοτονία και ακρότατα της συνάρτησης f

νει» και αρχίζει να «κατεβαίνει» ενώ στο σημείο $(b, f(b))$ συμβαίνει το αντίθετο: η f σταματάει την κάθοδό της και αρχίζει να «ανεβαίνει» ξανά. Όλα αυτά θα τα μελετήσουμε με αυστηρούς μαθηματικούς όρους σε αυτήν την ενότητα.

4.1 Μονοτονία συναρτήσεων

Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε με μαθηματικούς όρους το γεγονός ότι η συνάρτηση f του σχήματος 49 «ανεβαίνει» στο διάστημα $[b, +\infty)$ καθώς κινούμαστε από αριστερά προς τα δεξιά; Ας απομονώσουμε αυτό το τμήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 50. Παρατηρούμε ότι, αν διαλέξουμε



Σχήμα 50: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[b, +\infty)$

δύο αριθμούς x_1 και x_2 στο $[b, +\infty)$ έτσι ώστε $x_1 < x_2$, δηλαδή αν το x_2 είναι δεξιότερα του x_1 , τότε, αφού η γραφική παράσταση της f ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει η τιμή $f(x_2)$ να είναι μεγαλύτερη από την τιμή $f(x_1)$. Επομένως, η εποπτική εικόνα που έχουμε μεταφράζεται στο εξής:

Για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Αυτήν ακριβώς την ιδέα παίρνουμε και ορίζουμε τις γνησίως αύξουσες³⁸ συναρτήσεις.

Ορισμός 11 (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

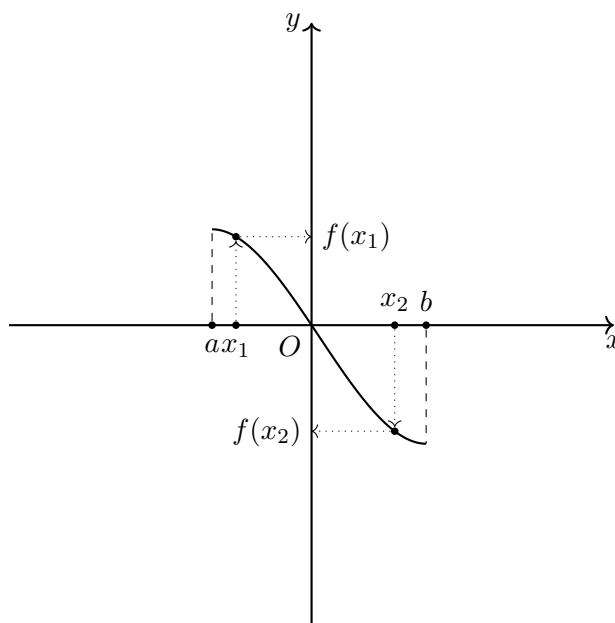
Ανάλογα μπορούμε να περιγράψουμε και το γεγονός ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f κατεβαίνει στο διάστημα $[a, b]$ καθώς κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επιλέγουμε $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$ και, όπως φαίνεται και στο σχήμα 51, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, αφού, κινούμενοι από αριστερά προς τα δεξιά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης κατεβαίνει. Έτσι, φυσιολογικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό για της γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις.

Ορισμός 12 (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

³⁸ Δηλαδή αυτές που ανεβαίνουν.



Σχήμα 51: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$

Τέλος, θα λέμε ότι μία συνάρτηση είναι *γνησίως μονότονη* αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

4.2 (Τοπικά) ακρότατα συνάρτησης

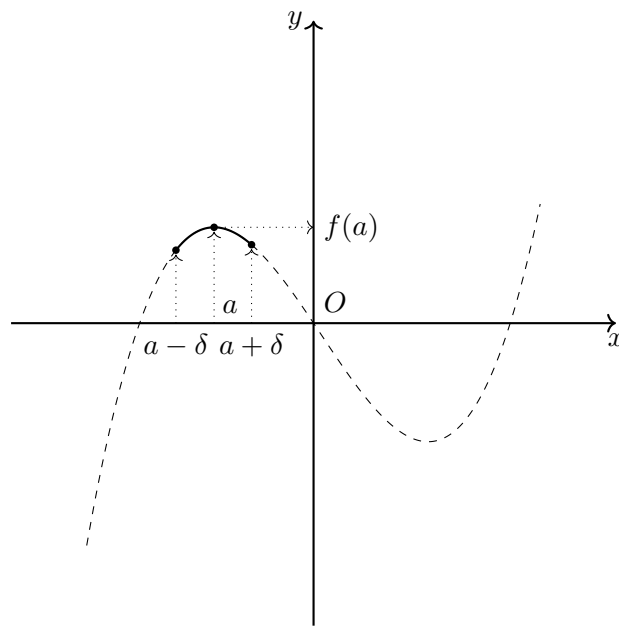
Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όπως φαίνεται στο σχήμα 48, υπάρχουν δύο σημεία, τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ (όπου $a \approx -1.32$, $b \approx 1.52$, $f(a) \approx 1.27$ και $f(b) \approx -1.57$) τα οποία έχουν πιο «ξεχωριστές» θέσεις στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Πιο συγκεκριμένα, αν περιοριστούμε «κοντά» στο a τότε παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 52, ότι η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το $f(a) \approx 1.27$. Αντίστοιχα, αν περιοριστούμε «κοντά» στο b τότε παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 53, ότι η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές μικρότερες από το $f(b) \approx -1.57$. Το ζήτημα είναι πώς θα ερμηνεύσει κανείς, στη γλώσσα των μαθηματικών, την έννοια του «κοντά»³⁹. Το «κοντά» στα μαθηματικά, δεδομένου ότι δεν υπάρχει σαφές πλαίσιο αναφοράς, όπως στην καθημερινή ζωή, δεν μπορεί να οριστεί με βάση κάποια μονάδα. Για παράδειγμα, λέμε ότι κάποιος είναι κοντά στην Αθήνα, ταξιδεύοντας με το αμάξι αν έχει περάσει, λ.χ. την Ελευσίνα, αλλά, προφανώς, δεν μπορούμε να λέμε στα μαθηματικά ότι κοντά είναι ότι απέχει λιγότερο από, π.χ. 1. Έτσι, η έννοια του «κοντά», άρα και γενικότερα η έννοια της τοπικότητας, στα μαθηματικά, είναι, εν γένει αυθαίρετη. Θα λέμε λοιπόν ότι μία ιδιότητα ισχύει «κοντά σε ένα αριθμό x » αν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ έτσι ώστε αυτή η ιδιότητα να ισχύει στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$. Ας προσέξουμε ότι το δ μπορεί να είναι όσο μικρό ή μεγάλο θέλουμε, αρκεί να είναι θετικό και όχι μηδέν. Ας προσέξουμε επίσης ότι αν μία ιδιότητα ισχύει σε ένα διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$, τότε, προφανώς ισχύει και πιο «κοντά» στο x , δηλαδή αν $\delta' < \delta$, τότε η ίδια ιδιότητα θα ισχύει και στο $(x - \delta', x + \delta')$.

Με αυτά κατά νου, προχωράμε στον ορισμό της έννοιας του τοπικού μεγίστου.

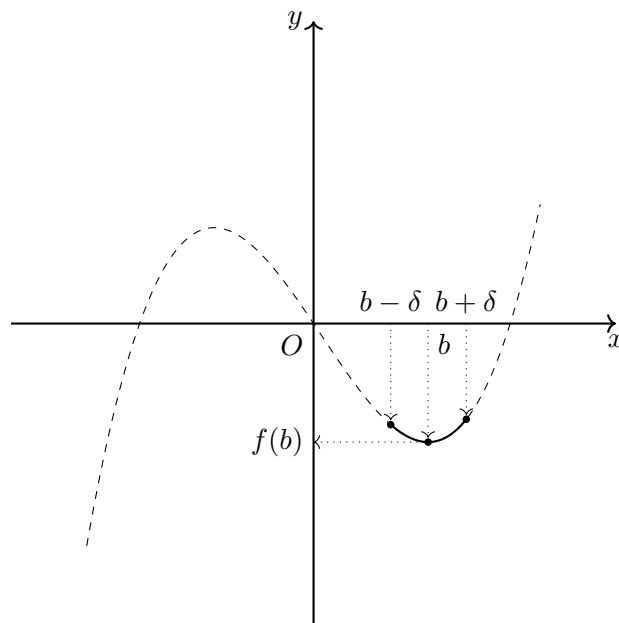
Ορισμός 13 (Τοπικό μέγιστο)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο

³⁹ Δε θα ήταν υπερβολή να λέγαμε ότι, αυτή η έννοια του κοντά είναι αυτή που μας θα μας απασχολήσει σε όλη την έκταση της ύλης από εδώ και έπειτα.



Σχήμα 52: Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a , το $f(a)$.



Σχήμα 53: Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο b , το $f(b)$.

$x_0 \in A$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε⁴⁰ $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f .

Ανάλογα, δίνουμε και τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου.

Ορισμός 14 (Τοπικό μέγιστο)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο

⁴⁰ Δεν λέμε απλώς $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ διότι αυτό θα μας εξασφάλιζε μόνο το «κοντά». Εμείς, εκτός από κοντά στο x_0 , θέλουμε να είμαστε και μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, για να έχει νόημα το σύμβολο $f(x)$.

$x_0 \in A$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *τοπικό ελάχιστο* της συνάρτησης f .

Παρατήρηση 10

Μία συνάρτηση μπορεί να έχει περισσότερα από ένα τοπικά ελάχιστα και περισσότερα από ένα τοπικά μέγιστα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει άπειρα τοπικά ελάχιστα και άπειρα τοπικά μέγιστα.

Τέλος, υπάρχει και η έννοια του ολικού ακροτάτου ή οποία αντιστοιχεί σε συναρτήσεις όπου κάποιο από τα τοπικά ακρότατα αποτελεί και μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Επομένως, οι αντίστοιχοι ορισμοί είναι οι εξής:

Ορισμός 15 (Ολικό μέγιστο)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_0 \in A$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *ολικό μέγιστο* της συνάρτησης f .

