# ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Σ Χ Ε Δ Ι Α   Δ Ι Δ Α Σ Κ Α Λ Ι Α Σ

**Δημήτρης Μπουνάκης**
**Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών**
**dimitrmp@sch.gr**
**Ηράκλειο, Οκτώβριος 2010**

**ΘΕΜΑ : ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟΥ : ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ**

Συνάδελφοι,

Ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν ώστε μια διδασκαλία να είναι αποτελεσματική, είναι και ο σωστός προγραμματισμός της. Το στόχο αυτό εξυπηρετούν κυρίως τα σχέδια διδασκαλίας. Για να θυμηθούν λοιπόν οι παλαιότεροι και να γνωρίσουν οι νέοι συνάδελφοι, σας στέλνω ένα σύντομο περιεχόμενο ενός μοντέλου σχεδίασης της διδασκαλίας (δεν είναι μοναδικό), σύμφωνα με την θεωρία της «Αρχιτεκτονικής της Διδασκαλίας» των Gagne - Φλουρή και τρόπους υλοποίησής του σε μερικές διδακτικές ενότητες Μαθηματικών του Λυκείου.
Το σχέδιο αυτό χαρακτηρίζεται ως *πλήρες*, σε αντίθεση με ένα *απλό* σχέδιο διδασκαλίας : το απλό σχέδιο περιέχει συνήθως τις βασικές διδακτικές ενέργειες, όχι αναλυτικά γραμμένες και μερικές κρίσιμες ερωτήσεις ή υποδείξεις, ασκήσεις ή προβλήματα.
Πιστεύω ότι τα πλήρη σχέδια πρέπει να γίνονται όταν η διδακτική ενότητα το επιβάλλει (π.χ. διδακτική ενότητα με σημαντική ή σύνθετη θεωρία). Ευχής έργο θα ’ταν κάθε σχολική χρονιά κάθε συνάδελφος, ιδίως ο νέος, να φτιάχνει τουλάχιστον 5-6 πλήρη σχέδια διδασκαλίας διατηρώντας συγχρόνως και ένα αρχείο ανά τάξη, χρήσιμο για τα επόμενα χρόνια. Η γνώση και η εμπειρία που θα αποκόμιζε θα ’ταν πολύτιμη για το διδακτικό του έργο. Για τα περισσότερα μαθήματα αρκεί πολλές φορές ένα απλό σχέδιο διδασκαλίας μαζί με την γενικότερη εσωτερικευμένη γνώση, εμπειρία και ικανότητα του Καθηγητή.
Αυτό που πρέπει να αποφεύγει ο καθηγητής είναι να επιχειρεί να διδάξει διδακτικά απροετοίμαστος, γνωρίζοντας μόνο την μαθηματική ύλη, ή μάλλον με μόνη την βεβαιότητα αυτή, «λέγοντας» απλά αυτά που έχει κατά νου, χωρίς πρόγραμμα, χωρίς μέθοδο, χωρίς πορεία, «όπως έρθουν τα πράγματα».
Βέβαια, μερικοί ισχυρίζονται ότι τα σχέδια διδασκαλίας είναι παρωχημένα, ότι δεν πρέπει να υπάρχουν, με διάφορα επιχειρήματα, ξεχνώντας ασφαλώς ότι και η απλή αγορά ενός ενδύματός μας γίνεται με κάποιο (άγραφο) σχέδιο και ότι πράξεις στη ζωή μας γενικά, οποιασδήποτε μορφής, που γίνονται στη τύχη και απρογραμμάτιστα είναι συχνά λανθασμένες με ολέθριες πολλές φορές συνέπειες... Ορισμένα από τα επιχειρήματα που ακούει κανείς κατά των σχεδίων (κυρίως αυτών της παλιάς

άκαμπτης μορφής) έχουν θεωρητική βάση, σύμφωνα με τις νέες απόψεις για τη διδασκαλία-μάθηση. Παραβλέπουν όμως το γεγονός ότι η διδασκαλία δεν είναι μια υπόθεση εργασίας, ένα θεωρητικό γεγονός, αλλά ένα σύνολο ζωντανών και συχνά «απρόβλεπτων» πράξεων, με τεράστιες συνέπειες στη πνευματική ζωή του μαθητή- αλλά και στο κύρος του Καθηγητή- που αν δεν έχουν κάποιο (όχι αυστηρό) προγραμματισμό, σπάνια θα τον βοηθήσουν πραγματικά: απλά, το πιθανότερο είναι ότι θα περάσει η ώρα με τον καθηγητή «να παραδίνει το μάθημα» με λίγες πιθανότητες αποτελεσματικής διδασκαλίας.

Εξ' άλλου ένα σχέδιο διδασκαλίας είναι ανεξάρτητο της μορφής διδασκαλίας και της μεθόδου που θα επιλεγεί και δεν υπονοεί σε καμιά περίπτωση (όπως παλαιότερα) κάποια σταθερή μορφή ή μέθοδο.

Μια συχνή ερώτηση είναι αν ένα σχέδιο διδασκαλίας «πρέπει» να εφαρμόζεται επακριβώς. Η απάντηση είναι ότι στην πράξη λίγες φορές υλοποιείται εξ' ολοκλήρου και αυτό οφείλεται, είτε στην πληθώρα δραστηριοτήτων, είτε στο ότι δεν μπορούμε να προβλέψομε επακριβώς τις δυσκολίες που θα συναντήσουν οι μαθητές κλπ. Είναι όμως προτιμότερο να υπάρχει ένας «πλούσιος» σχεδιασμός υπακούοντας στις *αρχές της συνολικότητας* αλλά και *πρακτικότητας* (χωρίς φυσικά πλατειασμούς ή επουσιώδη ή άσχετα θέματα), παρά να είναι ελλιπής. Βέβαια η εμπειρία και η γνώση θα μας βοηθήσει σιγά-σιγά να προσεγγίζουμε το σχεδιασμό με την διδακτική πράξη.

Εξ' άλλου ένα σχέδιο διδασκαλίας είναι απλά ένα σχέδιο, ένα οδηγός μελλοντικής εργασίας. Το που θα μας οδηγήσει η διδακτική πράξη, δεν είναι πάντα εύκολο να το ξέρουμε, έχουμε όμως ένα οδηγό, ένα «μπούσουλα» για να μην χάσουμε τον «σωστό δρόμο». Εν τέλει, σχεδιάζοντας μια διδακτική ενότητα, ξέρουμε μέχρι που μπορούμε να πάμε, άσχετα αν θα χρειαστούμε και δεύτερη διδακτική ώρα για την υλοποίηση του σχεδίου. Δεν μας επιτρέπει ο χώρος εδώ να επεκταθούμε άλλο στην σκοπιμότητα των σχεδίων διδασκαλίας, που είναι άλλωστε βασικό θέμα σε βιβλία διδακτικής Μαθηματικών, γι' αυτό είναι ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε σχετικές ερωτήσεις, παρατηρήσεις και σχόλια.

Το διδακτικό υλικό αυτό περιλαμβάνει:

Α Γενική μορφή και περιεχόμενο ενός (πλήρους) σχεδίου διδασκαλίας,
Β. Σχέδια Διδασκαλίας Λυκείου (10, τάξη Α΄ 6, τάξη Β΄ 3, τάξη Γ΄ 1)

Όλα σχεδόν τα σχέδια διδασκαλίας έχουν υλοποιηθεί προσωπικά σε δειγματικές διδασκαλίες. Τα σχέδια αυτά δίνονται εδώ ως παραδείγματα, αλλά και για εφαρμογή, με κάποιες ίσως προσαρμογές κατά την κρίση του διδάσκοντα.

## Α. ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΕΝΟΣ (ΠΛΗΡΟΥΣ) ΣΧΕΔΙΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

### Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης.

Διατυπώνουμε όσο το δυνατόν σαφέστερα (με συγκεκριμένα ρήματα) τι επιδιώκουμε να κάνουν ή τι δυνατότητες θα αποκτήσουν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος (ή μετά από μια σειρά μαθημάτων).Αυτό δεν σημαίνει ότι χάνονται οι δυνατοί στόχοι, των μαθηματικών: λογική σκέψη, κριτική σκέψη, ανάλυση, σύνθεση κ.ά. Απλά αυτοί οι στόχοι είναι μακροπρόθεσμοι, ενώ η σχολική καθημερινότητα απαιτεί ένα ξεκαθάρισμα στόχων που θα εμπνέουν και θα φωτίζουν την κοινή πορεία δασκάλου και μαθητών. Οι διδακτικοί στόχοι αντιστοιχούν στα είδη μάθησης (κατά Gagne, όσο αφορά τον γνωστικό τομέα) που είναι:

**1. «Πληροφορίες»,** δηλαδή απλές γνώσεις, ορισμούς, κανόνες, π.χ. να αναφέρουν οι μαθητές (ή να απομνημονεύσουν) τις ιδιότητες των δυνάμεων ή τα κριτήρια ισότητας τριγώνων κλπ.

**2. «Νοητικές δεξιότητες».** Είναι οι διαφόρων ειδών ικανότητες που επιδιώκουμε να μπορούν να κάνουν οι μαθητές, όπως δυνατότητα εφαρμογής κανόνα, σύνθεση κανόνων, λύση προβλήματος, π.χ. να μπορούν οι μαθητές να εφαρμόσουν ένα κριτήριο ισότητας τριγώνων σε δεδομένα τρίγωνα (κανόνας) ή να μπορούν να συγκρίνουν δυο τμήματα ή δυο γωνίες (επιλέγοντας οι ίδιοι τα κατάλληλα τρίγωνα: σύνθεση κανόνων).

