Κεφάλαιο 3ο
Πιθανότητες

ΘΕΩΡΙΑ

1. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν κατά την εκτέλεση του πειράματος. Συμβολίζεται με Ω .

Αν $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης , τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$.

Παραδείγματα :

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά, τότε ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

ii) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές, τότε ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$, δηλαδή το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών του παρακάτω πίνακα :

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

2. Πράξεις με ενδεχόμενα

Έστω ότι έχουμε δύο ενδεχόμενα Α , Β τότε :

i) **$A \cap B$: Α τομή Β**
Είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β .

ii) **$A \cup B$: Α ένωση Β**
Είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α ή το Β, δηλαδή ένα τουλάχιστον από τα Α και Β .

iii) **A' : συμπληρωματικό του Α**
Είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α .

iv) **$A - B$: διαφορά του Β από το Α**
Είναι το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται το Α και όχι το Β . Ισχύει: $A - B = A \cap B'$.

3. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Ασυμβίβαστα ονομάζονται τα ενδεχόμενα τα οποία δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο . Τότε ισχύει $A \cap B = \varnothing$.
Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ονομάζονται και **ξένα** ή **αμοιβαία αποκλειόμενα** .

4. Ορισμός Σχετικής Συχνότητας Ενδεχομένου

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος , ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιηθεί κ φορές , τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται **σχετική συχνότητα του Α** και συμβολίζεται με f_A .

Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \ldots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των παραπάνω απλών ενδεχομένων θα έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες :

- $0 \le f_i \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, \lambda$,
- $\sum_{i=1}^{\lambda} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = 1.$

5. Στατιστική Ομαλότητα ή Νόμος των μεγάλων αριθμών

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους για κάθε ενδεχόμενο) καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος αυξάνεται απεριόριστα.

6. Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α ορίζουμε τον ακόλουθο αριθμό $P(A)$:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} .$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

1) $P(\Omega) = 1.$

2) $P(\varnothing) = 0.$

3) $0 \le P(A) \le 1$, *για κάθε* $A \subseteq \Omega$.

7. Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό , που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν :

- $0\le P(\omega_i)\le 1$,
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+\dots+P(\omega_\nu)=1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ τον ονομάζουμε **πιθανότητα** του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω , δηλαδή υποσύνολο του Ω της μορφής $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa\}\ne\varnothing$, $\kappa\in\{1,2,\dots,\nu\}$ (όπου προφανώς καθένα από τα $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa$ είναι κάποιο από τα $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu$, ανεξαρτήτου σειράς), ορίζουμε ως πιθανότητα $P(A)$ αυτού το άθροισμα $P(A)=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+\dots+P(\alpha_\kappa)$.

Τέλος ορίζουμε ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

8. Κανόνες λογισμού Πιθανοτήτων

1) Για A , B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
(<u>Απλός Προσθετικός νόμος</u>)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αν N(A)=κ και N(B)=λ , τότε το $A\cup B$ έχει κ+λ στοιχεία , άρα $N(A\cup B)=N(A)+N(B)=\kappa+\lambda$.
οπότε

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$$

2) $P(A')=1-P(A)$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$A\cap A'=0$ άρα A,A΄ είναι ασυμβίβαστα , οπότε έχουμε : $P(A\cup A')=P(A)+P(A')\Rightarrow P(\Omega)=P(A)+P(A')\Rightarrow 1=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A')=1-P(A)$.

3) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α , Β του Ω ισχύει :
$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$. **(<u>Προσθετικός νόμος</u>)**

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ισχύει $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$. Αφαιρούμε μία φορά το πλήθος των στοιχείων της τομής γιατί όταν προσθέτουμε το $N(A)$ και το $N(B)$ υπολογίζουμε δύο φορές το πλήθος των στοιχείων της τομής στο άθροισμα .
Άρα αν διαιρέσουμε με το $N(\Omega)$ έχουμε : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

4) $\mathbf{A\subseteq B \;\Rightarrow\; P(A)\leq P(B)}$ **.**

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$A\subseteq B\Rightarrow N(A)\leq N(B)\Rightarrow \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

5) $\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$ **.**

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Τα $A-B$, $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα , άρα :