Ορισμός 16 (Ολικό ελάχιστο)

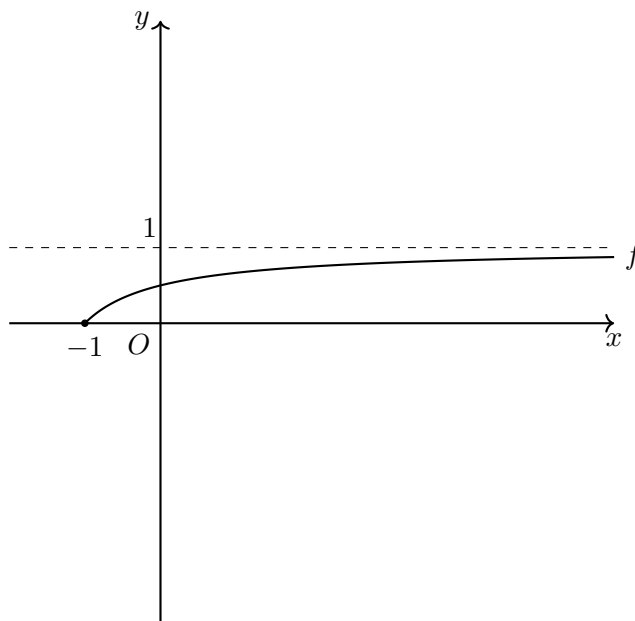
Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in A$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *ολικό ελάχιστο* της συνάρτησης f .

Παρατήρηση 11

Ας δούμε τη συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$ με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 54. Παρατηρούμε, αρχικά, ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο -1 ,



Σχήμα 54: Η συνάρτηση f

το $f(-1) = 0$. Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$f(x) < 1$$

και, η f «πλησιάζει απερίοριστα»⁴¹ την ευθεία $y = 1$, άρα οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε την τιμή 1. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποιος αριθμός $x_0 \in [-1, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 1$, επομένως η f **δεν** παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, ακόμα και αν όλες οι τιμές της f είναι μικρότερες από το 1.

Αν μας έχει δοθεί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, είναι αρκετά εύκολο να εντοπίσουμε τα ακρότατα και τα διαστήματα στα οποία αυτή είναι μονότονη, όμως, δεδομένου ότι δεν έχουμε ακόμα τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε με ακρίβεια τη γραφική παράσταση αρκετών συναρτήσεων, θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα στα οποία βρίσκουμε τα παραπάνω στοιχεία χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον τύπο της συνάρτησης και τους ορισμούς που δώσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 17

Αν $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$, με $x \in (2, +\infty)$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2}} > \frac{1}{\sqrt{x_2 - 2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1 - 2}} > \frac{2}{\sqrt{x_2 - 2}} \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

επομένως, αφού έχουμε ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

Παράδειγμα 18

Αν $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \quad (2)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$x_1^5 + x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^5 + x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 19

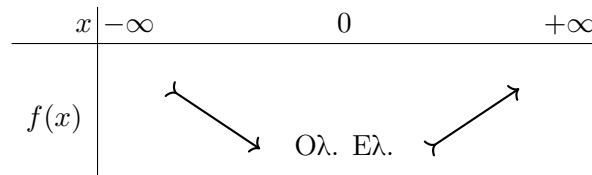
Αν $f(x) = \ln(1 + x^2)$, με $x \in \mathbb{R}$ τότε, για την μονοτονία της f πρέπει να είμαστε πρώτα λίγο προσεκτικοί. Αν ξεκινήσουμε όπως πριν και πάρουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε δεν μπορούμε να πάμε και πολύ παρακάτω, διότι η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

δεν είναι αληθής για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (πάρτε, για παράδειγμα $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$). Επίσης, δεν ισχύει ούτε η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

⁴¹ Αυτή η έννοια θα μας απασχολήσει επίσης σε όλη σχεδόν την έκταση της ύλης.



Πίνακας 1: Η μονοτονία και τα ακρότατα της f .

οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε όπως πριν, «χτίζοντας» τον τύπο της f . Είμαστε όμως αρκετά τυχεροί έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο ακόλουθες ανισότητες⁴²:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in [0, +\infty)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (-\infty, 0].$$

Επομένως, μπορούμε να εργαστούμε ξεχωριστά στα δύο διαστήματα $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$. Έστω, λοιπόν, πρώτα $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 < 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) < \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 > 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) > \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Εδώ, μπορούμε, επιπρόσθετα, να έχουμε και ένα συμπέρασμα για τα ακρότατα της f . Ξεκινώντας από τη γνωστή ανισότητα $x^2 \geq 0$, έχουμε, διαδοχικά:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x^2) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = 0$, έχουμε ότι:

$$f(x) \geq f(0)$$

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$. Όλα αυτά μπορούμε να τα αναπαραστήσουμε και σε έναν πίνακα όπως ο πίνακας 1

⁴²Για την απόδειξή τους μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμών είτε να παρατηρήσετε ότι και οι δύο προκύπτουν άμεσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$.

Παράδειγμα 20

Αν $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ με $x \in \mathbb{R}$, τότε, δεν μπορούμε να πούμε κάτι για τη μονοτονία της f με σχετική ευκολία⁴³, μπορούμε όμως να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, ας ξαναγράψουμε τον τύπο της συνάρτησης f ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x - 1}{1 + \sin^2 x} = \\ &= \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} - \frac{1}{1 + \sin^2 x} = 1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Τώρα, από τις ανισότητες $y^2 \geq 0$ και $\sin x \leq 1$ παίρνουμε την ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

οπότε, διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin^2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 1 + \sin^2 x \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \frac{1}{1 + \sin^2 x} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -1 &\leq -\frac{1}{1 + \sin^2 x} \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - 1 &\leq 1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x} \leq 1 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq f(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1+0} = 0$, έχουμε ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$$

οπότε, από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\frac{\pi}{2}$, το 0, ενώ από τη δεύτερη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $\frac{1}{2}$.

5 Συναρτήσεις 1-1 — Αντίστροφη συνάρτηση

Περιγράψαμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ σαν μία διαδικασία, μία αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο σύνολα που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του συνόλου A σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο του συνόλου B . Κανείς όμως δε μας εγγυάται ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται και σε ένα **διαφορετικό** στοιχείο του συνόλου B . Με άλλα λόγια, για κάθε συνάρτηση ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

αλλά δεν ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις τη συνεπαγωγή:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα, μιας και:

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

⁴³ Αν θέλει κάποιος μπορεί να αξιοποιήσει την μονοτονία της συνάρτησης $\sin x$ στα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[\pi, 2\pi]$ καθώς και το πρόσημο της συνάρτησης $\sin x$ και να προσπαθήσετε να «χτίσετε» τον τύπο της f .

Υπάρχουν άραγε συναρτήσεις για τις οποίες να ισχύει αυτή η συνεπαγωγή; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική και κανείς το βλέπει αυτό παίρνοντας σαν παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = x$, για την οποία η συνεπαγωγή ισχύει προφανώς.

Αυτές τις συναρτήσεις που στέλνουν κάθε ένα στοιχείο του A σε ένα διαφορετικό στοιχείο του B τις ονομάζουμε 1-1. Δίνουμε και τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό αυτής της έννοιας που θα είναι το κεντρικό αντικείμενο αυτής της ενότητας:

Ορισμός 17 (1-1 συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται 1-1 αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Ομολογουμένως, όλες οι μαθηματικές προτάσεις που έχουν μέσα τους το σύμβολο του $\neq$ ή, γενικά, κάποιου είδους άρνηση, είναι πιο δύσκολοι, για αυτό και συχνά καταφεύγουμε σε ένα λογικό τέχνασμα, αυτό της *αντιθετοαντίστροφης*. Γενικότερα, αν έχουμε μία πρόταση της μορφής:

$$A \Rightarrow B$$

τότε αυτή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της, η οποία είναι η:

$$\text{όχι } B \Rightarrow \text{όχι } A.$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα, για να το αποσαφηνίσουμε. Θεωρούμε την πρόταση⁴⁴:

Αν βρέξει τότε θα πάρω ομπρέλα

η οποία είναι της μορφής $A \Rightarrow B$. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεν έχει βρέξει, τότε δε θα έχω πάρει ομπρέλα, άρα, είναι ισοδύναμο με την πρόταση:

Αν **δεν** βρέχει τότε **δεν** θα έχω πάρει ομπρέλα,

η οποία είναι ακριβώς η πρόταση «όχι $B \Rightarrow$ όχι A ».

Επιστρέφοντας στις 1-1 συναρτήσεις, η πολύ χρήσιμη αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή του ορισμού της 1-1 συνάρτησης είναι η ακόλουθη (την παραθέτουμε σαν «εναλλακτικό ορισμό» και θα χρησιμοποιούμε αυτήν τη μορφή κυρίως).

Πρόταση 1 (Αντιθετοαντίστροφος του ορισμού της 1-1 συνάρτησης)

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται 1-1 αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Παράδειγμα 21

Αν $f(x) = \ln(2x + 3)$, $x > -\frac{3}{2}$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, αν $x, y > -\frac{2}{3}$ με $f(x) = f(y)$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \ln(2x + 3) = \ln(2y + 3) \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^{\ln(2y+3)} \\ &\Leftrightarrow 2x + 3 = 2y + 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 2y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα, από το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού, η f είναι 1-1.

⁴⁴Συνηθίζουμε την λογική συνεπαγωγή $\Rightarrow$ να τη μεταφράζουμε στην καθημερινή μας γλώσσα ως «Αν... τότε...».

Παραθέτουμε τώρα, μία πολύ σημαντική πρόταση για το πότε μία συνάρτηση είναι 1-1.

Πρόταση 2

Μία γνησίως μονότονη⁴⁵ συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ είναι κάποιο διάστημα, είναι 1-1.

Απόδειξη

Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας⁴⁶ ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω επίσης, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι 1-1. Δηλαδή, υπάρχουν δύο αριθμοί $x, y \in A$ με $x \neq y$ αλλά $f(x) = f(y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. αν $x < y$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα πρέπει να έχουμε $f(x) < f(y)$, άτοπο,
2. αν $x > y$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα πρέπει να έχουμε $f(x) > f(y)$, άτοπο.