**3. «Γνωστική στρατηγική»:** είναι η δυνατότητα του ατόμου να κατευθύνει την προσοχή, την αντίληψη, την μνήμη και γενικά τις πνευματικές του δυνάμεις ώστε να επινοεί τρόπους αντιμετώπισης δύσκολων ή πρωτότυπων ή ανοικτών προβλημάτων (όχι άμεση εφαρμογή συγκεκριμένης θεωρίας- ασκήσεις). Παρόλο που το είδος αυτό μάθησης είναι δύσκολο να καλλιεργηθεί ικανοποιητικά στο σχολείο, πρέπει να το επιδιώκουμε όσο είναι δυνατόν. Μέσα στις συνθήκες μάθησης της γνωστικής στρατηγικής είναι και η μεθοδολογία λύσης προβλημάτων, όπως και η παρουσίαση από τον καθηγητή λύσεων σε μη τετριμμένα προβλήματα.
Στα μαθηματικά υπάρχουν πολλές ευκαιρίες και προβλήματα που μπορούν να καλλιεργήσουν αυτό το είδος μάθησης, π.χ.
α) σε μια μεγαλούπολη διασταυρώνονται, ανά δυο, 100 δρόμοι, χωρίς να περνούν τρεις ή παραπάνω από το ίδιο σταυροδρόμι. Πόσα φανάρια θα χρειαστούν για τις διασταυρώσεις αυτές;
β) Να βρεθεί ένα δεκαψήφιος (φυσικός) αριθμός ώστε το πρώτο ψηφίο του (από αριστερά) να δηλώνει το πλήθος των μηδενικών του, το δεύτερο το πλήθος των 1, το τρίτο το πλήθος των 2, κ.ο.κ., το δέκατο το πλήθος των 9 (που έχει αυτός ο αριθμός).

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας**: Είναι ο (ορατός) τρόπος που επικοινωνεί ο μαθητής με τον Καθηγητή ( π.χ. μονόλογος, αυτενέργεια, καθοδηγούμενη αυτενέργεια, διάλογος, ερωτηματικός διάλογος, ομαδοσυνεργατική διδασκαλία κλπ).

**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : είναι η μέθοδος με την οποία ο μαθητής κατακτά το γνωστικό αντικείμενο (π.χ. Επαγωγική, Παραγωγική, εποπτικοπαραγωγική Αναλυτική, Συνθετική, κλπ). Στο Λύκειο χρησιμοποιούμε κυρίως (αλλά όχι αποκλειστικά) την παραγωγική μέθοδο διδασκαλίας, ενώ στο Γυμνάσιο την επαγωγική (αλλά όχι αποκλειστικά, ιδίως στην Γ΄ τάξη).

**IV. Εποπτικά μέσα**: π.χ. απλός ή διαδραστικός πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες ή μαρκαδόροι., διάφορες κατασκευές, προγράμματα με Η.Υ κλπ.

## V. Διδακτικές ενέργειες (Δ. Ε.)

Τις εσωτερικές διαδικασίες ή «φάσεις της μάθησης» που γίνονται στο εσωτερικό του μαθητή (κεντρικό νευρικό σύστημα) μπορούν να επηρεάσουν οι εξωτερικές (*διδακτικές) ενέργειες* του δασκάλου-καθηγητή που (πρέπει να) γίνονται κατά την διάρκεια της διδασκαλίας. Οι Δ. Ε. (κατά Gagne) είναι

**1. Δημιουργία κινήτρων μάθησης**.

Δίνουμε ένα ερώτημα, ένα πρόβλημα ή μια δραστηριότητα που ζητά απάντηση-λύση για να κινήσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών. Τα νέα βιβλία του Γυμνασίου είναι πλούσια σε τέτοιες δραστηριότητες. Τα προβλήματα είναι συνήθως από την καθημερινή ζωή όπου οι μαθητές έχουν παραστάσεις, αλλά μπορούν να αναφέρονται και σε «έλλειψη καθαρά μαθηματικής γνώσης» (συνήθως στο Λύκειο). Πάντα πρέπει να μας βασανίζει το ερώτημα:
- *πως θα δημιουργήσω κίνητρα στους μαθητές μου για το νέο μάθημα, πως θα το κάνω ενδιαφέρον;*

**2. Πληροφόρηση των μαθητών για τους στόχους του μαθήματος.**
Οι μαθητές είναι καλό να γνωρίζουν από την αρχή για το τι πρόκειται περίπου να μάθουν. Η ενέργεια αυτή μπορεί υλοποιηθεί και με ένα συνοπτικό διάγραμμα του μαθήματος Έτσι πιστεύουμε ότι θα αυξηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για το νέο μάθημα.

**3. Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων.**
Είναι προφανής η χρησιμότητα των προηγούμενων σχετικών γνώσεων για την κατανόηση του νέου μαθήματος, προπάντων στα Μαθηματικά. Πολλές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το νέο μάθημα γιατί δεν έχει ληφθεί υπόψη ο παράγοντας αυτός.

**4. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών ή παρουσίαση του υλικού για την μάθηση.**
Στρέφομε την προσοχή των μαθητών σε συγκεκριμένο σημείο ή ερέθισμα ή πρόβλημα και τους παροτρύνουμε να προχωρήσουν..

**5. (Ενδεχόμενη) Παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.**
Μετά την υποβολή ερώτησης ή ανάθεση εργασίας στους μαθητές, αν δεν προχωρούν τους απευθύνουμε ερωτήσεις-υποδείξεις, οδηγίες, νύξεις, παροτρύνσεις κ.λ.π. για να τους βοηθήσουμε. Η βοήθεια δίνεται βαθμιαία, από τις γενικές ερωτήσεις-υποδείξεις, προχωρούμε ανάλογα με την πρόοδο των μαθητών στις πιο ειδικές (Βλ. διδακτικό υλικό «Πώς να το λύσω» καθώς και «Οι ερωτήσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών»).

**6. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.**
- Ανακεφαλαίωση
- Επισήμανση *των δυνατοτήτων* των προτάσεων, θεωρημάτων κλπ

- Μέριμνα για την καλή «κωδικοποίηση» των νέων στοιχείων με μνημονικούς κανόνες, πινακοποίηση, ιεράρχηση, ταξινόμηση, ερωτήσεις σύντομης απάντησης κλπ.

**7. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση.**
Απλές εφαρμογές και ασκήσεις της θεωρίας. Βασικό σημείο εδώ είναι η επιβεβαίωση της νέας γνώσης ή των ελλείψεων του μαθητή. Προτιμούμε να έρθει στο πίνακα για να παρουσιάσει την εργασία του «μέτριος» μαθητής. Ο μαθητής αυτός, συνήθως έχει εργαστεί, έχει «πάθει» και είναι σε θέση να «παρασύρει» στη μάθηση όλη την τάξη με τα πιθανά λάθη του.

**8. Μεταφορά μάθησης.**
Λύση αρχικού προβλήματος-δραστηριότητας, εφαρμογές δυσκολότερου επιπέδου-ασκήσεις (οριζόντια μεταφορά) αλλά και υποβοήθηση επόμενων μαθημάτων (κατακόρυφη μεταφορά).

**9. Εργασία στο σπίτι για εμπέδωση της μάθησης και έλεγχος για επιβεβαίωση της εργασίας στα τετράδια των μαθητών.**
Ιδιαίτερη πρόβλεψη για προαιρετικές ασκήσεις για τους καλούς μαθητές ή μαθητές με αυξημένα Μαθηματικά ενδιαφέροντα.

Η σειρά που με την οποία γίνονται οι Δ. Ε. είναι η παραπάνω, όμως δεν είναι αυστηρή: μπορεί να αλλάζει, αλλά και να παραλείπεται κάποια Δ.Ε., π.χ. η ανάκληση προηγουμένων γνώσεων αν είναι διαπιστωμένη η κατάκτησή τους. Πολλές φορές στην αρχή του μαθήματος μαζί με τον έλεγχο του προηγουμένου μαθήματος κάνουμε και ανάκληση προηγουμένων γνώσεων. Επίσης η Δ.Ε. της συγκράτησης των νέων στοιχείων μπορεί να γίνει μετά ή συγχρόνως με την εκτέλεση των ενεργειών του μαθητή κλπ. Περισσότερα για τα παραπάνω θέματα ο αναγνώστης θα βρει κυρίως στο βιβλίο των Μ. Κασσωτάκη – Γ. Φλουρή: Μάθηση και Διδασκαλία, τ. Β΄, 2005, σελ. 159-166 και σελ. 275-291, το οποίο συνιστώ γενικά για κάθε εκπαιδευτικό.

Για οποιαδήποτε ερώτηση, παρατήρηση ή συμπλήρωση είμαι στη διάθεσή σας.

# *Β. ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*

## 1. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ (ΠΛΗΡΕΣ): ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**$2^η$ Διδακτική ενότητα (από την ενότητα 1.2): Ιδιότητες ανισοτήτων (1,2,3).**

Σημείωση: Για την ενότητα 1.2 προτείνω, λόγω της σπουδαιότητάς της, χωρισμό σε 4 Διδακτικές ενότητες**:**

$1^η$ .Ορισμός διάταξης και οι πέντε ιδιότητες της σελίδας 30-31.
$2^η$ .Ιδιότητες ανισοτήτων 1, 2, 3.
$3^η$ .Διδακτική ενότητα: Ιδιότητα 4, Πόρισμα κλπ (όλες οι αποδείξεις, χάριν και της μεθόδου της εις άτοπο απαγωγής που σπανίζει στην Άλγεβρα).
$4^η$ .Διαστήματα -: επανάληψη – λύση ασκήσεων.