$P[(A-B)\cup(A\cap B)]=P(A-B)+P(A\cap B)$
$P[(A-B)\cup(A\cap B)]=P(A)$

$P(A-B)+P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

9. Εκφράσεις ενδεχομένων στην κοινή γλώσσα και στην γλώσσα των συνόλων και αντίστοιχες πιθανότητες

Κοινή γλώσσα	Γλώσσα Συνόλων	Αντίστοιχη Πιθανότητα
Πραγματοποιείται το Α .	A	$P(A)$
Δεν πραγματοποιείται το Α .	A'	$P(A')$
Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β (ισοδύναμα: το Α ή το Β).	$A\cup B$	$P(A\cup B)$
Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β (ισοδύναμα: και το Α και το Β).	$A\cap B$	$P(A\cap B)$
Πραγματοποιείται μόνο το Α .	$A-B$	$P(A-B)$
Πραγματοποιείται μόνο το Β .	$B-A$	$P(B-A)$
Πραγματοποιείται ένα ακριβώς από τα Α και Β , ή Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α και Β , ή Πραγματοποιείται <u>ή</u> το Α <u>ή</u> το Β	$(A-B)\cup(B-A)$	$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=$ $=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β (ισοδύναμα: ούτε το Α ούτε το Β)	$(A\cup B)'=A'\cap B'$	$P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)$
Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α και Β , ή Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και τα δύο (Α και Β)	$(A\cap B)'=A'\cup B'$	$P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)$
Η πραγματοποίηση του Α έπεται την πραγματοποίηση του Β	$A\subseteq B$	$P(A)\le P(B)$

10. Τρόποι απόδειξης ανισοτικών σχέσεων που περιέχουν πιθανότητες

1. Με ισοδυναμίες από το ζητούμενο μπορούμε να καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει, πχ έκφραση της μορφής $\left[K(x)\right]^2 \geq 0$ ή $P(\text{ενδεχομένου}) \geq 0$ ή $P(\text{ενδεχομένου}) \leq 1$.

2. Ισχύουν : $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα και $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$, και
$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ άρα και $P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A \cup B)$.

3. Αν έχουμε να αποδείξουμε μία ανίσωση της μορφής $P(A \cup B) \leq \text{αριθμός}$ (αντ. $P(A \cap B) \leq \text{αριθμός}$) μπορούμε να ξεκινήσουμε από μία ισχύουσα ανίσωση, δηλ. την $P(A \cap B) \geq 0$ (αντ. την $P(A \cup B) \leq 1$) και να αντικαταστήσουμε την πιθανότητα του πρώτου μέλους από τον προσθετικό νόμο. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις $P(A)$ και $P(B)$ από τα δεδομένα της άσκησης καταλήγουμε στην ζητούμενη ανίσωση.

4. Ένας ακόμα τρόπος (ουσιαστικά ισοδύναμος με τους παραπάνω) απόδειξης διπλών ανισωτικών σχέσεων είναι να ξεκινήσουμε με ισοδυναμίες από την ζητούμενη διπλή ανίσωση και να καταλήξουμε σε διπλή ανισωτική σχέση της μορφής $0 \leq P(A \cap B) \leq \alpha$ ή $\alpha \leq P(A \cup B) \leq 1$, όπου $0 < \alpha < 1$. Το ένα σκέλος των σχέσεων αυτών είναι προφανές (το $0 \leq P(A \cap B)$ ή το $P(A \cup B) \leq 1$) ενώ το άλλο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του 2ου τρόπου παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα του Ω . Να παρασταθούν με τα διαγράμματα του Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια των συνόλων τα παρακάτω ενδεχόμενα :

i. Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β .
ii. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β .
iii. Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α και Β .

2. Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και έστω τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_2,\}$ και $B=\{\omega_2,\omega_3\}$. Αν $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{3}{4}$, να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$.

3. Έστω Α,Β ενδεχόμενα ενός χώρου Ω με $P(A)=\frac{7}{10}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
Γ : να πραγματοποιηθεί μόνο το Α .
Δ : να πραγματοποιηθεί μόνο το Β .
Ε : να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β .

4. Αν Α , Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α , $B\cap A'$ είναι ασυμβίβαστα.

5. Αν $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$, $P(B')=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$, να υπολογιστούν τα : $P(B)$, $P(A-B)$, $P(A)$, $P(B-A)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$.