Άρα, σε κάθε περίπτωση καταλήξαμε σε αντίφαση με την υπόθεσή μας, επομένως αυτή δεν ισχύει και ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι η f είναι 1-1.

5.1 Εποπτική ερμηνεία της 1-1 ιδιότητας

Πώς αναγνωρίζουμε μία 1-1 συνάρτηση από τη γραφική της παράσταση; Έχουν κάτι το ιδιαίτερο αυτές οι συναρτήσεις που να τους δίνει μία ξεχωριστή μορφή; Και σε αυτό το ερώτημα η απάντηση είναι καταφατική. Ας σκεφτούμε λίγο. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $(x, f(x))$. Τι σημαίνει ότι αν $x \neq y$ τότε και $f(x) \neq f(y)$ εποπτικά. Σημαίνει ότι αυτά τα σημεία δεν μπορούν να βρίσκονται και τα δύο σε μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, διότι τότε, θα έπρεπε η κλίση αυτής της ευθείας να είναι 0, δηλαδή:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0 \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

που είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχουν δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκονται στην ίδια παράλληλη ευθεία με τον $x'x$ ή, ισοδύναμα κάθε ευθεία της μορφής $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f **το πολύ** σε ένα σημείο! Το τελευταίο είναι εμφανές στο σχήμα 55.

5.2 Αντίστροφη συνάρτηση

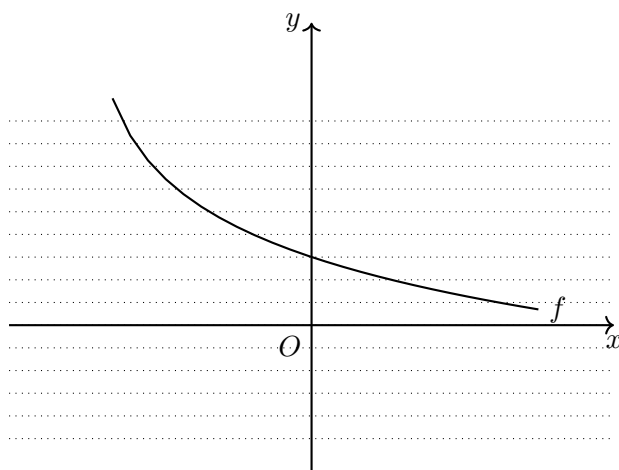
Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία 1-1 συνάρτηση. Αν θεωρήσουμε την $f : A \rightarrow f(A)$, δηλαδή αν αντί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, πάρουμε ακριβώς το σύνολο τιμών της f , τότε, προφανώς, δεν αλλάζει κάτι, παρά μόνο το ότι ίσως να «πετάμε» έξω κάποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ και, για την ακρίβεια, «πετάμε» όσους αριθμούς δεν είναι τιμές της συνάρτησης f . Αν πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και, αντ' αυτού γράψουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, δεν άλλαξε τίποτα, γιατί, ούτως ή άλλως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα οι αριθμοί που «πετάξαμε» (όλοι οι αρνητικοί), ούτως ή άλλως δεν ανήκαν στο σύνολο τιμών της f .

Θεωρώντας λοιπόν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ η οποία είναι 1-1, παρατηρούμε ότι **για κάθε** $y \in f(A)$ υπάρχει ένα⁴⁷ $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$ και, αφού η f είναι ένα προς ένα, αυτό είναι και **μοναδικό**. Μας θυμίζει κάτι αυτό; Μα, αυτός δεν είναι ο ορισμός μίας συνάρτησης

⁴⁵Προς το παρόν, το να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη είναι εξίσου δύσκολο με το να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι 1-1. Ωστόσο, αργότερα θα έχουμε αναπτύξει αρκετά εργαλεία που θα κάνουν την εύρεση της μονοτονίας μίας συνάρτησης αρκετά ευκολότερη.

⁴⁶Και ποιος την έβλαψε τη γενικότητα; Όταν λέμε στα μαθηματικά «χωρίς βλάβη της γενικότητας», εννοούμε ότι το να διαλέξουμε ένα από πολλά ενδεχόμενα δεν επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε την απόδειξή μας. Αν, ας πούμε, έπρεπε να κάνουμε κάτι άλλο για την περίπτωση που η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε δεν θα μπορούσαμε να το πούμε αυτό (ναι, αλλά αφού δεν μπαίνουμε στον κόπο να δούμε τι γίνεται, πού ξέρουμε ότι δε χρειάζεται κάτι διαφορετικό;).

⁴⁷Αφού ανήκει στο σύνολο τιμών της f , πρέπει να είναι τιμή της f .



Σχήμα 55: Μία 1-1 συνάρτηση

$g : f(A) \rightarrow A$ η οποία «στέλνει» κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $y = f(x)$; Αυτήν ακριβώς τη συνάρτηση την ονομάζουμε *αντίστροφη συνάρτηση της f* και τη συμβολίζουμε με ⁴⁸ f^{-1} . Ακολουθεί και ο τυπικός μαθηματικός ορισμός.

Ορισμός 18 (Αντίστροφη συνάρτηση)

Αν $f : A \rightarrow f(A)$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ να είναι η συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ και γράφουμε:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Αυτή η συνάρτηση λέγεται *αντίστροφη της f* και η f σε αυτήν την περίπτωση λέγεται *αντιστρέψιμη*.

Παρατήρηση 12

Το να είναι η f 1-1 είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη. Με άλλα λόγια, μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν είναι και 1-1. Το ότι αν είναι 1-1 μία συνάρτηση τότε ορίζεται και η αντίστροφή της, μόλις το είδαμε. Αν, τώρα, μία συνάρτηση δεν είναι 1-1, τότε δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε το μονοσήμαντο που απαιτείται για να ορίσουμε την f^{-1} και, ως εκ τούτου, δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατήρηση 13

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης είδαμε ότι αυτή αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει ότι

$$y = f(x)$$

δηλαδή:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Αντικαθιστώντας όπου y το $f(x)$, παίρνουμε την ακόλουθη πολύ σημαντική σχέση:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Δηλαδή, η f^{-1} «αναίρει» τη «δουλειά» που κάνει η f με το x και μας δίνει ξανά το x , πράγμα που δικαιολογεί και την ονομασία της.

Αντίστοιχα, αν στη σχέση:

$$f(x) = y$$

⁴⁸Προσοχή! Προσοχή! Προσοχή! Καμμία σχέση δεν έχει, εν γένει, η $\frac{1}{f}$ με την f^{-1} . Καμμία! Καμμία!

αντικαταστήσουμε όπου x το $f^{-1}(y)$, παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση:

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

για κάθε $y \in f(A)$, που μας δείχνει ότι και η f «αναιρεί» τη «δουλειά» που κάνει η f^{-1} με το y .

5.3 Εύρεση της αντίστροφης μίας συνάρτησης — Εύρεση συνόλου τιμών μίας συνάρτησης

Ωραία τα είπαμε, δώσαμε και τον ορισμό, αλλά στη βράση κολλάει το σίδερο. Μας δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x + 3)$, με $x > -\frac{3}{2}$ η οποία, όπως είδαμε παραπάνω, είναι 1-1, άρα είναι και αντιστρέψιμη. Ποια είναι η αντίστροφός της; Ποιος είναι, με άλλα λόγια, ο τύπος της και το πεδίο ορισμού της;

Ας σκεφτούμε λίγο το εξής: είπαμε ότι, αφού η f είναι 1-1, για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει ένα μοναδικό $x \in A$ τέτοιο ώστε⁴⁹:

$$y = f(x).$$

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μία μοναδική λύση $x \in A$ για κάθε $y \in f(A)$, η οποία, όπως είδαμε, είναι η $x = f^{-1}(y)$. Επομένως, ένας τρόπος να βρούμε τον τύπο της f^{-1} είναι να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x . Ας βρούμε τώρα την αντίστροφη της f . Η εξίσωση $y = f(x)$, στην περίπτωση μας είναι η:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln(2x + 3) \\ &\Leftrightarrow e^y = e^{\ln(2x+3)} \\ &\Leftrightarrow e^y = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow e^y - 3 = 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{e^y - 3}{2} = x \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αντίστροφη της f είναι η

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y - 3}{2}$$

ή, αν θέλουμε να έχουμε παντού x , για να μην μπερδευόμαστε, η:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 3}{2}.$$

Σειρά έχει τώρα το πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός που να προκύπτει από την τύπο της f^{-1} , επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 14

Να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} , όπως την ορίσαμε, είναι ακριβώς το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(A)$. Επομένως, ένας τρόπος για να βρούμε το σύνολο τιμών μίας 1-1 συνάρτησης⁵⁰ είναι πρώτα να βρούμε την αντίστροφη και, στη συνέχεια, να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Επίσης, ισχύει και η αντίστροφη σχέση, δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι ακριβώς το σύνολο τιμών της f^{-1} .

⁴⁹Εδώ το A είναι το διάστημα $(-\frac{3}{2}, +\infty)$, το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή.

⁵⁰Και μόνο σε αυτήν την περίπτωση!