### *Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης*

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να γράφουν και να αναφέρουν (με λόγια) τις βασικές ιδιότητες 1, 2, 3 των ανισοτήτων. (είδος μάθησης «πληροφορίες»)
2. Να διαπιστώσουν ότι οι ιδιότητες με τις πράξεις διαίρεση και αφαίρεση δεν ισχύουν (γενικά). (είδος μάθησης «πληροφορίες»)
3. Να αποκτήσουν τις ικανότητες να εφαρμόζουν τις παραπάνω ιδιότητες σε διάφορες περιπτώσεις. (είδος μάθησης «Νοητικές δεξιότητες»)

***ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας***: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.
***ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος*** : Επαγωγική - Παραγωγική.
**IV**. **Εποπτικά μέσα**: Πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες.

### IV. Διδακτικές ενέργειες

*1. Έλεγχος και ανάκληση προηγουμένων γνώσεων.*

- Ερωτήσεις από το προηγούμενο μάθημα…
- Ποιες από τις παρακάτω ανισότητες είναι αληθείς;
  $7 \geq 6$, $x^2+1 \geq 1$, $1+\alpha^2 < 0$ , $-10 \leq -10$, $-2(1+\kappa^4) > 0$.
- Αν $(x - \alpha)^2 + y^2 = 0$ τότε τι συμπεραίνετε για το x, y;...
- Δείξετε ότι $2(x^2 + 25) \geq (x + 5)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ δείξετε ότι $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα).

*2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης*

Πρόβλημα
Μια γέφυρα μπορεί να δεχθεί βάρος μέχρι 18 τόνους. Ένα φορτηγό βάρους 3500 Kg πρόκειται να περάσει από την γέφυρα αυτή φορτωμένο με σωλήνες βάρους 50 Kg. Μέχρι πόσες τέτοιες σωλήνες μπορεί να φορτώσει ώστε να μπορέσει να περάσει;
(οι μαθητές θα μεταφράσουν το πρόβλημα σε Μαθηματική γλώσσα …)

*3. Πληροφόρηση.*
Σήμερα θα μάθετε μερικές ιδιότητες των ανισοτήτων σχετικές με τις πράξεις για να λύνετε σχετικά προβλήματα αλλά και να αποδεικνύετε ανισοταυτότητες.

*5. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών - παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*
Στην ανισότητα $4 > -2$:
- Προσθέσετε (αφαιρέσετε) το 6 .
- Πολλαπλασιάσετε (διαιρέσετε) με το 3 (-3).
- Τι συμπεραίνετε;

*4. Νέα μάθηση (με ενδεχόμενη παροχή οδηγιών).*
Α. Ιδιότητες και πράξεις: αφού έχει γίνει μια πρώτη επαγωγική προσπέλαση στις ιδιότητες παροτρύνουμε τους μαθητές να αποδείξουν 1 ή 2 από τις:
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$ (διαγραφής στην πρόσθεση-αφαίρεση),
- αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ (διαγραφής θετικού παράγοντα). Διαίρεση;
- αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$. Διαίρεση;

Β. α) Προσθέσετε, πολλαπλασιάσετε, κατά μέλη δυο δικές σας ομόστροφες (ετερόστροφες) ανισότητες (δυο ομάδες). Τι συμπεραίνετε; Απόδειξη της προσθετικής…
β) Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα υπό συνθήκη…
γ) Αφαιρέσετε, διαιρέσετε. Τι συμπεραίνετε;

❖ Συμπέρασμα - διατύπωση με λόγια από τους μαθητές των ιδιοτήτων.

6. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*
- Αν $\alpha + x > \beta$ τότε $x >$…, αν $\alpha - x < \beta$ τότε $x$…..(επισήμανση της αλλαγής προσήμου κατά την μεταφορά όρου)
- Αν $1 < x < 2$ και $0 < y < 3$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι αριθμοί $-3x$, $3x + 1$, $x + y$, $x - y$, $xy - 1$.
- Αν $\alpha + \beta - 2 > 0$, $\beta + \gamma > 3$, $\gamma + 1 > -\alpha$ , δείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma > 2$.

*7. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.*
Οι ιδιότητες έχουν γραφεί στον πίνακα. Ανακεφαλαίωση από τους μαθητές (ειδική αναφορά στον αρνητικό παράγοντα και στις εξαιρέσεις).

*8. Μεταφορά μάθησης.*
- Λύση αρχικού προβλήματος …(περισσότερα για ανισώσεις παρακάτω…)
- Αν $\alpha > \beta > 0$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ (μικρός θετικός παρανομαστής μεγάλο κλάσμα κλπ)
- Αν $\theta > 0$ τότε $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ (να απομνημονευθεί όπως και η προηγούμενη).
- Αν $\alpha<\beta$ να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\alpha$, $\alpha-1$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta + 2$, $\beta$.

*9. Εργασία στο σπίτι:*

i. Ασκήσεις βιβλίου Α΄ ομάδας 5, 6, 8.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς 1, $\frac{1}{1+\alpha}$, $\frac{1}{1+\beta}$.

*Προαιρετική άσκηση*: Αν $\alpha > 2\beta > 0$ δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} > \frac{3}{2}$ (κατασκευαστική μέθοδος).

Εθελοντική εργασία: Ένας μαθητής να γράψει σ' ένα χαρτόνι τις ιδιότητες των ανισοτήτων (για την τάξη).

*Σημείωση: Δίνουμε εδώ μερικές ασκήσεις, τουλάχιστον για καλούς μαθητές, από την 3η διδακτική ενότητα (ιδιότητα 4) θέλοντας να τονίσουμε τον σημαντικό ρόλο της..*

1. Αν $2x - 1 > 1$ δείξετε ότι $x^{1453} - 1 > 0$ και αντιστρόφως.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις
$(1 + x^2)^{2007} = 1$, $(3\lambda + 1)^{2007} - (\lambda + 3)^{2007} = 0$ με $\lambda > 0$, $(y - 1)^{4016} = (y^2 + 2)^{2008}$.

3. Αν $x > y > 0$ δείξετε ότι $\frac{1821}{1897 + 1866x^{1913}} < \frac{1821}{1897 + 1866y^{1913}}$ (επισήμανση και εδώ της κατασκευαστικής μεθόδου απόδειξης ανισοτήτων).

4. Έστω ν περιττός φυσικός και α, β πραγματικοί αριθμοί.
i) Αν $\alpha < \beta$ αποδείξετε ότι $\alpha^\nu < \beta^\nu$, ii) Ισχύει, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$ (η χρήσιμη αυτή ιδιότητα να γραφεί συμπληρωματικά από τους μαθητές στο κάτω μέρος της σελίδας 30 του βιβλίου μαζί με τις άλλες).
iii) Να λύσετε την εξίσωση $(3x - 4)^{2007} = (x^2 - x)^{2007}$.

## 2. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Διδακτική ενότητα 1.4: (Ορισμός ν-οστής ρίζας) - Ιδιότητες ριζών.**

(Σημ. Είχε διδαχθεί ο ορισμός της ν-οστής ρίζας στο προηγούμενο μάθημα)

**Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν τον ορισμό της ν-οστής ρίζας θετικού αριθμού (ή μηδέν) και τις σχετικές ιδιότητες. («πληροφορίες»)
2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ριζών στον αλγεβρικό λογισμό. («Νοητικές δεξιότητες»)

ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας: Ερωτηματικός διάλογος - Καθοδηγούμενη αυτενέργεια.
ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος : Συνδυασμός επαγωγικής - παραγωγικής μεθόδου.
ΙV. Εποπτικά μέσα: Πίνακας, χρωματιστοί μαρκαδόροι, χάρτινο πινακίδιο.

### V. Διδακτικές ενέργειες

1. *Έλεγχος- Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων*

Α. Ορισμός τετραγωνικής ρίζας και ιδιότητες.

Β. Ορισμός θετικής ν-οστής ρίζας θετικού αριθμού θ (ή μηδέν).

Γ. Βασικές σχέσεις : $\left(\sqrt[\nu]{\theta}\right)^{\nu} = \theta$ , $\sqrt[\nu]{\theta^{\nu}} = \theta$ ($\nu \in N^*$, $\theta \geq 0$).

2. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

Α. Να βρείτε τις ρίζες $\sqrt[5]{32}$ , $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$ .

Β. Συμπληρώστε : α) $\sqrt[4]{-16} = ....$ , β) $\sqrt[6]{(-3)^6} = ....$ γ) $\sqrt[4]{x^4} = ......$

Γ. Λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{|\chi|} = 4$

Δ. Για ποιες τιμές του α έχει νόημα αριθμού η παράσταση $\Pi = \sqrt[15]{1-\alpha}$ ;

3. *Δημιουργία κινήτρων μάθησης - Πληροφόρηση*

- Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό $\nu = \sqrt[5]{\dfrac{16}{2009}} \cdot \sqrt[5]{4018}$ ;
- Σήμερα θα μάθουμε τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών.

4. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*
Α. *Βασικές ιδιότητες.* Από τις γνωστές ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών στις ιδιότητες των ν-οστών ριζών (γράφονται στο πίνακα οι ιδιότητες )

- Συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$ , $\sqrt[3]{8\cdot 27}$ και $\sqrt[3]{8}/\sqrt[3]{27}$ , $\sqrt[3]{8/27}$
- Τι παρατηρείτε;
- Απόδειξη της $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$ (με ύψωση…).
- Όμοια για το πηλίκο.
- Γενίκευση – Ειδίκευση ( $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}$ ) , $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

5. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Βρείτε τις ρίζες $\sqrt[4]{160000}$ , $\sqrt[3]{0{,}008}$ .
- Ένας μαθητής έγραψε κάποτε σε ένα διαγώνισμα ότι
  $\sqrt[3]{8+27}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}$ και $\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{8}=\sqrt[6]{72}$ . Συμφωνείτε;
- Υπολογίσετε τον αριθμό $\nu=\sqrt[5]{\dfrac{16}{2009}}\cdot\sqrt[5]{4018}$ .
- Συμπληρώστε $\sqrt[5]{2}\cdot\ldots\ldots.=\left(\sqrt[5]{2}\right)^{5}=\ldots\ldots.$ , $\sqrt[3]{4}\cdot\ldots\ldots.=4$ .
- Να μετατρέψετε το κλάσμα $K=\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

6. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

*Άλλες ιδιότητες (ίσως χωρίς απόδειξη) :* $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\theta}}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\theta}$ , $\sqrt[\nu\rho]{\theta^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\theta^{\mu}}$

Παραδείγματα: $\sqrt{\sqrt[3]{2^{6}}}=$ , $\sqrt[16]{9^{8}}=$

❖ Ανακεφαλαίωση.

7. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

Να γράψετε με τη μορφή μιας ρίζας τις παραστάσεις

$$A=\sqrt[4]{3^{3}}\cdot\sqrt[3]{3}\ ,\ B=\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\ .$$

Ανακεφαλαίωση: Διατύπωση Ιδιοτήτων

*Εργασία στο σπίτι*

1.Ασκήσεις βιβλίου (σελ.50-51) : 7, 8 (i), 11(ii), Β΄ ομάδα την 5, σελ..53:25, 26, 27, 28. .

2. *Προαιρετική* : Να λύσετε ως προς x την εξίσωση $\psi=\sqrt[3]{x^{2}}$ , $x\in R$.

3. *Προαιρετική* : Αν $\chi>\psi>0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{\psi}=\frac{\chi-\psi}{\sqrt[3]{\chi^{2}}+\sqrt[3]{\chi\psi}+\sqrt[3]{\psi^{2}}}\ .$$

(Υπ. μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και μια γνωστή κυβική ταυτότητα)

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ**

1. *Ορισμός:* . ν-οστή ρίζα ενός θετικού αριθμού θ λέμε τον

………….. αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει …………….= θ και τον συμβολίζουμε με ρ =…….. Άρα ισχύουν

$\left(\sqrt[\nu]{\theta}\right)^{\nu} = .....$ και $\sqrt[\nu]{\theta^{\nu}} = ....$ και $\sqrt[\nu]{0} = ....$ (ν = 1, 2, 3, 4….)

2. Α. Να βρείτε τις ρίζες $\sqrt[5]{32} = ........$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = .......$

Β. Συμπληρώστε : α) $\sqrt[4]{-16} = ....$ , β) $\sqrt[6]{(-3)^6} = ....$ γ) $\sqrt[4]{x^4} =......$

Γ. Λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{|\chi|} = 4$.
Λύση

Δ. Για ποιες τιμές του α έχει νόημα αριθμού η παράσταση $\Pi = \sqrt[15]{1-\alpha}$ ;
Λύση

- Συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$ , $\sqrt[3]{8\cdot 27}$ και $\sqrt[3]{8}/\sqrt[3]{27}$ , $\sqrt[3]{8/27}$
  Τι παρατηρείτε;

3. Δυο βασικές ιδιότητες ριζών. Υπολογίσετε τις ρίζες
- $\sqrt[4]{160000} =$
- $\sqrt[3]{0{,}008} =$

- Ένας μαθητής έγραψε κάποτε σε ένα διαγώνισμα ότι
  $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$ και $\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{72}$ . Συμφωνείτε;

- Να υπολογίσετε τον αριθμό $\nu = \sqrt[5]{\dfrac{16}{2009}}\cdot\sqrt[5]{4018}$ .

$\nu =$

Γ. Συμπληρώστε $\sqrt[5]{2}\cdot ....... = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = ......$ , $\sqrt[3]{4}\cdot ........ = 2$ , Δ. Να μετατρέψετε το κλάσμα Κ= $\frac{8}{\sqrt[3]{4}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή

$$\frac{8}{\sqrt[3]{4}} =$$

4. (Ίσως) Δυο άλλες ιδιότητες ριζών.

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\theta}} = \dots\dots\dots, \quad \sqrt[\nu\rho]{\theta^{\mu\rho}} = \dots\dots\dots$$

Παραδείγματα: $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} =$

$$\sqrt[16]{9^8} =$$

5. Να γράψετε με τη μορφή μιας ρίζας τις παραστάσεις

$$B = \sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} =$$

$$A = \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} =$$

*Εργασία στο σπίτι :*

1.Ασκήσεις βιβλίου (σελ.50-51) : 7, 8 (i), 11(ii), Β΄ ομάδα την 5, σελ..53:25,26,27,28. .

2. *Προαιρετική* : Να λύσετε ως προς x την εξίσωση $\psi = \sqrt[3]{x^2}$ , $x \in R$.

3. *Προαιρετική* : Αν $\chi > \psi > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[3]{\chi} - \sqrt[3]{\psi} = \frac{\chi - \psi}{\sqrt[3]{\chi^2} + \sqrt[3]{\chi\psi} + \sqrt[3]{\psi^2}}.$$

(Υπ. μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και μια γνωστή κυβική ταυτότητα)

## 3. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου …………………………

Από την ενότητα 2.3, την Δ.Ε. : Άθροισμα και Γινόμενο ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Σχολείο : ………………………………………………………. .

F. Viete
(1540 -1603)

### Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν τις σχέσεις ριζών και συντελεστών (άθροισμα και γινόμενο, τύποι Viete) («πληροφορίες»)

2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν τις σχέσεις αυτές σε διάφορα προβλήματα (υπολογισμοί, πρόσημα ριζών κλπ) («Νοητικές δεξιότητες»)

ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας: Ερωτηματικός διάλογος - Καθοδηγούμενη αυτενέργεια.
ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος : Παραγωγική.
ΙV. Εποπτικά μέσα: Πίνακας, χρωματιστοί μαρκαδόροι.

### V. Διδακτικές ενέργειες

1. *Έλεγχος- Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων*

- Ερωτήσεις σχετικά με τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
- Λύσετε την εξίσωση $2\lambda^2 +5\lambda + 3 = 0$

2. *Δημιουργία κινήτρων μάθησης - Πληροφόρηση*

- Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης
  $1821x^2 - (\alpha^2 + \beta^4 + \gamma^6 + 1)x - 10 - \alpha^4 = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \in R$ )

- Σήμερα θα ασχοληθούμε με τις σχέσεις ριζών και συντελεστών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, που αναφέρονται στο άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (συμμετρικές παραστάσεις) που μας είναι πολύ χρήσιμες σε πολλά θέματα της Άλγεβρας.

3. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών - παροχή οδηγιών για νέα μάθηση*

Α. Βρείτε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $2\lambda^2 +5\lambda + 3 = 0$. Τι παρατηρείτε;
Β. Ας θεωρήσομε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και ας υποθέσουμε ότι έχει δυο ρίζες $\rho_1, \rho_2$ .
Γ. Να εκφράσετε τις ρίζες της συναρτήσει των α, β, γ (τύποι ριζών).
Δ. Υπολογίσετε το $S= \rho_1+ \rho_2$ και $P = \rho_1\cdot\rho_2 \ldots$
Ε. Συμπέρασμα για τις ρίζες της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (τύποι Viete).

Στ. Δυνατότητες των σχέσεων: υπολογισμοί, πρόσημα ριζών
Ζ. Ειδική περίπτωση : άθροισμα και γινόμενο των ριζών της $x^2 - κx + λ = 0$ .
Συμπέρασμα για τα κ, λ.

4. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση*

- Βρείτε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $2x^2 + 3x = 6$,
- Ομοίως για την εξίσωση $α^2 + 8 = 6α$ . Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης;
- Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + αx + 1 = 0$, $α > 2$, είναι
  Α. ίσες Β. αντίθετες Γ. αντίστροφες Δ. ετερόσημες

Ανακεφαλαίωση

5. *Μεταφορά μάθησης*

Α. Έστω η εξίσωση $x^2 = x + 1$ .
- Να δείξετε ότι έχει δυο άνισες ρίζες, έστω ρ, φ.
- Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.
- Βρείτε το πρόσημο των ριζών της
- Υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = ρ^2 + φ^2,\ B = \frac{1}{ρ} + \frac{1}{φ},\quad Γ = ρ^3 + φ^3,\ Δ = (ρ - φ)^2,\ E = |ρ - φ|$$

Β. Μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 - λx + 10 = 0$ είναι το 2 .Να βρείτε την άλλη και το λ

Γ. Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών της αρχικής εξίσωσης
$$1821x^2 - (α^2+β^4+γ^6+1)x - 10 - α^4 = 0$$
Δ. Να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 2x + λ = 1$ έχει δυο ρίζες άνισες και ομόσημες. Ποιο είναι το πρόσημο των ριζών της;
Ε. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $2t^2 - 3μt + μ^2 = 2$ έχει ρίζες
α) αντίθετες β) αντίστροφες ;

*Εργασία στο σπίτι :*

1.Ασκήσεις βιβλίου σελ. 124 την 1, σελ. 125 την 7 και Β΄ ομάδα 1, 2.
2. Να διαβάσετε (εγκυκλοπαίδεια ή διαδίκτυο) σχετικά με τη ζωή και το έργο του F. Viete.