6. Αποδείξτε με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn ότι:
α) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A$,
β) $(A\cap B')\cap(A\cap B)=\varnothing$,
γ) $P(A\cap B')+P(A\cap B)=P(A)$
και επιπλέον αν ισχύει $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cap B')$ και $P(A'\cap B)$.

7. Για τα ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω , ισχύουν : $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$.

β) Τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα ;

8. Για το ενδεχόμενο Α ενός χώρου Ω ισχύει : $0 < P(A) < 1$. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4$.

9. Να αποδείξετε ότι : $P(B) - P(A') \leq P(A \cup B)$.

10. Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας μαθητής για την ομάδα ποδοσφαίρου του σχολείου του είναι $\dfrac{1}{6}$, ενώ για την ομάδα μπάσκετ είναι $\dfrac{1}{5}$. Η πιθανότητα να επιλεγεί και στις δύο ομάδες είναι $\dfrac{1}{10}$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχόμενων :

Α) να επιλεγεί τουλάχιστον σε μία από τις δύο ομάδες .

Β) να επιλεγεί στην ομάδα μόνο στου ποδοσφαίρου .

Γ) να επιλεγεί σε μία μόνο ομάδα .

11. Έστω $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα Εκλέγουμε τυχαία $\lambda \in \Omega$. Αν $f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$ να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(x) = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες .

12. Έστω $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα . Αν $f(x) = x^3 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 x + 1 + 2\lambda$, να βρεθεί η πιθανότητα η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο της $A(1, y_0)$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

13. Αν ισχύουν $\dfrac{P(A')}{P(A)} = \dfrac{2}{3}$ και $\dfrac{P(B')}{P(B)} = \dfrac{1}{2}$, να βρείτε :

α) αν τα Α,Β είναι ασυμβίβαστα ,

β) να αποδείξετε ότι $\dfrac{4}{15} \leq P(A \cup B) \leq \dfrac{19}{15}$.

14. Να αποδείξετε ότι : $1+P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)$ για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω .

15. Αν $P(A)=2P(A')$ και $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων : $A,\ B',\ A\cup B,\ A'\cap B,\ A\cup B',\ (A-B)\cup(B-A)$.

16. Έστω Α , Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(A'\cap B)=\frac{1}{3}$.
Υπολογίστε τις πιθανότητες : α) $P(A\cap(A'\cap B))$ και β) $P(A\cup(A'\cap B))$.

17. Έστω $\Omega=\{\,1,2,3,4,5\,\}$ δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα και $\lambda\in\Omega$, τότε να βρείτε την πιθανότητα το σύστημα $\begin{cases}\lambda^2x+y=2\\ x+y=2\lambda\end{cases}$ να έχει :

α) ακριβώς μια λύση ,

β) μοναδική λύση $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$.

18. Σε μια τάξη από 30 παιδιά, 15 παιδιά έχουν ποδήλατο, 10 έχουν μοτοσυκλέτα και 4 έχουν και τα δύο. Παίρνουμε στην τύχη ένα παιδί. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων για ένα παιδί :

α) να μην έχει μοτοσυκλέτα ,
β) να έχει μοτοσυκλέτα ή ποδήλατο ή και τα δύο ,
γ) να μην έχει μοτοσυκλέτα , ούτε ποδήλατο ,
δ) να έχει ποδήλατο αλλά να μην έχει μοτοσυκλέτα .

19. Αν $3P(A')=P(A)$, $2P(B)=1+P(A')$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$, να βρεθεί η : $P(A\cup B)$, $P(A-B)$, $P(B-A)$.

20. Έστω $\Omega=\{\,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\,\}$ ένας δειγματικός χώρος και $\lambda\in\Omega$. Αν $f(x)=2x^3-3\lambda x^2+6x+\lambda$ να βρεθεί η πιθανότητα η f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

21. Αν $P(A)=\frac{3}{4}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$ να αποδείξετε ότι α) Α, Β όχι ασυμβίβαστα , β) $P(B-A)\le\frac{1}{3}$.

22. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\,0,1,2,\ldots,100\,\}$ με $P(k)=2^{-k}$, $k=1,2,\ldots,100$. Να βρεθεί η $P(0)$ και η $P(1,3,5,\ldots,99)$. Υπόδειξη : Το άθροισμα των ν-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda\neq 1$ είναι: $S_\nu=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$.

23. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 16 κορίτσια. Τα μισά αγόρια και τα μισά κορίτσια έχουν μαύρα μάτια. Επιλέγουμε τυχαίως ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

24. Σε μια πόλη το 30% των κατοίκων έχουν σπίτι, το 60% έχουν αυτοκίνητο, ενώ το 20% έχουν και σπίτι και αυτοκίνητο. Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν κάτοικο της πόλης. Να βρείτε την πιθανότητα:
α) να έχει σπίτι ή αυτοκίνητο ,
β) να μην έχει ούτε σπίτι , ούτε αυτοκίνητο,
γ) να έχει μόνο σπίτι ή μόνο αυτοκίνητο.

25. Σε μια πόλη το 40% των κατοίκων διαβάζουν συχνά εφημερίδες, το 30% διαβάζουν συχνά περιοδικά, ενώ το 10% διαβάζουν συχνά και εφημερίδες και περιοδικά. Επιλέγουμε στην τύχη ένα κάτοικο της πόλης. Να βρείτε την πιθανότητα:
α) να διαβάζει εφημερίδες και όχι περιοδικά ,
β) να διαβάζει συχνά περιοδικά και όχι εφημερίδες ,
γ) να διαβάζει ή περιοδικά ή εφημερίδες αλλά όχι και τα δύο .

26. Ένα κουτί περιέχει 10 μαύρα, 8 μπλε, 4 κόκκινα και 5 κίτρινα μολύβια. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε ένα μολύβι : α) κίτρινο, β) μαύρο ή κόκκινο, γ) ούτε μαύρο ούτε μπλε .

27. Μια εταιρεία έχει 250 υπαλλήλους από τους οποίους οι 155 πήραν αύξηση, οι 85 πήραν προαγωγή και οι 50 πήραν και αύξηση και προαγωγή. Ένας από τους υπαλλήλους πρόκειται να επιλεγεί με κλήρωση για να τοποθετηθεί σε μια επιτροπή. Ποια η πιθανότητα ο υπάλληλος αυτός να μην έχει πάρει ούτε αύξηση ούτε προαγωγή ;

28. Μεταξύ 200 μαθητών, οι 120 έχουν καλό βαθμό στα μαθηματικά, οι 160 καλό βαθμό στα ελληνικά και οι 100 έχουν καλό βαθμό και στα μαθηματικά και στα ελληνικά. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα :
α) να έχει καλό βαθμό στα μαθηματικά ή στα ελληνικά ,
β) να μην έχει καλό βαθμό ούτε στα μαθηματικά, ούτε στα ελληνικά .

29. Αν ισχύει $P^2(A)+P^2(A')=1$, να αποδείξετε ότι το A είναι το βέβαιο ή το αδύνατο ενδεχόμενο.

30. Έστω P_1, P_2 οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων ω_1, ω_2 ενός δειγματικού χώρου $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$. Αν $P_1^2 \cdot P_2^2 = \frac{1}{16}$ τότε να δείξετε ότι ω_1, ω_2 είναι ισοπίθανα .

31. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της ποσότητας $P(A)\cdot P(A')$.

32. Ενας επιχειρηματίας έχει δύο γραμματείς. Η πιθανότητα μια οποιαδήποτε μέρα να λείπει η μια από το γραφείο είναι 0,08 , η πιθανότητα να λείπει η άλλη είναι 0,07 , ενώ να λείπουν και οι δύο ταυτόχρονα είναι 0,02 . Ποια η πιθανότητα :

α) να λείπει τουλάχιστον μια γραμματέας κάποια μέρα ,

β) τουλάχιστον μια γραμματέας να πάει στη δουλειά της κάποια μέρα ,

γ) ποια η πιθανότητα ακριβώς μια γραμματέας να πάει στη δουλειά της κάποια μέρα .

33. Να αποδείξετε ότι : $(A\cup B)' = A'\cap B'$ και $(A\cap B)' = A'\cup B'$ (Κανόνες De Morgan).

34. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές . Να βρείτε :

α) τον δειγματικό χώρο του πειράματος (σημ: η σειρά εμφάνισης των ενδείξεων λαμβάνεται υπόψιν) ,

β) τα ενδεχόμενα

A : να φέρουμε ακριβώς δύο φορές γράμματα ,

B : να φέρουμε τουλάχιστον δύο φορές γράμματα και

Γ : να φέρουμε το πολύ δύο φορές γράμματα .