Παράδειγμα 22

Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, με $x \neq -1$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x, y \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ με $f(x) = f(y)$. Τότε:

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \\&\Leftrightarrow (x-1)(y+1) = (y-1)(x+1) \\&\Leftrightarrow xy + x - y - 1 = xy + y - x - 1 \\&\Leftrightarrow x - y = y - x \\&\Leftrightarrow 2x = 2y \\&\Leftrightarrow x = y\end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Ο τύπος της f^{-1} είναι ο:

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x+1} \\&\Leftrightarrow y(x+1) = x-1 \\&\Leftrightarrow yx + y = x-1 \\&\Leftrightarrow yx - x = -y-1 \\&\Leftrightarrow x(y-1) = -y-1 \\&\Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{y-1}, \quad y \neq 1 \\&\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{1-y}, \quad y \neq 1.\end{aligned}$$

Επομένως, ο τύπος της f^{-1} είναι:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}$$

ή, αν προτιμάτε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

και το πεδίο ορισμού της είναι το

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

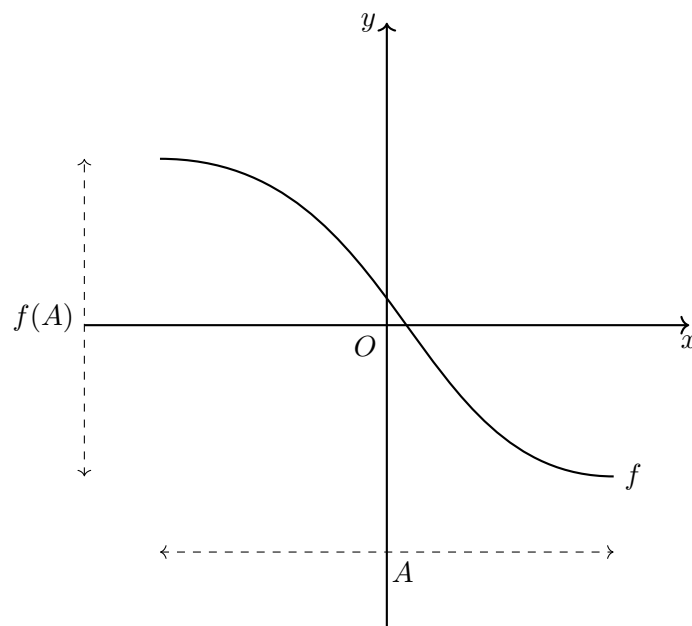
το οποίο είναι και το σύνολο τιμών της f .

5.4 Γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης

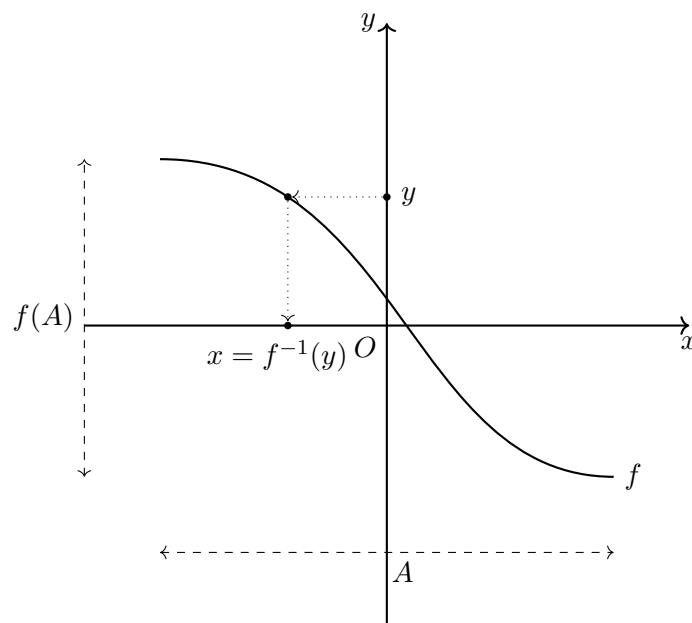
Τι σχέση έχει η γραφική παράσταση της αντίστροφης της f με τη γραφική παράσταση της f ; Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 56. Αν επιλέξουμε ένα $y \in f(A)$ τότε υπάρχει ένα και μοναδικό $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$ και, όπως έχουμε πει, αυτό το x είναι το $f^{-1}(y)$, δηλαδή ισχύει:

$$x = f^{-1}(y).$$

Εποπτικά, για να βρούμε το $f^{-1}(y)$, ξεκινάμε από το y και φέρουμε μία κάθετη στον άξονα $y'y$ μέχρι και τη γραφική παράσταση της f και από εκεί φέρουμε άλλη μία κάθετη προς τον άξονα $x'x$ μέχρι το $x = f^{-1}(y)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 57. Άρα οι f και f^{-1} έχουν την ίδια γραφική παράσταση; Προφανώς και όχι! Αυτό που έχουμε αγνοήσει είναι ότι για τη γραφική



Σχήμα 56: Η συνάρτηση f



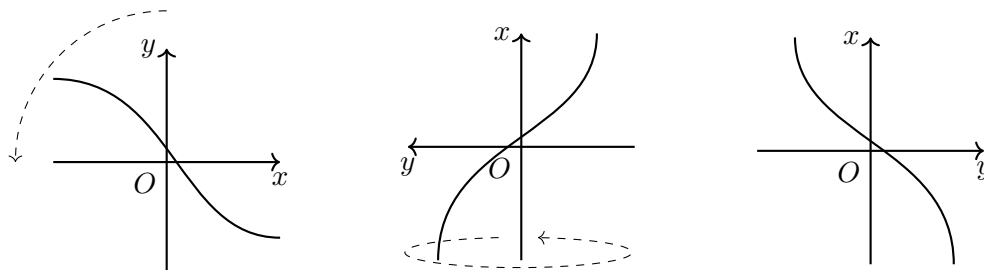
Σχήμα 57: Η συνάρτηση f

παράσταση της f^{-1} , οι άξονες είναι «στραβοί». Έχουμε συμφωνήσει ότι στον οριζόντιο άξονα θα αναπαριστούμε πάντα την ανεξάρτητη μεταβλητή⁵¹ ενώ στον κατακόρυφο την εξαρτημένη μεταβλητή⁵². Μπορεί για την f οι άξονες να είναι στις σωστές τους θέσεις, όμως για την f^{-1} η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα (εχει «ζει» το $f(A)$ και εμείς επιλέξαμε στην αρχή ένα $y \in f(A)$) άρα πρέπει να φέρουμε τους άξονες στη σωστή τους θέση. Για αυτό υπάρχουν δύο τρόποι: είτε θα στρίψουμε το κεφάλι μας δεξιά κατά 90° και στη συνέχεια θα

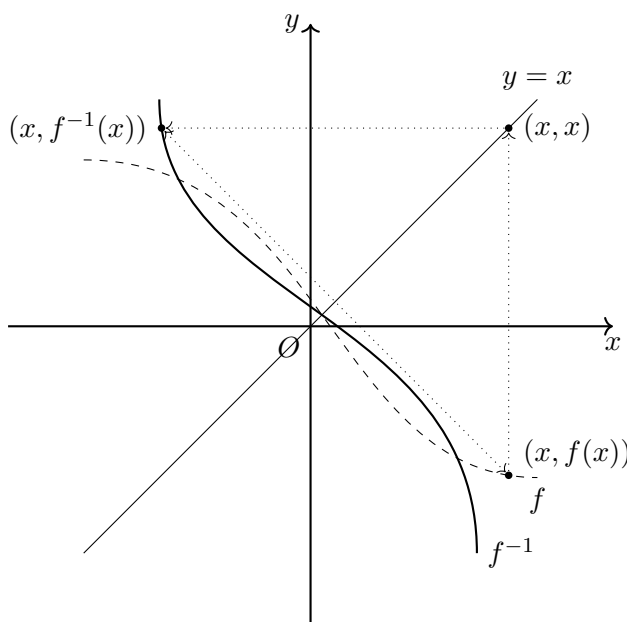
⁵¹ Δηλαδή, τη μεταβλητή που τρέχει «ελεύθερα» στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν εξαρτάται από κάτι άλλο (συνήθως τη συμβολίζουμε με x).

⁵² Δηλαδή, τη μεταβλητή της οποίας οι τιμές καθορίζονται από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (στην προκειμένη, το $y = f(x)$).

γυρίσουμε τη σελίδα και θα κοιτάξουμε τη γραφική παράσταση από την πίσω μεριά της σελίδας είτε θα «παίζουμε» με τους άξονες όπως στο σχήμα 28. Το πρώτο αφήνεται σαν άσκηση για εσάς· εμείς εδώ θα ασχοληθούμε με το δεύτερο, γιατί μας άρεσε αρκετά. Αν ξεκινήσουμε, λοιπόν, να στρίβουμε τους άξονες σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στο σχήμα 28, θα πάρουμε τη γραφική παράσταση της f^{-1} όπως φαίνεται στα σχήματα 58 και 59. Ένας άλλος τρόπος για να πάρουμε



Σχήμα 58: Στρίβοντας τους άξονες



Σχήμα 59: Η γραφική παράσταση της f^{-1}

τη γραφική παράσταση της f^{-1} έχοντας τη γραφική παράσταση της f είναι να παρατηρήσουμε ότι, στην ουσία, η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 59. Για να πειστούμε περισσότερο για τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων, μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής. Αν το σημείο (x, y) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τότε πρέπει να ισχύει $y = f(x)$. Ισοδύναμα, πρέπει να ισχύει $x = f^{-1}(y)$, άρα το σημείο (y, x) που είναι το συμμετρικό του (x, y) ως προς την ευθεία $y = x$, γράφεται στη μορφή $(y, f^{-1}(y))$, άρα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

⁵³Για να το αποδείξει κανείς αυτό αρκεί να αποδείξει ότι το τρίγωνο με κορυφές (x, y) , (x, x) και (y, x) είναι ισοσκελές με διάμεσο την $y = x$ (βλ. και σχήμα 59). Αυτό είναι εύκολο να το δείξει κανείς χρησιμοποιώντας απλή γεωμετρία.

5.5 Αντίστροφη συνάρτηση και μονοτονία

Μία υποκατηγορία των 1-1 συναρτήσεων είναι και οι μονότονες συναρτήσεις, όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα. Ποια η σχέση της μονοτονίας μίας συνάρτησης με την μονοτονία της αντιστρόφου της; Δεδομένης της συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, περιμένουμε να υπάρχει κάποια «σύνδεση» ανάμεσα στη μονοτονία μίας συνάρτησης f με τη μονοτονία της αντιστρόφου της, f^{-1} . Προς ικανοποίησή μας⁵⁴ ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3 (Μονοτονία της αντίστροφης)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε η αντίστροφή της ορίζεται και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη

Αρχικά, εφ' όσον η f είναι γνησίως μονότονη, είναι και 1-1, άρα αντιστρέψιμη, επομένως, πράγματι, ορίζεται η αντίστροφή της, f^{-1} . Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε τότε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Έστω, προς άτοπο, ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε υπάρχουν δύο αριθμοί $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(A)$ με $y_1 < y_2$ και

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Αφού $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A$, από την μονοτονία της f έχουμε ότι:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 \geq y_2$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$. Άρα, πράγματι, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Από το παραπάνω έπεται άμεσα ότι για μία γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) συνάρτηση, η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (αντίστοιχα, } f(x_1) > f(x_2)),$$

γίνεται αυτόματα ισοδυναμία. Πράγματι, αν πάρουμε x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_2)$, με την f να είναι γνησίως αύξουσα, τότε, αφού και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα, έπεται:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

που ήταν το ζητούμενο.