*Προαιρετικές*

1. Αν $α \neq 1$, $β \in R$, να δείξετε ότι η εξίσωση
$$x^2 - (1 + β^2)x + 2α - 1 - α^2 = 0$$ έχει ρίζες άνισες και ετερόσημες.
Ποια είναι απολύτως μεγαλύτερη, η θετική ή η αρνητική; Τι συμβαίνει αν α=1;
2. Αν $ρ^2 > 4μ$ και $|x^2+βx+γ| + |x^2+κx+λ| \leq 2|x^2+ρx+μ|$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι $β = κ = ρ$ και $γ = λ = μ$.
3. Να βρείτε τους αριθμούς $α, β, γ \in Z$ ώστε η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = x + 2$ να έχει τρεις (τουλάχιστον) ρίζες.

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

F. Viete
(1540 -1603

1. Βρείτε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $2x^2 +3x=6$,

2. Ομοίως για την εξίσωση $\alpha^2 + 8 = 6\alpha$ . Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης;

3. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + 1 = 0$, $\alpha > 2$, είναι
   Α. ίσες Β. αντίθετες Γ. αντίστροφες Δ. ετερόσημες

4. Έστω η εξίσωση $x^2 = x + 1$ .
   - Να δείξετε ότι έχει δυο άνισε ρίζες, έστω ρ, φ.
   - Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.
   - Βρείτε το πρόσημο των ριζών της
   - Υπολογίσετε τις παραστάσεις

   $A = \rho^2 +\varphi^2$ , $B = \frac{1}{\rho}+\frac{1}{\varphi}$, $\Gamma = \rho^3 + \varphi^3$, $\Delta = (\rho- \varphi)^2$, $E = |\rho -\varphi|$

5. Μια ρίζα της εξίσωσης $x^2- \lambda x + 10 = 0$ είναι το 2 .Να βρείτε την άλλη και το λ

6. Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών της αρχικής εξίσωσης
   $1821x^2 - (\alpha^2+\beta^4+\gamma^6+1)x - 10 - \alpha^4 = 0$

7. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 -2x + \lambda = 1$ έχει δυο ρίζες άνισες και ομόσημες. Ποιο είναι το πρόσημο των ριζών της;

8. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $2t^2 - 3\mu t + \mu^2 = 2$ έχει ρίζες
   α) αντίθετες β) αντίστροφες ;

*Εργασία στο σπίτι :*

1.Ασκήσεις βιβλίου σελ. 124 την 1, σελ. 125 την 7 και Β΄ ομάδα 1, 2.
2. Να διαβάσετε (εγκυκλοπαίδεια ή διαδίκτυο) σχετικά με τη ζωή και το έργο του F. Viete.

*Προαιρετικές*

1. Αν $\alpha\neq 1$, $\beta\in R$, να δείξετε ότι η εξίσωση
   $x^2- (1 + \beta^2)x + 2\alpha -1- \alpha^2 = 0$ έχει ρίζες άνισες και ετερόσημες.
   Ποια είναι απολύτως μεγαλύτερη, η θετική ή η αρνητική; Τι συμβαίνει αν α=1;
2. Αν $\rho^2 > 4\mu$ και $|x^2+\beta x+\gamma| + |x^2+\kappa x+\lambda| \leq 2|x^2+\rho x+\mu|$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $\beta = \kappa = \rho$ και $\gamma = \lambda = \mu$.
3. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, $\gamma\in Z$ ώστε η εξίσωση $\alpha x^2 +\beta x + \gamma = x +2$ να έχει τρεις (τουλάχιστον) ρίζες.

## 4. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σχολείο: …………………………………………, …………………………..

Διδάσκων :……………………………………………………….
Μάθημα: Γεωμετρία Α΄ Λυκείου , Τμήμα………………………
Διδακτική ενότητα: § 3.6. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

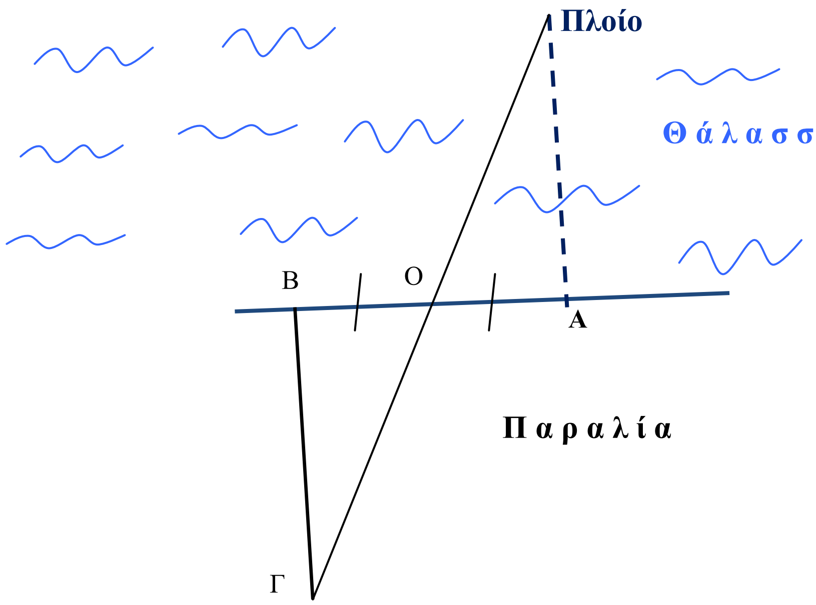
1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν (με λόγια) τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων και τα δυο πορίσματα. («πληροφορίες»)
2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να εφαρμόζουν τα κριτήρια αυτά στην λύση ασκήσεων-προβλημάτων που αναφέρονται σε σύγκριση τριγώνων, τμημάτων και γωνιών. («Νοητικές δεξιότητες»)

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας**: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.
**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική.
**ΙV. Εποπτικά μέσα**: Πίνακας, χρωμ. μαρκαδόροι. χάρτινα ορθ. τρίγωνα.

**V. Διδακτικές ενέργειες**

*1. Έλεγχος κατανόησης προηγουμένου μαθήματος και ανάκληση προηγουμένων γνώσεων* (γενικά κριτήρια τριγώνων)
*Με ερωτήσεις προς τους μαθητές.*

*2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης*
Λέγεται ότι ο *Θαλής* (600 π.χ.) για να βρει την απόσταση ενός πλοίου από την παραλία έκανε τα εξής …



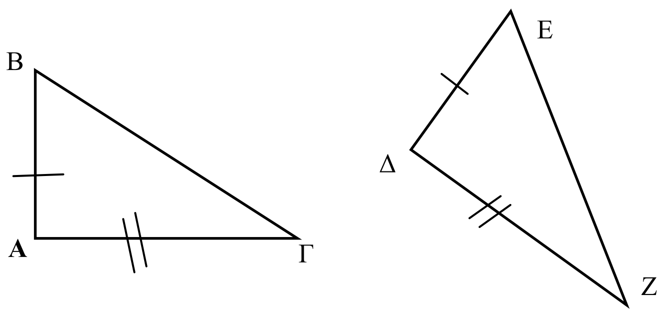

- Πως ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΠ = ΒΓ;

3. *Πληροφόρηση:* Σήμερα θα μάθετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, τα οποία μαζί με τα γενικά κριτήρια στα τρίγωνα είναι πάρα πολύ χρήσιμα στη Γεωμετρία. Επίσης θα μάθετε δυο χρήσιμες προτάσεις στο ισοσκελές τρίγωνο και το κύκλο.

4. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

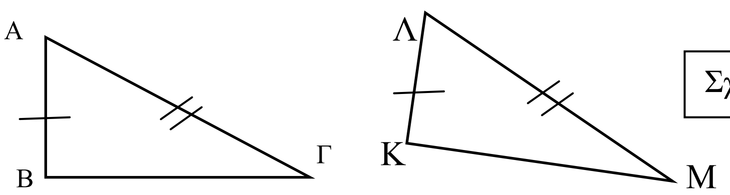
Α. Κριτήρια με πλευρές

i.Προσέξτε τα ορθογώνια τρίγωνα…Είναι ίσα ; Ποια άλλα στοιχεία τους θα έχουν ίσα;




Σχήμα 1

ii. Συγκρίνετε τα τρίγωνα …

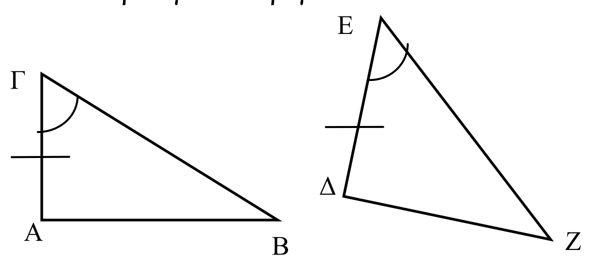



Σχήμα 2

- Διατύπωση κριτηρίων με πλευρές…

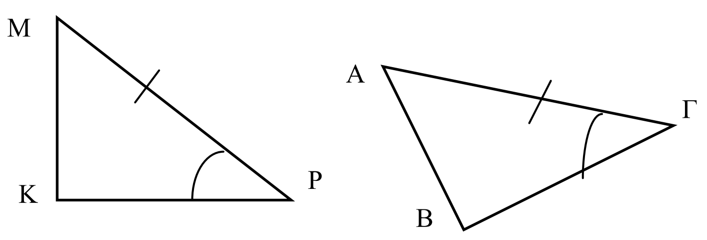
Β. Κριτήρια με πλευρά και γωνία.

i.Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα…



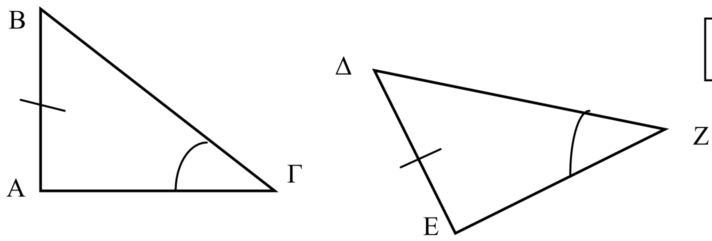

Σχήμα 3

ii.Είναι ίσα τα τρίγωνα…




Σχήμα 4

iii. Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα…

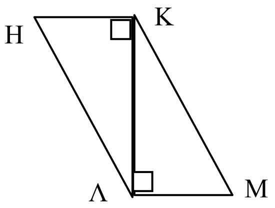



Σχήμα 5

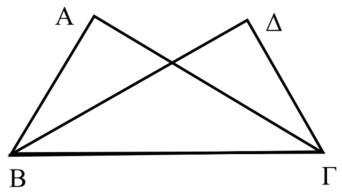
➢ Διατύπωση κριτηρίων με πλευρά και γωνία.