γ) τα ενδεχόμενα : A', B', $A\cap B$, $(A\cup B)\cap \Gamma$.

35. Έστω K και Λ δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι:

α) $K' - \Lambda' = \Lambda - K$,

β) $(K-\Lambda)' = \Lambda \cup K'$.

36. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλλο τους . Να βρείτε :

α) τον δειγματικό χώρο του πειράματος και το πλήθος των στοιχείων του ,

β) την πιθανότητα και τα τρία παιδιά να είναι αγόρια ,

γ) την πιθανότητα και τα τρία παιδιά να είναι αγόρια ή να είναι κορίτσια ,

δ) την πιθανότητα ακριβώς δύο παιδιά να είναι αγόρια ή ακριβώς δύο παιδιά να είναι κορίτσια ,

ε) την πιθανότητα τουλάχιστον ένα παιδί να είναι αγόρι .

σημ: Θεωρούμε ότι τα ενδεχόμενα από μία γέννηση να έχουμε αγόρι ή κορίτσι είναι ισοπίθανα.

37. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A)=0,8$ και $P(B)=0,5$.

α) να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα ,

β) να αποδείξετε ότι $0,3 \le P(A \cap B) \le 0,5$.

38. Σε ένα δείγμα πληθυσμού το οποίο αποτελείται από 50 άτομα, 21 έχουν ομάδα αίματος Ο, 22 έχουν ομάδα αίματος Α , 5 έχουν ομάδα αίματος Β και 2 έχουν ομάδα αίματος ΑΒ.

α) να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων του δείγματος ,

β) να βρείτε την πιθανότητα :

i) ένα άτομο να έχει ομάδα αίματος Ο ,

ii) να έχει Α ή Β ,

iii) να μην έχει ούτε Α ούτε Ο ,

iv) να μην έχει ομάδα αίματος ΑΒ .

39. Ένα κιβώτιο περιέχει x κόκκινες και y άσπρες μπάλες . Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα .

α) Αν η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη μπάλα είναι $\frac{3}{7}$, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους x και y. Είναι σωστός ή λανθασμένος ο ισχυρισμός ότι το κιβώτιο περιέχει 7 μπάλες ;

β) Αν στη συνέχεια προσθέσουμε στο κιβώτιο 5 κόκκινες μπάλες , η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη μπάλα γίνεται $\frac{1}{2}$. Να βρείτε τους x και y.

40. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής Χ . Αν η τυπική απόκλιση των τιμών είναι 3,8 , να βρείτε :

α) την μέση τιμή και την διάμεσο ,

β) την πιθανότητα μια τυχαία τιμή της μεταβλητής να βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s\,,\,\bar{x}+s)$.

x_i	ν_i
20	4
21	2
24	5
26	3
30	6
Σύνολο	20

41. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=4(x-1)(x^2-5x+6)$ και $g(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2+16x+2002$ και έστω $\Omega=\{\,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\,\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα $X=\{\,\lambda\in\Omega \;/\; f(\lambda)=0\,\}$ και Y=$\{\,\mu\in\Omega$ / η $g(x)$ παρουσιάζει ακρότατο στο $\mu\,\}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των Χ , Υ , $X\cap Y$, $X\cup Y$.

email: nikolopoulosathanasios@gmail.com

42. Από 120 μαθητές ενός λυκείου , 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ελληνικής μαθηματικής εταιρείας , 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ένωσης Ελλήνων φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς . Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή . Ποια η πιθανότητα :
α) να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς .
β) να συμμετέχει μόνο σε έναν από τους δύο διαγωνισμούς .
γ) να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς .

43. Η Β τάξη ενός λυκείου έχει 25 αγόρια και κορίτσια . Τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών και το $\frac{1}{5}$ των κοριτσιών επέλεξαν τη θετική κατεύθυνση και τα υπόλοιπα την θεωρητική και την τεχνολογική . Εκλέγουμε στην τύχη ένα άτομο . Αν η πιθανότητα το άτομο να είναι αγόρι και να μην επέλεξε τη θετική κατεύθυνση είναι $P=\frac{9}{25}$, να βρείτε :
α) πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια ,
β) ποια η πιθανότητα το άτομο να είναι κορίτσι και να μην επέλεξε τη θετική κατεύθυνση ;