5.6 Σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}

Γενικότερα, οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g τέμνονται, δηλαδή διέρχονται από το ίδιο σημείο, αν $f(x) = g(x)$ για κάποιο/α x στο πεδίο ορισμού τους. Εδικότερα, για τις συναρτήσεις f και f^{-1} , τα σημεία τομής τους έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

Τίποτα το ιδιαίτερο, προς το παρόν. Αυτό που ίσως φανεί χρήσιμο σε αρκετές περιπτώσεις είναι η «ιδιαιτέρη» σχέση που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} η οποία εκφράζεται μέσα από τις σχέσεις:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$$

και

$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in f(A)$$

όπου A είναι το πεδίο ορισμού της f . Έτσι, εάν είναι πιο εύκολο, μπορούμε να λύσουμε μία από τις εξισώσεις:

$$f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

⁵⁴ Ας μη χρειαζόταν να διαβάζουμε όλη την ώρα και θα σου' λεγα τώρα! Εκεί να δεις ικανοποίηση!

ή

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

για να βρούμε τα σημεία τομής των f και f^{-1} . Τέλος, στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα⁵⁵, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε τα σημεία τομής της με την αντίστροφή της είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x$$

δηλαδή, τα σημεία τομής των f και f^{-1} βρίσκονται επί της ευθείας $y = x$.

Απόδειξη

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ένα σημείο τομής της f με την f^{-1} , το $M(x_0, y_0)$, το οποίο δε βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Τότε, $y_0 \neq x_0$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $y_0 < x_0$. Αφού το M είναι σημείο και των δύο γραφικών παραστάσεων ισχύει ότι:

$$y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0).$$

Επίσης, αφού $y_0 < x_0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$f(y_0) < f(x_0) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0)) < f(x_0) \Leftrightarrow x_0 < y_0$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $y_0 < x_0$.

2. $y_0 > x_0$. Αφού το M είναι σημείο και των δύο γραφικών παραστάσεων ισχύει ότι:

$$y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0).$$

Επίσης, αφού $y_0 > x_0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$f(y_0) > f(x_0) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow x_0 > y_0$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $y_0 > x_0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε αντίφαση, άρα δε γίνεται να υπάρχει σημείο τομής των f και f^{-1} εκτός της ευθείας $y = x$.

Παράδειγμα 23

Αν $f(x) = x + \ln x$ με $x > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \tag{1}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη την (1) με την $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η f είναι και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη και, από την προηγούμενη πρόταση, τα σημεία τομής της με την αντίστροφή της βρίσκονται από τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως, το κοινό σημείο των f και f^{-1} είναι το $(1, f(1))$, δηλαδή το $(1, 1)$.

⁵⁵Όπως φαίνεται και στο σχήμα 59, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε αυτό δεν ισχύει.

6 Δύο βασικές εφαρμογές της μονοτονίας και της 1-1 ιδιότητας

Τα μαθηματικά και οι μαθηματικές έννοιες πάντα προκύπτουν στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος. Έτσι, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όσα είπαμε στις παραπάνω ενότητες έχουν, στο βάθος τους, ως σκοπό να επιλύσουν διάφορα προβλήματα. Στην πορεία της ύλης αλλά και στις ασκήσεις που ακολουθούν θα δούμε αρκετές εφαρμογές αυτών των εννοιών. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με δύο βασικά προβλήματα που μας «καταδιώκουν» με διάφορες μορφές, από το γυμνάσιο· την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

6.1 Επίλυση εξισώσεων με τη χρήση της 1-1 ιδιότητας

Να θυμηθούμε την αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή του ορισμού μίας 1-1 συνάρτησης:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A$$

όπου A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα σε εξισώσεις; Αν μπορούμε να βρούμε μία 1-1 συνάρτηση f έτσι ώστε η εξίσωση που μας δίνεται να γράφεται στη μορφή:

$$f(x) = f(a)$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε μπορούμε, χρησιμοποιώντας την εν λόγω συνεπαγωγή να γράψουμε⁵⁶:

$$f(x) = f(a) \Leftrightarrow x = a$$

οπότε και η μοναδική λύση της εξίσωσης θα είναι το a . Ακολουθούν μερικά διαφωτιστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 24

Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x - 1 = e - \ln x$$

τότε, αφού ξεχωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους έχουμε:

$$x + \ln x = 1 + e$$

η οποία, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$ (η οποία όπως έχουμε δει είναι 1-1) γράφεται:

$$f(x) = 1 + e.$$

Εδώ σταματάμε και σκεφτόμαστε: για ποια τιμή $a > 0$ έχουμε ότι $f(a) = 1 + e$; Μετά από λίγες δοκιμές, καταλήγουμε στο ότι $f(e) = e + \ln e = e + 1$, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(e)$$

οπότε, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = e$.

Παράδειγμα 25

Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$e^x + \sqrt{x+1} = 1$$

⁵⁶Η συνεπαγωγή $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$ ισχύει επειδή η f είναι 1-1, ενώ η συνεπαγωγή $x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$ ισχύει επειδή η f είναι συνάρτηση.

τότε, θεωρώντας της συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x+1}, \quad x \geq -1$$

έχουμε ότι αυτή είναι 1-1. Επειδή είναι δύσκολο να χειριστούμε την εξίσωση $f(x) = f(y)$ λόγω του εκθετικού, θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

και, προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1 + 1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2 + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Οπότε, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 1$$

και, παρατηρώντας ότι $f(0) = 1$, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = f(0)$$

και, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$.

6.2 Επίλυση ανισώσεων με τη χρήση της μονοτονίας

Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, ας πούμε γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, από τον ορισμό έχουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Αυτό όμως δε μας βοηθάει άμεσα στο να λύνουμε ανισώσεις. Έχουμε όμως και κάτι παραπάνω: κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη και μάλιστα, η αντίστροφη της f , η f^{-1} , έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f . Επομένως, αν έχουμε μία ανισότητα της μορφής:

$$f(x) < f(a)$$

και η f είναι, ας πούμε, γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα και μπορούμε να πούμε:

$$f(x) < f(a) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(a)) \Rightarrow x < a$$

οπότε, αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, μπορούμε να την «βγάλουμε» από μία ανισότητα, μέσω της αντιστροφής της.

Παράδειγμα 26

Αν θέλουμε να λύσουμε την ανισότητα:

$$e^x + \sqrt{x+1} \leq 1$$

τότε, θεωρούμε την γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x+1} \quad x \geq -1$$

οπότε η ανισότητα γράφεται:

$$f(x) \leq f(0) \Rightarrow x \leq 0.$$

Συναλθεύοντας και με τον περιορισμό $x \geq -1$, οι λύσεις της δοσμένης ανισότητας είναι όλοι οι αριθμοί $x \in [-1, 0]$.

7 Ασκήσεις

7.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες και, στην περίπτωση που είναι σωστές, να αιτιολογήσετε ενώ, στην περίπτωση που είναι λανθασμένες, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

1. Στην παρακάτω σχέση:

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

το y μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x .

2. Η αντιστοίχιση $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$ που περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$
0	1
1	0

είναι συνάρτηση.

3. Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$ τότε ισχύει ότι:

$$g \circ f = f \circ g.$$

4. Στην παρακάτω σχέση, το y μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x :

$$2x + \ln y = x^2, \quad y > 0.$$

5. Αν $f : A \rightarrow B$ είναι μία συνάρτηση τότε η αντιστοίχιση $g : f(A) \rightarrow A$ που αντιστοιχίζει το $f(x)$ «πίσω» στο x είναι συνάρτηση⁵⁷.

6. Στην παρακάτω σχέση, το x περιγράφεται σαν συνάρτηση του y :

$$y = \sin x, \quad x \in [0, \pi], \quad y \in [-1, 1].$$

7. Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g ισχύει ένα από τα τρία:

- $f = g$,
- $f < g$,
- $f > g$.

8. Αν $f(x) = x$, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{f}$ είναι το $\mathbb{R}$.

9. Αν $f(x) = e^x$, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{f}$ είναι το $\mathbb{R}$.

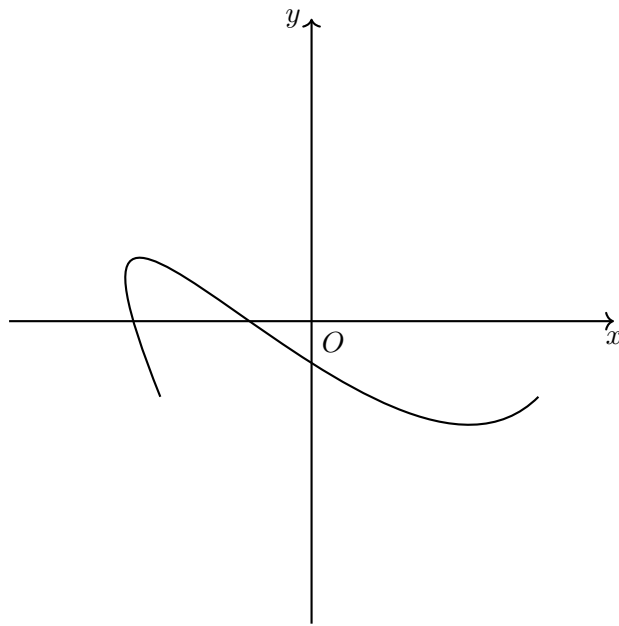
10. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

11. Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με $f < g$ τότε η εξίσωση:

$$f(x) - g(x) = 1$$

δεν έχει λύση.

12. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία 1-1 συνάρτηση, τότε η f έχει πάντα κοινά σημεία με την f^{-1} .



Σχήμα 60: Μία καμπύλη

13. Υπάρχει συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 60.

14. Η εξίσωση

$$x^3 + x = 0$$

έχει μοναδική λύση το 0.

15. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

16. Κάθε 1-1 συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

17. Μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ενδέχεται να έχει κοινά σημεία με την αντίστροφή της f^{-1} και εκτός της ευθείας $y = x$.

18. Η $f(x) = x^2$, με $x \geq 0$ δεν είναι 1-1.

19. Αν μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη, τότε η εξίσωση

$$f(x) = c$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με την f να είναι γνησίως αύξουσα και την g να είναι γνησίως φθίνουσα τότε η εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

έχει το πολύ μία λύση.

21. Αν f μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως αύξουσα.

⁵⁷Με άλλα λόγια, για την g έχουμε ότι:

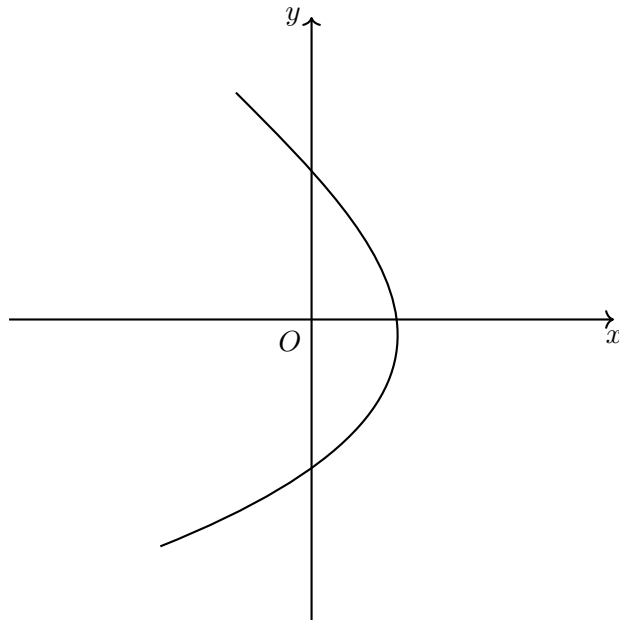
$$f(x) \overset{g}{\mapsto} x.$$

22. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε η εξίσωση:

$$f^{-1}(x+1) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

23. Δεν υπάρχει συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 61.



Σχήμα 61: Μία άλλη καμπύλη

24. Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \ln(x-1)$, τότε:

$$(f+g)(x) = \sqrt{1-x^2} + \ln(x-1).$$

25. Η σύνθεση $f \circ g$ όπου $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = -|x|$ δεν ορίζεται.

26. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία αντιστρέψιμη συνάρτηση και f^{-1} είναι η αντίστροφή της τότε:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

27. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει:

$$f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x - f^{-1}(x) = 0.$$

7.2 Α' Ομάδα

1. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$, όπου:

A = το σύνολο των κατοίκων της Αθήνας

B = το σύνολο των τραπεζικών λογαριασμών

και η f αντιστοιχίζει κάθε άνθρωπο του στοιχείου A στον τραπεζικό λογαριασμό που είναι στο όνομά του είναι συνάρτηση. Αιτιολογήστε κατάλληλα.

2. Τι θα έπρεπε να ισχύει για τους ενήλικες που ζουν στη Σουμάτρα (βλ. Παράδειγμα 2), έτσι ώστε η αντιστοίχιση Παιδί να είναι συνάρτηση;
3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$
$$g(x) = x$$

είναι ίσες.

4. Να εξετάσετε στις παρακάτω σχέσεις αν το y μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του x (ή αν το x μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του y):

(α') $x^2 + y = 2$,

(β') $2x^2 + 3y^2 = 4, y > 0$,

(γ') $\ln x + y^3 = 1, x > 0$,

(δ') $x^2 + xy + y^2 = -xy$.

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α') $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$,

(β') $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 1}$,

(γ') $h(x) = 2x + x^{-x}$,

(δ') $s(x) = \frac{1}{\ln(2x + 5)}$.

6. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(α') $f(x) = 2x + 4, x \in [-2, 6]$,

(β') $g(x) = \frac{3}{2x + 1}, x \in (1, 3)$,

(γ') $h(x) = \log_2(x + 2), x \in (-1, 6]$,

(δ') $s(x) = x^2 - 1, x \in [-2, 5]$.

7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

• $f(x) = \frac{2x + 1}{1 - \ln x}$,

• $g(x) = \sqrt{2x - x^2} + \frac{1}{x}$,

• $h(x) = \frac{\ln(9 - x^2)}{\sqrt{x + 2}}$,

• $s(x) = (x^2 - 2x - 3)^{2x + \ln x}$,

• $t(x) = \ln(\eta\mu x) + \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

8. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

• $f(x) = x^2 + 2x + 3, x \in (2, 5)$,

• $g(x) = x^3 + \sqrt{x}, x \in [0, 9)$,

- $h(x) = x^4 + x^2, x \in [-2, -1],$
- $s(x) = \ln(1 + x), x \in (1, e),$
- $t(x) = x^2 + 5, x \in (-2, 1].$

9. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1},$
- $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^{2x-1} - 1},$
- $h(x) = \ln(2x^3 - 5x + 3),$
- $s(x) = (2x + 4)^{x \ln x}.$

10. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = -2x + 4, x \in [-6, 8],$
- $g(x) = 11x^2 - 8, x \in [0, 1),$
- $h(x) = \ln(2x + 4), x \in (1, 2),$
- $s(x) = 2 + \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}.$

11. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$:

(α') $f(x) = x - 2$ και $g(x) = x^2 + 4,$

(β') $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ και $g(x) = \ln x,$

(γ') $f(x) = \frac{2 - 2x}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \frac{2}{x + 1},$

(δ') $f(x) = x^x$ και $g(x) = (2x)^x.$

12. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες:

(α') $f(x) = 4 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x + 1},$

(β') $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x,$

(γ') $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ και $g(x) = \frac{x}{x + 1},$

(δ') $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ και $g(x) = x.$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

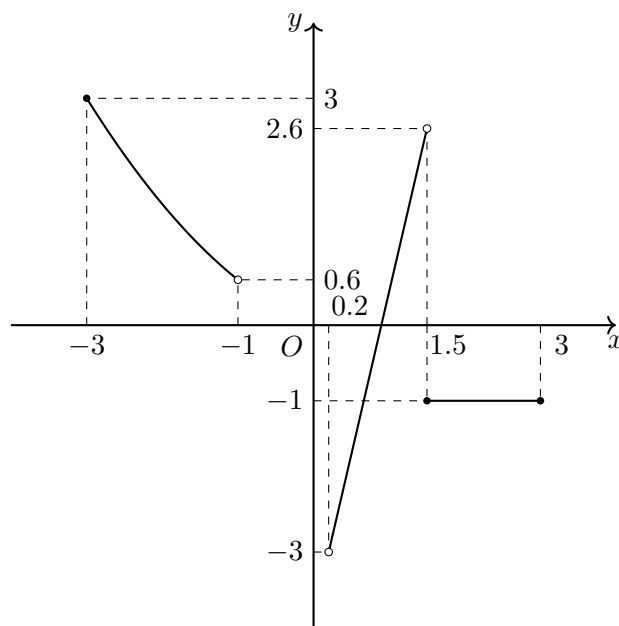
$$g(x) = \sqrt{x - 1}.$$

(α') Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f, g.$

(β') Να βρείτε τις $f + g, f \cdot g$ και $\frac{f}{g}.$

(γ') Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f.$

14. Αν f είναι μία συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 62:



Σχήμα 62: Η συνάρτηση f

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(β') Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:

$$f(x) = 1.$$

(γ') Να βρείτε σε ποια διαστήματα η f είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

(δ') Είναι η f άρτια; Περιττή;

15. Να γράψετε τις ακόλουθες συναρτήσεις σαν σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων:

- $f(x) = \eta\mu^2(x - 1),$
- $g(x) = \ln(x^2 - x + 1),$
- $h(x) = e^{4x} + e^{2x} + e^x + 1,$
- $s(x) = 2\varepsilon\varphi^4(x + 2) - 4\varepsilon\varphi^3(x + 2) - 4,$
- $t(x) = \frac{2e^{\sqrt{x}} - 1}{e^{2\sqrt{x}} + 1}.$

16. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1},$
- $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^{2x-1} - 1},$
- $h(x) = \ln(2x^3 - 5x + 3),$
- $s(x) = (2x + 4)^{x \ln x}.$

17. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = -2x + 4, x \in [-6, 8],$
- $g(x) = 11x^2 - 8, x \in [0, 1),$
- $h(x) = \ln(2x + 4), x \in (1, 2),$
- $s(x) = 2 + \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}.$

18. Να μελετήσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

$$f(x) = x^3 + x + e^x$$
$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) - 2x.$$

Τι μπορείτε να πείτε για την μονοτονία της $f - g$;

19. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»:

- $f(x) = x^3 + x + 1,$
- $g(x) = \frac{x+3}{x-3},$
- $h(x) = 2x^2 + 4x,$
- $s(x) = e^{x+1} - e^{x-1}.$

20. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = x^3 - 4,$
- $g(x) = \frac{3x-1}{2x+2},$
- $h(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1},$
- $s(x) = \sqrt{2x^3 + 2}.$

21. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- $x^3 + x = 10,$
- $2 \ln x + x = 1,$
- $e^{2x+4} - e^{2-4x} = e^5 - 1,$
- $\ln(x+5) - \ln(2x+4) = 0.$

22. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

- $2x^7 + e^x > 1,$
- $\ln x - \ln(1-x) < 0,$
- $e^x + 4 \ln x \leq e^e + 4,$
- $\sin x - \eta\mu x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

23. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = (x-1)^2 - 4,$
- $g(x) = \frac{x-2}{x+2},$

- $h(x) = \left| 1 - \sqrt{|x| - 4} \right|,$
- $s(x) = |\ln(|x|)|.$

24. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{3}{2x - 6}$$

και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

25. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^7 + 2e^{3x-4} = 1 + \frac{2}{e}.$$

26. Να λύσετε την ανισότητα:

$$\ln(x+1) - x \geq \ln(x-1) + \ln \frac{3}{2} - 2.$$

27. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

28. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 3 - e^{x+4}.$$

7.3 Β' Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

(α') Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(β') Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ') Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{3}.$$

(δ') Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση:

$$f(x) = \frac{x}{\pi}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 5, x \in [-4, 4]$.