*5. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Τι άλλο (το λιγότερο) πρέπει να έχουν τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα για να είναι ίσα;



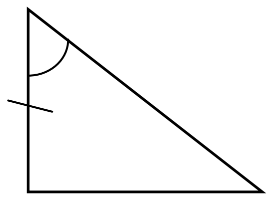

Σχήμα 6

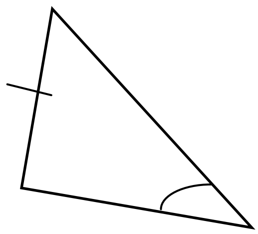



*6. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.*

- Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια είναι ίσα; Η απάντηση ενός μαθητή ήταν ναι, είναι (πάντα) ίσα .Συμφωνείτε;
  (αν επί πλέον έχουν και μια οξεία γωνία ίση;…)
- Επίδειξη κατασκευής από χαρτόνι…

- Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μια είναι ίσα; Συμφωνείτε; Προσέξτε τα παρακάτω τρίγωνα.





Σχήμα 7

- Επίδειξη κατασκευής από χαρτόνι…
- Απάντηση στο αρχικό πρόβλημα (Θαλή).
- Ανακεφαλαίωση.

*7. Μεταφορά μάθησης.*

- Πόρισμα Ι: το ύψος ισοσκελούς τριγώνου από την κορυφή είναι….
- Πόρισμα ΙΙ: Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου …
- Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου από τα άκρα της βάσης του είναι ίσα.

*8. Εργασία στο σπίτι :*

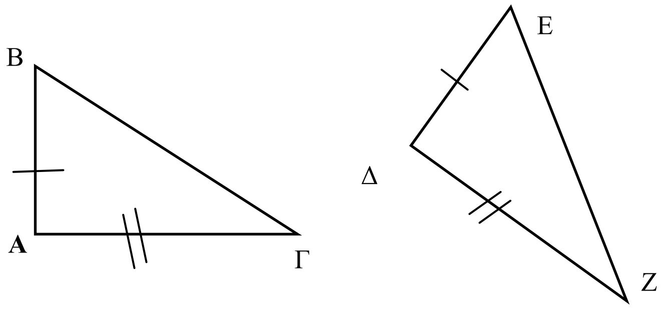
Α. Ερωτήσεις κατανόησης 2,3,4,5 (μόνο προφορικά )

Β. Ασκήσεις: εμπέδωσης 2, 4, αποδεικτικές την 1.

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

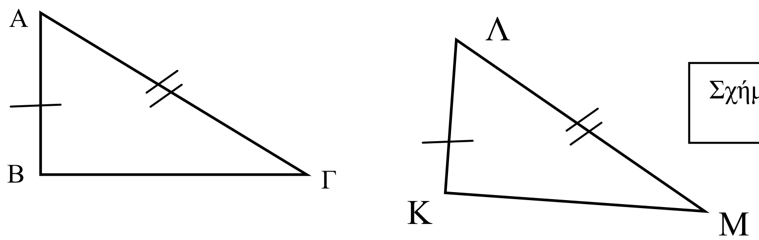
**Α. Κριτήρια με πλευρές**

i.Προσέξτε τα ορθογώνια τρίγωνα…Είναι ίσα ; Ποια άλλα στοιχεία τους θα έχουν ίσα;




Σχήμα 1

ii. Τι σχέση έχουν άραγε τα ορθογώνια τρίγωνα …(σύντομη απόδειξη)



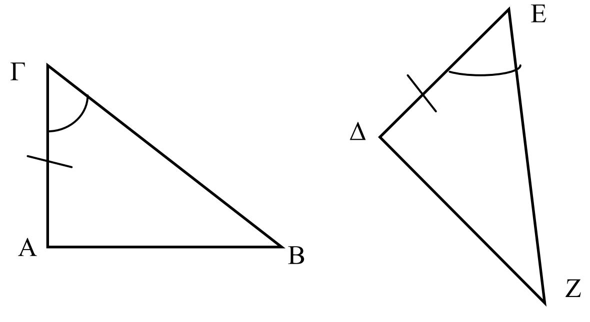

Σχήμα 2

Συμπληρώνω :

- Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δυο …………… ……… ίσες μια προς μια, τότε είναι ……

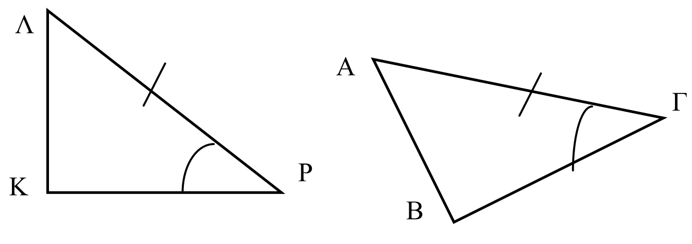
**Β. Κριτήρια με πλευρά και γωνία.**

i.Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα…



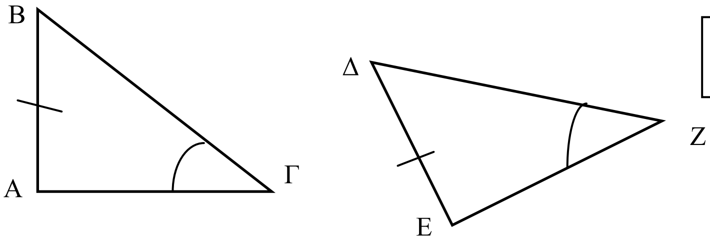

Σχήμα 3

ii.Είναι ίσα τα τρίγωνα…




Σχήμα 4

iii. Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα…

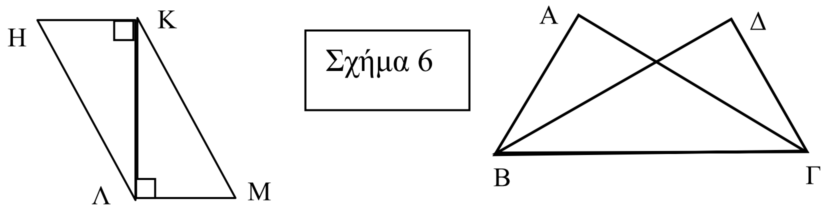



Σχήμα 5

**Συμπληρώνω:**

- Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια ………….. …….. ίση και μια ………………. στη πλευρά αυτή ……… ………. αντίστοιχα ίσες μια προς μια τότε είναι …..

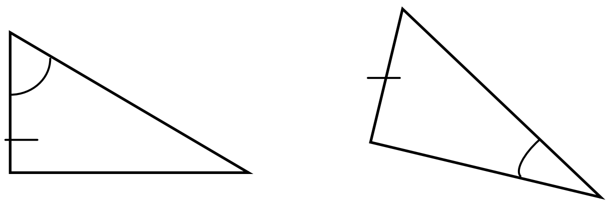
*6. Άσκηση:* Τι άλλο (το λιγότερο) θέλουν τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα για να είναι ίσα;




Σχήμα 6

7. Α. Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια είναι ίσα; Η απάντηση ενός μαθητή ήταν ναι, είναι (πάντα) ίσα .Συμφωνείτε;
(Τι συμβαίνει αν έχουν ακόμη και δυο γωνίες ίσες);

Β. Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μια είναι ίσα; Συμφωνείτε; Προσέξτε τα παρακάτω τρίγωνα.



Σχήμα 7

8. Δυο πορίσματα:
Πόρισμα Ι: το ύψος ισοσκελούς τριγώνου από την κορυφή είναι ….
Πόρισμα ΙΙ: Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου…
Άσκηση: Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου από τα άκρα της βάσης του είναι ίσα.

*Εργασία στο σπίτι :*
Α. Ερωτήσεις κατανόησης 2, 3, 4, 5 (μόνο προφορικά).
Β. Ασκήσεις: εμπέδωσης 2, 4, αποδεικτικές την 1.

Πρόβλημα (προαιρετικό): να βρείτε το είδος των ορθογωνίων τριγώνων με την ιδιότητα: μια ευθεία που διέρχεται από μια κορυφή τους τα χωρίζει σε δυο ίσα τρίγωνα. (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα της § 3.10) .