44. Σε μια τάξη 20 παιδιών , τα 10 παιδιά μετακινούνται με λεωφορείο , τα 8 μετακινούνται με ποδήλατο και τα 6 μετακινούνται με λεωφορείο και ποδήλατο . Παίρνουμε στην τύχη ένα παιδί . Ποια η πιθανότητα :
α) το παιδί να μετακινείται με λεωφορείο ,
β) το παιδί να μετακινείται με ποδήλατο ,
γ) το παιδί να μετακινείται με λεωφορείο ή ποδήλατο ή και τα δύο ,
δ) το παιδί να μην μετακινείται με λεωφορείο ή να μην μετακινείται με ποδήλατο ,
ε) το παιδί να μετακινείται με λεωφορείο αλλά όχι με ποδήλατο .

45. Έστω Α , Β ενδεχόμενα του Ω . Αν ισχύουν $P(A)=0,7$ και $P(B)=0,6$ να αποδειχθεί ότι :
α) τα Α , Β δεν είναι ασυμβίβαστα ,
β) $P(A\cup B)\geq 0,7$,
γ) $P(A\cap B)\leq 0,6$.

46. Έστω ο πραγματικός αριθμός $x\neq 1$. Αν για τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=x\cdot P(B)$ και $P(B')=x\cdot P(A')$, τότε :
α) να υπολογιστούν οι $P(A), P(B)$ συναρτήσει του x ,
β) να αποδείξετε ότι $P(\Omega)=P(A)+P(B)$ και επιπλέον αν τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα ότι $\Omega=A\cup B$.

47. Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες μπάλες , x κόκκινες και y μαύρες . Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα . Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί .

48. Ένας περιπτεράς παρατηρεί ότι οι πελάτες του αγοράζουν σε ποσοστό 68% τσιγάρα , 54% εφημερίδες , 47% αναψυκτικά , 35% τσιγάρα και αναψυκτικά , 33% τσιγάρα και εφημερίδες , 22% εφημερίδες και αναψυκτικά , καθώς και 11% τσιγάρα και εφημερίδες και αναψυκτικά . Να βρείτε τις πιθανότητες να αγοράζουν :
α) μόνο τσιγάρα ,
β) μόνο εφημερίδες ,
γ) μόνο αναψυκτικά ,
δ) τσιγάρα και εφημερίδες αλλά όχι αναψυκτικά ,
δ) τσιγάρα και αναψυκτικά αλλά όχι εφημερίδες ,
ε) εφημερίδες και αναψυκτικά αλλά όχι τσιγάρα ,
στ) ούτε τσιγάρα ούτε εφημερίδες ούτε αναψυκτικά .

49. Δύο υποψήφιοι Α και Β συμμετέχουν σε έναν διαγωνισμό πρόσληψης σε δημόσιο οργανισμό. Αν η πιθανότητα να αποτύχει τόσο ο Α όσο και ο Β είναι ίση με την πιθανότητα να μην πετύχει ο Β , να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πετύχουν και οι δύο είναι ίση με την πιθανότητα επιτυχίας του Α.

50. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, το ενδεχόμενο
$B = \{ \lambda \in \Omega \ / \text{ η εξίσωση } 4x^2 - 4\lambda x + 4\lambda - 3 = 0 \text{ έχει διπλή ρίζα} \}$ και ισχύει :
$2P(1) = 2P(3) = 2P(5) = 2P(7) = 3P(2) = 3P(4) = 3P(6) = 3P(8)$. Να βρείτε την $P(B)$.

51. Αν για τα ενδεχόμενα Α , Β , Γ ισχύουν $P(A \cap \Gamma) \geq P(B \cap \Gamma)$ και $P(A \cap \Gamma') \geq P(B \cap \Gamma')$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει $P(A') \leq P(B')$.

52. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης αποτελείται από 2004 απλά ενδεχόμενα. Αν Α και Β είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να ισχύει $9 \cdot P^2(B) + 5 = 13 \cdot P(B) + P(A)$ τότε να αποδείξετε ότι : $(3 \cdot P(B) - 2)^2 \leq 0$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα $P(A)$ και $P(B)$.