(α') Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β') Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(γ') Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$f(x) = a,$$

έχει μοναδική λύση.

(δ') Να βρείτε μία συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in [-4, 4].$$

3. Αν $f(x) = x^2 + x$, με $x \geq 0$:

(α') Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β') Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(γ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(δ') Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1} .

4. Αν $f(x) = \frac{3x}{x+1}$:

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β') Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(γ') Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(δ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(ε') Έχει λύση η εξίσωση:

$$f(x) = 2020;$$

Να απαντήσετε χωρίς να λύσετε την εξίσωση.

5. Αν $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με:

$$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x + 1}$$

(α') Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β') Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

6. Αν $f(x) = -3 + \ln(|x| + 2)$:

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (θα χρειαστεί να πάρετε δύο περιπτώσεις).

(γ') Να βρείτε ένα ακρότατο της f .

(δ') Είναι η f άρτια/περιττή;

(ε') Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

(ς') Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f|$.

7. Αν

$$f(x) = \frac{3+x}{1+x}$$

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ') Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(δ') Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .

8. Να βρείτε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$f \circ g = g \circ f$$

και καμμία από τις f, g να μην είναι η $h(x) = x$.

9. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία άρτια συνάρτηση, τότε να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.
10. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία περιττή και 1-1 συνάρτηση, είναι και η f^{-1} περιττή;
11. Αν $f(x) = x \ln x$, σε ποιο διάστημα μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα;
12. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \left| \frac{|x|}{1 - |x|} \right|.$$

13. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(x^2 + 1)^2 f^2(x) + x^4 \leq 2x^4 f(x) + 2x^2 f(x).$$

- (α') Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Θα σας χρειαστεί το γεγονός ότι $(a - b)^2 \geq 0$.

- (β') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
(γ') Να βρείτε ένα ολικό μέγιστο της f .
(δ') Σε ποιο διάστημα πρέπει να περιορίσουμε την f έτσι ώστε αυτή να είναι αντιστρέψιμη;
(ε') Έχει λύση η εξίσωση:

$$f(x) = 2019^{2020};$$

14. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} + 4f(x) = x.$$

- (α') Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(β') Να υπολογίσετε το $f(0)$.
(γ') Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
15. Δίνεται μία συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sin f(x) = x.$$

- (α') Να βρείτε το $f(0)$.
(β') Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».
(γ') Να δείξετε ότι:

$$f(\sin x) = \sin x,$$

για κάθε $x \in [0, \pi]$.

- (δ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(ε') Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

16. Πόσες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν που να είναι και άρτιες και περιττές;
17. Να βρείτε μία συνάρτηση f που να είναι 1-1 αλλά να μην είναι γνησίως μονότονη.
18. Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη;
19. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x + 1.$$

(α') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.

(β') Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ') Υπάρχει αριθμός $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιος ώστε:

$$\eta\mu^5 \theta + \eta\mu^3 \theta + \eta\mu \theta = 2;$$

7.4 Γ' Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$, $x \in (-3, 3)$.

(α') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(β') Να εξηγήσετε αν υπάρχει αριθμός $x_0 \in (-3, 3)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = e^\pi.$$

(γ') Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:

$$f(x) = \ln x.$$

(δ') Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f(x+1).$$

(ε') Υπάρχει συνάρτηση g για την οποία να ισχύει ότι:

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in (-3, 3);$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ με $D_f = D_g = [0, 2\pi]$.

(α') Να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

(β') Να βρείτε τα σύνολα τιμών τους.

(γ') Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x).$$

(δ') Να λύσετε, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, την ανίσωση:

$$f(x) < g(x).$$

(ε') Αν περιοριστούμε στο διάστημα $[0, 1]$, ποιο θα είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = \eta\mu x$; Εξηγήστε χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(ε') Ανάλογα, αν περιοριστούμε στο $[0, 1]$, ποιο θα είναι το σύνολο τιμών της $g(x) = \sin x$; Εξηγήστε χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(ζ') Πώς θα μπορούσατε, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση:

$$\eta\mu x - \sin x = 1;$$

Υποδείξτε μία μέθοδο και, στη συνέχεια, βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση.

(η') Προσπαθήστε να λύσετε την παραπάνω εξίσωση με τριγωνομετρία.

3. Είδαμε ότι αν f, g είναι δύο συναρτήσεις, τότε δεν ισχύει πάντα ότι

$$f \circ g = g \circ f.$$

Είδαμε, επίσης, ότι πολλές φορές μία σύνθεση δεν έχει νόημα. Σε αυτήν την άσκηση θα «σκαλίσουμε» διάφορες περιπτώσεις για να δούμε τι μπορεί να συμβεί.

(α') Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε:

$$f \circ g = g \circ f.$$

(β') Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε οι $f \circ g$ και $g \circ f$ να έχουν ίδιο τύπο και διαφορετικά πεδία ορισμού.

(γ') Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται αλλά η $g \circ f$ να μην ορίζεται⁵⁸.

(δ') Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε ούτε η $f \circ g$ ούτε η $g \circ f$ να μην ορίζονται.

(ε') Να βρείτε μία συνάρτηση f έτσι ώστε η $f \circ f$ να μην ορίζεται.

(ε') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$(f \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ζ') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x),$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση g .

(η') Να δείξετε ότι η συνάρτηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι μοναδική.

(θ') Μία πονηρή μαθηματικός, η Ρουσάλκα, παίζει το ακόλουθο παιχνίδι με τον γραμματέα της, τον Βόντνικ: Η Ρουσάλκα ζητάει από τον Βόντνικ να διαλέξει μία συνάρτηση⁵⁹ f και αυτή του βρίσκει μία συνάρτηση g τέτοια ώστε:

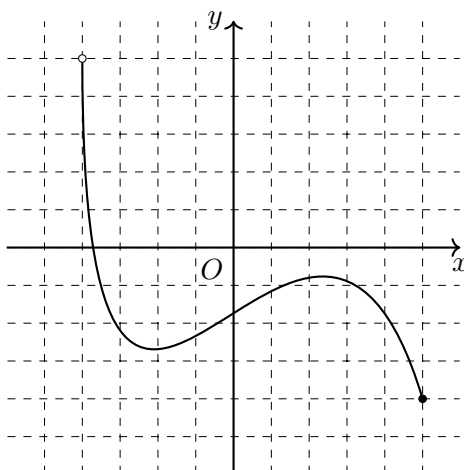
$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Η Ρουσάλκα έχει τάξει μία μεγάλη αύξηση στον Βόντνικ αν καταφέρει και της βρει μία συνάρτηση f για την οποία δε θα μπορεί να του βρει μία κατάλληλη συνάρτηση g όπως παραπάνω. Έχει ελπίδες να κερδίσει ποτέ την αύξησή του ο Βόντνικ; Αν ναι, ποια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει. Αν όχι, γιατί;

4. Δίνεται μία συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 63.

⁵⁸ Λέγοντας ότι δεν ορίζεται, εννοούμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το κενό σύνολο.

⁵⁹ Εντάξει, έχουμε ξεφύγει και επίσημα, πια.



Σχήμα 63: Η συνάρτηση f .

- (α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
(β') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .
(γ') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -1$.
(δ') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = x$.
(ε') Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των:

- i. $f(x - 1)$,
- ii. $f(x) + 1$,
- iii. $-f(x)$,
- iv. $|f(x)|$,
- v. $f(x + 2) - 1$,
- vi. $f(|x|)$.

- (ϵ') Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση

$$f(x) = \lambda x,$$

έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\lambda > 0$.

- (ζ') Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση

$$f(x) = ax^2,$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα για κάθε $a < 0$.

5. Αν $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τρεις συναρτήσεις έτσι ώστε:

- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- η g είναι γνησίως αύξουσα,
- η h είναι γνησίως φθίνουσα.

- (α') Να δείξετε ότι η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β') Να δείξετε ότι η $f \circ h$ είναι γνησίως φθίνουσα.
(γ') Να δείξετε ότι η $h \circ h$ είναι γνησίως αύξουσα.

(δ') Τι μπορείτε να πείτε για τη μονοτονία της $f \circ g \circ h$;

6. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, να δείξετε ότι:

(α') Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

είναι άρτια.

(β') Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

είναι περιττή.

(γ') Η f γράφεται σαν άθροισμα μία άρτιας συνάρτησης $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και μίας περιττής συνάρτησης $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$f(x) = A(x) + \Pi(x).$$

7. Να βρείτε 4 αντιστρέψιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

8. Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις έτσι ώστε:

$$g(f(x) + 1) = 4x - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και η g είναι γνησίως αύξουσα:

(α') Να δείξετε ότι και η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β') Αν $f(0) = -1$, να βρείτε το $g(0)$.

(γ') Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το $f^{-1}(1)$ αν γνωρίζετε ότι $g(2) = 1$.

(δ') Να λύσετε την ανισότητα:

$$f(f^{-1}(x) - x) \geq -1.$$

(ε') Να δείξετε ότι η ανισότητα:

$$g(f^3(x) + f(x) + 1) < g(g^3(x) + g(x) + 1)$$

έχει λύσεις αν και μόνο αν η ανισότητα:

$$f(x) < g(x)$$

έχει λύσεις.

9. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α') Να δείξετε ότι $f(0) = 1$.

(β') Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ') Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ') Να δείξετε ότι $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(ε') Να δείξετε ότι $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ϵ') Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

10. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

(α') Να δείξετε ότι $f(1) = 0$.

(β') Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(γ') Να δείξετε ότι $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

(δ') Να δείξετε ότι δεν ισχύει ούτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ούτε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(ε') Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

11. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \neq 0$ και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α') Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

(β') Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

(γ') Να δείξετε ότι $f(x - y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(δ') Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(ε') Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(0)x^{2020} + x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση.