53. Έστω $\Omega = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ ένας δειγματικός χώρος , του οποίου οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του $P(\alpha), P(\beta), P(\gamma), P(\delta)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου $\Delta = \{\alpha, \gamma\}$ είναι $\frac{9}{20}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A = \{ \alpha, \delta \}$ και $B = \{ \alpha, \beta, \delta \}$. Στη συνέχεια να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

54. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση f, συνεχής στο $x=0$, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = 6f(0)-1$. Αν η $P(A)$ είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του χωρίου, το οποίο σχηματίζει σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα, $P(B)=f(0)$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

55. Κατά την συμπλήρωση των μηχανογραφικών δελτίων για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση το 60% των υποψηφίων δεν δήλωσε σχολές του $2^{ου}$ επιστημονικού πεδίου , το 25% δεν δήλωσε σχολές του $5^{ου}$ επιστημονικού πεδίου και το 20% δεν δήλωσε σχολές ούτε του $2^{ου}$ ούτε του $5^{ου}$. Επιλέγουμε τυχαία έναν υποψήφιο , να βρείτε την πιθανότητα ο υποψήφιος να έχει δηλώσει σχολές του $2^{ου}$ και του $5^{ου}$ πεδίου.

56. Δύο ενδεχόμενα Α και Β έχουν αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ που είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)x-\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)=0$, $\frac{1}{2}<\alpha<1$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α , Β δεν είναι ασυμβίβαστα και στη συνέχεια αν ισχύει $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, να αποδείξετε ότι $P(A\cup B)>\frac{7}{8}$.

57. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{2x}+\left(e^{x}-1\right)^2$ με $x\le 0$. Να μελετηθεί η μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της f. Αν $P(A)=e^{x}$, να αποδείξετε ότι ισχύει : $P^2(A)+P^2(A')\ge\frac{1}{2}$.

58. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=e^{\eta\mu x}+\sqrt{\eta\mu x+4}$ και $g(x)=\frac{3\sqrt{x+3}-6}{x^3-1}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x=0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{1}{5}f'(0)$. Να αποδείξετε ότι τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα και ότι ισχύει $\frac{1}{20}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{4}$ αν $P(A)=\lim_{x\to 1} g(x)$ και $P(B)=\frac{1}{f'(0)}$.

59. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύουν $P(A')=1-x$, $P(B)=\frac{x}{x+1}$, $P(A\cap B)=\frac{x}{x+1}$, όπου $x\in(0,1)$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)'$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $P(A-B)$, όταν $x=\frac{1}{2}$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν υπάρχει η μέγιστη τιμή της $P(A\cup B)$ και εφόσον υπάρχει να την υπολογίσετε.

60. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν $f'(0)=\dfrac{P(B)-1{,}001}{P(A)}$, $f'(1)=\dfrac{1}{P(A')}$ και οι εφαπτόμενες της καμπύλης στα σημεία $M(0,f(0))$ και $N(1,f(1))$ τέμνονται κάθετα , τότε να αποδείξετε ότι $A\cap B\neq\varnothing$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)\geq P^2(A)+0{,}001$.

61. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{\alpha}{2}x^2+\dfrac{1}{8}\alpha x-2$, $x\in\mathbb{R}$. Αν α είναι η πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου Ω , που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα με $A\neq\varnothing$ και $A\neq\Omega$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

62. Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)+P(B)\neq 2P(A\cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x)=\left[x-P(A\cup B)\right]^3-\left[x-P(A\cap B)\right]^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

α) $P(A\cap B)\neq P(A\cup B)$,

β) η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x=\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$,

γ) εάν τα ενδεχόμενα Α , Β είναι ασυμβίβαστα , να δείξετε ότι $f\left[P(A)\right]=f\left[P(B)\right]$.

(4ο Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 2002)

63. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και τα ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα Α , Β , Γ , ώστε $A\cup B\cup\Gamma=\Omega$.

α) Να αποδειχθεί ότι: $P(A)+P(B)+P(\Gamma)=1$,

β) αν δίνονται οι $P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$ και $P(B\cup\Gamma)=\dfrac{4}{5}$ να βρεθεί η πιθανότητα $P(A\cup\Gamma)$.

64. Έστω Α , Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν :

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\dfrac{7}{8}$.

(ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A\cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο

$X=\left\{k,\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right\}$, όπου $k=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5}$.

α) Να βρεθεί το k.

β) Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A\cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

(3ο Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 2005)

email: nikolopoulosathanasios@gmail.com