(ϵ') Να δείξετε ότι $f(2x) = 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ζ') Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

12. Πριν περάσουμε στην επόμενη παρόμοια άσκηση, ας σταθούμε λίγο στην προηγούμενη. Έστω, πάλι, μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

(α') Δείξαμε προηγουμένως ότι $f(2x) = 2f(x)$. Να δείξετε ότι $f(3x) = 3f(x)$ και ότι $f(4x) = 4f(x)$. Γενικότερα, να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν ισχύει ότι:

$$f(\nu x) = \nu f(x).$$

(β') Να δείξετε ότι και για ν αρνητικό ακέραιο ισχύει ότι $f(\nu x) = \nu f(x)$.

(γ') Έχουμε δείξει ως τώρα ότι για κάθε ακέραιο⁶⁰ $\nu \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι:

$$f(\nu x) = \nu f(x),$$

από το οποίο, για $x = 1$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(\nu) = \nu f(1)$, για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε και ότι, αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}f(1).$$

⁶⁰ Αφού δεν το δείξαμε για το 0, πώς λέμε ότι το δείξαμε για κάθε ακέραιο;

(δ') Να δείξετε ότι για κάθε μ θετικό ακέραιο και κάθε ν ακέραιο, ισχύει:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{\nu}{\mu}f(1).$$

(ε') Μπορείτε να υπολογίσετε με αυτά τα δεδομένα το $f(\sqrt{2})$;

13. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α') Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

(β') Να δείξετε ότι $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ') Να δείξετε ότι $f(2x) = 3f(x) + f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ') Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

14. Να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση f τέτοια ώστε:

(α') Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$.

(β') Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $(2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$.

(γ') Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $(2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$ και στο $(3, 4]$.

(δ') Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(\nu - 1, \nu]$ για κάθε περιττό ν και γνησίως φθίνουσα στο $(\nu - 1, \nu]$ για κάθε άρτιο ν .

15. Μπορείτε να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που να παρουσιάζει ολικό μέγιστο; Αν $D_f = (0, 1)$;

16. Μπορείτε να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να παρουσιάζει ολικό μέγιστο;

17. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να τέμνει κάθε ευθεία της μορφής $y = ax$; Πόσες τέτοιες συναρτήσεις μπορείτε να βρείτε;

18. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να τέμνει κάθε ευθεία; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

19. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^5(x) + e^{f(x)} + 3 = x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$; Αν δεν μπορείτε να βρείτε τον τύπο της, μπορείτε να εξηγήσετε αν υπάρχει ή όχι τέτοια συνάρτηση;

20. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει σταθερό σημείο το $x_0 \in A$ αν $f(x_0) = x_0$.

(α') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να έχει:

i. κανένα, ii. ένα, iii. δύο, iv. τρία, v. 100,

σταθερά σημεία.

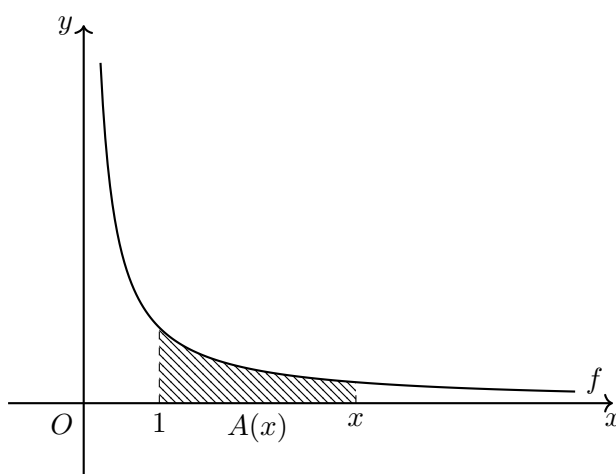
(β') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ που να μην έχει σταθερά σημεία.

(γ') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να έχει άπειρα σταθερά σημεία και να μην είναι η $f(x) = x$.

21. Έχουμε ένα σύρμα μήκους ℓ μέτρων με το οποίο παίζουμε και κατασκευάζουμε ορθογώνια⁶¹.
- (α') Αν η μία πλευρά του ορθογωνίου έχει μήκος x , να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου, E , σαν συνάρτηση του x .
- (β') Να μελετήσετε την E ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (γ') Να δείξετε ότι το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει όταν το ορθογώνιό μας είναι τετράγωνο.
22. Ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 64. Ορίζουμε σαν $A : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τη συνάρτηση που αντι-



Σχήμα 64: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$

στοιχίζει κάθε αριθμό $x \geq 1$ στο εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f και πάνω από τον άξονα $x'x$, ανάμεσα στο 1 και το x , όπως φαίνεται και στο σχήμα 64.

- (α') Είναι όντως η A συνάρτηση; Γιατί;
- (β') Αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στην υπερβολή και τον άξονα $x'x$ μεταξύ των x, y (όπου $y > x \geq 1$), έστω $E_{x,y}$, έχει την εξής ιδιότητα:

$$E_{tx,ty} = E_{x,y}$$

δηλαδή, για παράδειγμα, το εμβαδόν $E_{2,3}$ είναι ίσο με το εμβαδόν $E_{6,9}$ (βλ. και σχήμα 65) τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση A έχει την εξής ιδιότητα:

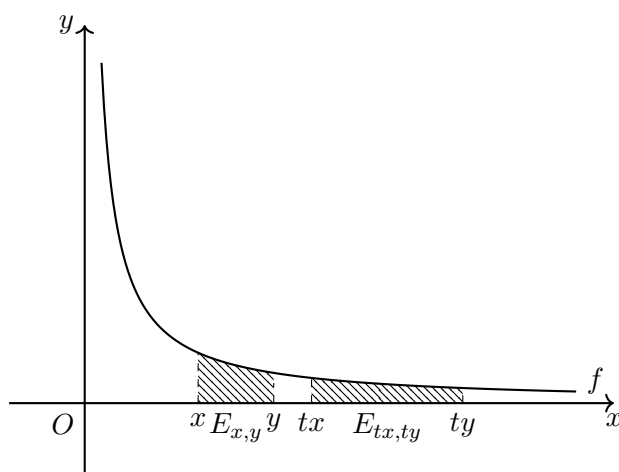
$$A(xy) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \geq 1.$$

- (γ') Μπορείτε να βρείτε μία γνωστή συνάρτηση που να έχει επίσης αυτήν την ιδιότητα;

Μία συζήτηση σε σχέση με το παραπάνω πρόβλημα μπορείτε να βρείτε [εδώ](#).

23. Από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην πρώτη ενότητα, ποια μπορείτε πια να λύσετε και σε ποια μπορείτε να προχωρήσετε λίγο περισσότερο από ό,τι στην αρχή;

⁶¹Είναι σαφές ότι υπάρχει κάποιο θέμα...



Σχήμα 65: «Υπερβολικά» εμβαδά

Κατάλογος Σχημάτων

1	Τρεις αλυσίδες	7
2	Η ιδέα της γραφικής παράστασης του Oresme	9
3	Το διάγραμμα $v - t$ της ομαλής κίνησης	10
4	Μία μη «ομαλή» κίνηση	10
5	Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f	19
6	Εύρεση της τιμής $f(2.6)$ μέσω της γραφικής παράστασης της f	19
7	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f	20
8	Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f	21
9	Το $f(0)$ της συνάρτησης f	21
10	Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$	22
11	Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 1$	23
12	Η σταθερή συνάρτηση για διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$	24
13	Η γραμμική συνάρτηση για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	24
14	Η συνάρτηση απόλυτη τιμή για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	25
15	Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	25
16	Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	25
17	Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	26
18	Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$	26
19	Η συνάρτηση $f(x) = A \eta \mu(\omega x)$	27
20	Η συνάρτηση $f(x) = A \sigma \nu(\omega x)$	27
21	Η συνάρτηση $f(x) = A \epsilon \phi(\omega x)$	28
22	Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$	28
23	Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$	28
24	Το φύλλο του Καρτέσιου	29
25	Το φύλλο του Καρτέσιου δεν είναι συνάρτηση	30
26	Το φύλλο του Καρτέσιου «κατακρεουργημένο»	30
27	Η καμπύλη $(\dagger)$	32
28	Στρίβοντας τους άξονες	32
29	Διάταξη συναρτήσεων: $f < g$	34
30	Η σύνθεση της g με την f	35
31	Η συνάρτηση f	38
32	Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c > 0$	38
33	Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c < 0$	39
34	Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c > 0$	40
35	Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c < 0$	40
36	Η γραφική παράσταση της $g \circ f = -f$	41
37	Η γραφική παράσταση της $g \circ f$	42
38	Η συνάρτηση f και η $-f$	43
39	Η γραφική παράσταση της $g \circ f = f $	43
40	Η γραφική παράσταση της $f(x)$ και της $f(-x)$	44
41	Η γραφική παράσταση της $f \circ g$	44
42	Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \ln(x + 1)$	45
43	Η γραφική παράσταση της $f(x) = \left \frac{1}{2-x} \right $	46
44	Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{1 + x }$	47
45	Μία άρτια συνάρτηση	48
46	Μία περιττή συνάρτηση	49
47	Μία περιοδική συνάρτηση	49
48	Η συνάρτηση f	50

49	Μονοτονία και ακρότατα της συνάρτησης f	50
50	Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[b, +\infty)$	51
51	Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$	52
52	Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a , το $f(a)$.	53
53	Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο b , το $f(b)$.	53
54	Η συνάρτηση f	54
55	Μία 1-1 συνάρτηση	60
56	Η συνάρτηση f	63
57	Η συνάρτηση f	63
58	Στρίβοντας τους άξονες	64
59	Η γραφική παράσταση της f^{-1}	64
60	Μία καμπύλη	70
61	Μία άλλη καμπύλη	71
62	Η συνάρτηση f	74
63	Η συνάρτηση f .	81
64	Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$	85
65	«Υπερβολικά» εμβαδά	86

Κατάλογος Πινάκων

1	Η μονοτονία και τα ακρότατα της f .	56
---	---------------------------------------	----