## 5. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Διδακτική ενότητα: § 5.6. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων - Θεωρήματα των μέσων (Ι, ΙΙ)**

**Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

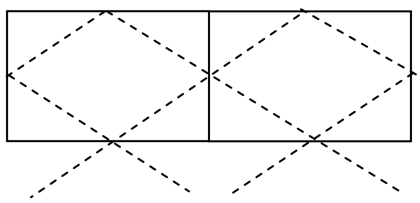
1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν τα Θεωρήματα Ι, ΙΙ. («πληροφορίες»)
2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να αποδεικνύουν τα θεωρήματα αυτά.
3. Να αποκτήσουν τις δεξιότητες για εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών στην λύση σχετικών ασκήσεων - προβλημάτων. («Νοητικές δεξιότητες»)

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας**: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.
**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική.
**ΙV. Εποπτικά μέσα**: Πίνακας, χρωμ. μαρκαδόροι.

### V. Διδακτικές ενέργειες

*1. Έλεγχος προηγουμένων γνώσεων (παραλληλόγραμμα)*
Με ερωτήσεις προς τους μαθητές.

*2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης*



3. *Πληροφόρηση:* Σήμερα θα μάθετε δυο ωραία και πολύ χρήσιμα θεωρήματα της Γεωμετρίας που απορρέουν από τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Τα θεωρήματα αυτά είναι σχετικά με τα μέσα πλευρών τριγώνου.

4. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

Α. Σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο του ΑΒ και Ε το μέσο του ΑΓ.

- Διαισθάνεστε- προβλέπετε κάτι για το τμήμα ΔΕ;
- Προσπαθήστε να δείξετε ότι 2ΔΕ = ΒΓ.
- Γνωρίζετε κανένα σχετικό θεώρημα; με μέσα τμημάτων;
- Με μέσα διαγωνίων ( παραλληλογράμμου);

➢ (Ίσως) Προεκτείνετε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ.
➢ (Ίσως) Παρατηρείστε το τετράπλευρο ΑΔΓΖ

Β. Σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο του τμήματος ΑΒ, έστω Δ, φέρετε μια ευθεία παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

- Προβλέπετε κάτι για το σημείο Ε;
- Προσπαθήστε να δείξετε το Ε είναι μέσο του ΑΓ.

➢ Μπορείτε να εργαστείτε παρόμοια με το προηγούμενο θεώρημα;

- Διατύπωση θεωρήματος.

*5. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

Ι. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ.

Α. Αν ΚΛ = 4 cm τότε ΒΓ = Α.2cm Β. 6 cm Γ. 8 cm

Β. Αν το ΚΛΜ έχει περίμετρο 7,5cm να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓ.

ΙΙ. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Σ, Ε τα μέσα στων ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Δ οποιοδήποτε σημείο του ΒΓ να δείξετε ότι το ΣΕ διχοτομεί το τμήμα ΑΔ.

*6. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.*

- Ανακεφαλαίωση (από τους μαθητές).

*7. Μεταφορά μάθησης.*

- Έστω (τυχόν) τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Δ, Ε, Ζ, Θ τα μέσα των πλευρών του. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμο.

- Για το τμήμα ΔΕ παρατηρείτε κάτι; Με τι ισούται;

- Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τι σχήμα είναι το ΔΕΖΘ (Απάντηση στο αρχικό πρόβλημα).Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τι σχήμα είναι το ΔΕΖΘ; (άσκηση)

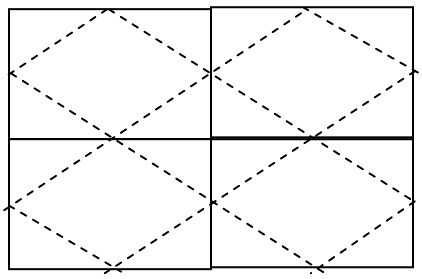
*8. Εργασία στο σπίτι*

i. Ασκήσεις σελ. 110: Ερωτήσεις κατανόησης 1 (τις δυο πρώτες)
ii. Ασκήσεις σελ. 111: εμπέδωσης 2, αποδεικτικές την 2.
iii. Να χωρίσετε μια κόλλα χαρτί Α4 σε ίσους ρόμβους ή τετράγωνα.

*Προαιρετική άσκηση*: Αποδείξετε το πρώτο θεώρημα με την υπόδειξη: φέρετε από το Ε παράλληλη στην ΑΒ και από Α παράλληλη στην ΒΓ...

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ**

1. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε 4 ορθογώνια και ενώνοντας τα μέσα των πλευρών τους σχηματίσαμε μερικά ωραία τετράπλευρα. Τι είδους τετράπλευρα είναι αυτά;….

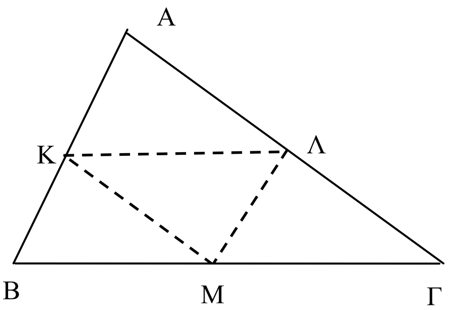


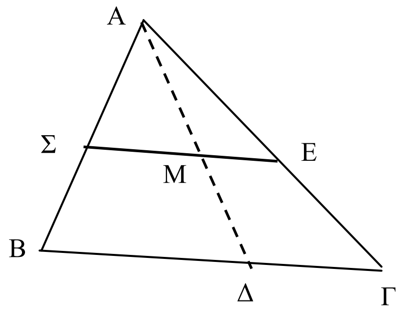
2. Ασκήσεις κατανόησης-εμπέδωσης.

Ι. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ.

Α. Αν ΚΜ = 4 cm τότε ΑΓ = Α.2cm Β. 6 cm Γ. 8 cm

ΙΙ. Αν το ΚΛΜ έχει περίμετρο 7,5cm να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓ;




ΙΙΙ. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Σ, Ε τα μέσα στων ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Δ οποιοδήποτε σημείο του ΒΓ να δείξετε ότι το ΣΕ διχοτομεί το τμήμα ΑΔ.

3. Ασκήσεις.

- Έστω (τυχόν) τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Δ, Ε, Ζ, Θ τα μέσα των πλευρών του. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τι σχήμα είναι το ΔΕΖΘ (Απάντηση στο αρχικό πρόβλημα).Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τι σχήμα είναι το ΔΕΖΘ; (άσκηση)

4. *Εργασία στο σπίτι*

i. Ασκήσεις σελ. 110: Ερωτήσεις κατανόησης 1 (τις δυο πρώτες)
ii. Ασκήσεις σελ. 111: εμπέδωσης 2, αποδεικτικές την 2.
iii. Να χωρίσετε μια κόλλα χαρτί Α4 σε ίσους ρόμβους ή τετράγωνα.
*Προαιρετική άσκηση*: Αποδείξετε το πρώτο θεώρημα με την υπόδειξη: φέρνουμε από το Ε παράλληλη στην ΑΒ και από Α παράλληλη στην ΒΓ.

## 6. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σχολείο: ……………………………………… , …………………………
Διδάσκων : ………………………………………
Μάθημα: Γεωμετρία Α΄ Λυκείου..
Διδακτική ενότητα: § 6.2-6.3. Γωνία τεμνουσών κύκλου (εφαρμογή σελ.125) -
Γωνία χορδής και εφαπτομένης

**Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν την πρόταση για την γωνία τεμνουσών καθώς και το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης.
(«πληροφορίες»)
2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να αποδεικνύουν τις προτάσεις αυτές.
3. Να αποκτήσουν τις δεξιότητες για εφαρμογή των προτάσεων αυτών στην λύση σχετικών ασκήσεων - προβλημάτων. («Νοητικές δεξιότητες»)

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας**: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.
**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική.
**IV. Εποπτικά μέσα**: Πίνακας, χρωμ. μαρκαδόροι.

### V. Διδακτικές ενέργειες

*1. Έλεγχος προηγουμένων γνώσεων (Εγγεγραμμένη και αντίστοιχη επίκεντρη)*

- Ερωτήσεις προς τους μαθητές, π.χ. αν μια εγγεγραμμένη βαίνει σε τόξο μικρότερου, μεγαλύτερου ημικυκλίου είναι ….
- Άσκηση- τέστ: Βλ. Άσκηση 1 φύλλου εργασίας.

*2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης*
Τι συμβαίνει άραγε με μια γωνία που δεν έχει την κορυφή της στον κύκλο ( οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο); καθώς και με αυτή που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της χορδής;

3. *Πληροφόρηση:* Σήμερα θα ασχοληθούμε συμπληρωματικά πάλι με γωνίες σε σχέση με ένα κύκλο και θα μάθετε δυο χρήσιμες προτάσεις: η μια αναφέρεται στη γωνία δυο τεμνουσών κύκλου και η άλλη στη γωνία χορδής και εφαπτομένης.

4. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*
Ι. *Γωνία τεμνουσών κύκλου.*
α. Σχεδιάσετε ένα κύκλο και δυο τέμνουσες του κύκλου εντός αυτού.
β. Προσπαθήστε να βρείτε σχέση μεταξύ μιας γωνίας αυτών και των αντιστοίχων τόξων που περιέχονται από τις πλευρές της.
γ. Ίσως γίνουν βοηθητικές ερωτήσεις-υποδείξεις ή και να δοθεί με αποδεικτική μορφή.
δ. Η περίπτωση να τέμνονται εκτός του κύκλου θα δοθεί ως (αποδεικτική) άσκηση.

- Διατύπωση πρότασης- Δυνατότητες.

5. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*
Σχετική άσκηση εμπέδωσης (βλ. φύλλο εργασίας, άσκηση 2 )

6. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

*ΙΙ. Γωνία χορδής και εφαπτομένης*
α. Εποπτική - Ενορατική προσπέλαση στη νέα γνώση: περιστρεφόμενη πλευρά εγγεγραμμένης γωνίας.
β. Σχεδιάσετε ένα κύκλο και μια χορδή του ΑΒ. Φέρετε την εφαπτομένη στο ένα άκρο, π.χ. Α.
γ. Προσπαθήστε να δείξετε ότι η γωνία (οξεία) υπό χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής.

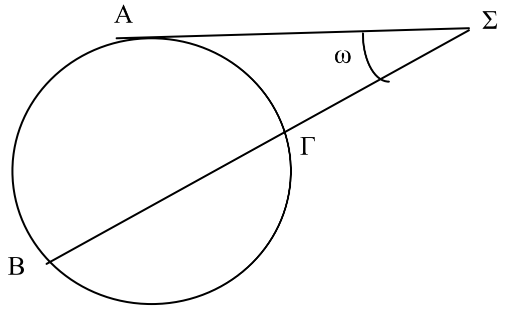
- Διατύπωση θεωρήματος- Δυνατότητες. Ισχύει και για αμβλεία ή ορθή.

7. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.*

- Άσκηση εμπέδωσης (βλ. φύλλο εργασίας άσκηση 3)
- Ανακεφαλαίωση (από τους μαθητές).

8. *Μεταφορά μάθησης.*

Ι. Στο παρακάτω σχήμα να δείξετε ότι $2\omega = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A\Gamma}$ (κυρτογώνια τόξα)




ΙΙ. Δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α και δυο ευθείες ε, ε΄ διέρχονται από το Α και τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄και τον άλλο στα Γ, Γ΄ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΒΒ//ΓΓ΄.

9. *Εργασία στο σπίτι :*
Άσκήσεις εμπέδωσης 2,3 (σελ.129) και αποδεικτικές 1 και 2 σελ.130.

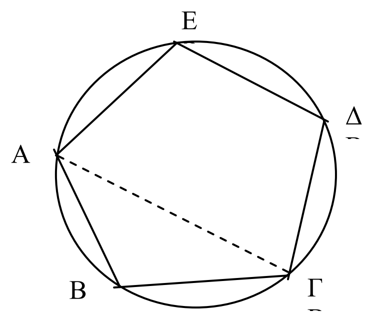
*Προαιρετική άσκηση*: Αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος χορδής και εφαπτομένης με δεδομένη μια εγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ.

*«Πρωταπριλιάτικο γρίφος»*: Ο Αρχαίος Κρητικός φιλόσοφος *Επιμενίδης* ($7^{ος}$ - $6^{ος}$ αιών. Π.χ.) είχε πει ότι «Κρήτες αεί ψεύσται». Κάποιος στα μετέπειτα χρόνια παρατήρησε ότι : «αν αυτό είναι αλήθεια, δηλαδή οι *Κρήτες λένε πάντα ψέματα*, τότε ο Επιμενίδης λέει ψέματα, άρα οι *Κρήτες λένε την αλήθεια* (και αντίστροφα)». Μπορείτε να εξηγήσετε το παράδοξο αυτό;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

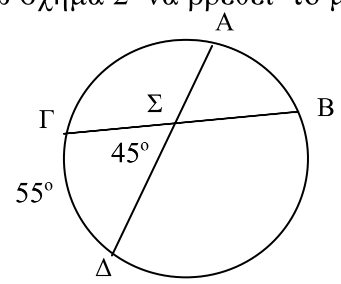
Άσκηση 1.(Έλεγχος προηγούμενων γνώσεων).
Ένας κύκλος είναι χωρισμένος σε 5 ίσα τόξα , όπως στο παρακάτω σχήμα 1. Να δείξετε ότι
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές
β) ΕΔ//ΑΓ .Τι σχήμα είναι το τετράπλευρο ΑΕΔΓ;

Σχήμα 1



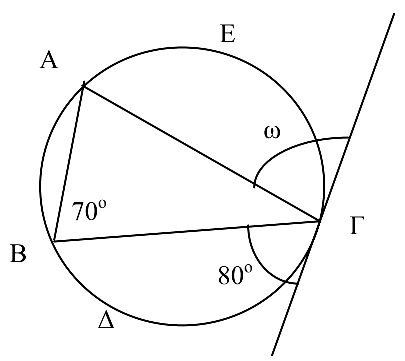

Άσκηση 2. Στο παρακάτω σχήμα 2 να βρεθεί το μέτρο του τόξου ΑΒ:

Σχήμα 2




Άσκηση 3. Στο παρακάτω σχήμα 3 να υπολογίσετε
α) Τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ καθώς και την γωνία ω.
β) Τα μέτρα των τόξων ΑΕΓ και ΒΔΓ.

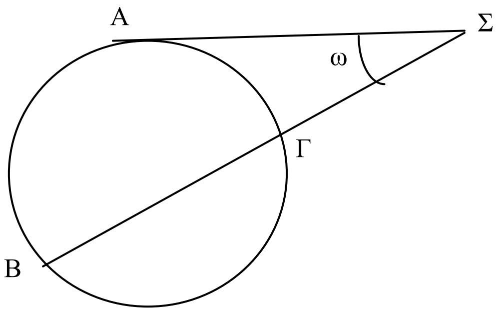
Σχήμα 3



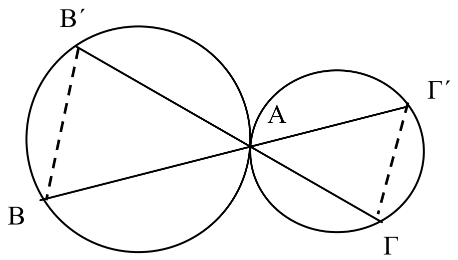
Άσκηση 4.

Στο παρακάτω σχήμα 4 να δείξετε ότι $2ω = \overset{\frown}{ΑΒ} - \overset{\frown}{ΑΓ}$ (κυρτογώνια τόξα)

Σχήμα 4




Άσκηση 5. Δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α και δυο ευθείες ε, ε΄ διέρχονται από το Α και τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄και τον άλλο στα Γ, Γ΄ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΒΒ//ΓΓ΄.




5. *Εργασία στο σπίτι :*
Άσκήσεις εμπέδωσης 2,3 (σελ.129) και αποδεικτικές 1 και 2 σελ.130.

*Προαιρετική άσκηση*: Αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος χορδής και εφαπτομένης με δεδομένη μια εγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ.

- *«Πρωταπριλιάτικο γρίφος» (Η διδασκαλία είχε γίνει την 1/4)*: Ο Αρχαίος Κρητικός φιλόσοφος *Επιμενίδης* ($7^{ος}$ - $6^{ος}$ αιών. Π.χ.) σε ένα ποίημά του έλεγε ότι *«Κρήτες αεί ψεύσται»* (επειδή λέγοντας ότι ο τάφος του Δία είναι στην Κρήτη, πίστευαν ότι ο Δίας είναι θνητός). Κάποιος στα μετέπειτα χρόνια παρατήρησε ότι : «αν αυτό είναι αλήθεια, δηλαδή οι *Κρητικοί λένε πάντα ψέματα*, τότε ο Επιμενίδης λέει ψέματα, άρα οι *Κρητικοί λένε την αλήθεια* (και αντίστροφα)». Μπορείτε να εξηγήσετε το παράδοξο αυτό;

# *Γ. ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ Β ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*

## 7. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Διδακτική ενότητα 2.2: Θεωρήματα διαιρετότητας πολυωνύμων**

**Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

1.Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν τα δυο θεωρήματα διαιρετότητας πολυωνύμων με χ - ρ. («πληροφορίες»)
2. Να κατανοήσουν τα δυο θεωρήματα και να αποκτήσουν την ικανότητα να τα χρησιμοποιούν σε διάφορες περιπτώσεις. («Νοητικές δεξιότητες»)

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας:** Ερωτηματικός διάλογος. - Καθοδηγούμενη αυτενέργεια.
**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική με στοιχεία επαγωγής.
**ΙV. Εποπτικά μέσα:** Πίνακας, χρωματιστοί μαρκαδόροι.

**V. Διδακτικές ενέργειες**

*1. Έλεγχος- Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων*

- Αριθμητική τιμή πολυωνύμου.
- Ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης- βαθμός υπολοίπου
- Πότε ένα πολυώνυμο Κ(χ) διαιρεί το Ρ(χ); Πως διατυπώνετε αυτό ισοδύναμα;
- Αν Ρ(χ) = 2(χ - 5)(χ + 2)(2χ + 1), με ποια πολυώνυμα διαιρείται το Ρ(χ); Ποιοι είναι παράγοντές του Ρ(χ);

*2. - Δημιουργία κινήτρων μάθησης - Πληροφόρηση*
Αν γράφατε διαγώνισμα… θα προτιμούσατε να λύσετε την εξίσωση

$\chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4 = 0$ ή την εξίσωση $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi + 2) = 0$ ;

Η ανακάλυψη πρωτοβαθμίων παραγόντων της μορφή χ - ρ στα πολυώνυμα μας βοηθά πολύ στη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.
Με αυτό το σημαντικό θέμα θα ασχοληθούμε πολύ στα επόμενα μαθήματα.

*3. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*
Α. Έστω $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ ένα πολυώνυμο
α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : (x - 2)
β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για x = 2., P(2)
γ) Τι παρατηρείτε;

Β. Γενικά θα δείξουμε ότι στην διαίρεση P(x) : (x - ρ) το υπόλοιπο Υ = Ρ(ρ) .
Γ. Απόδειξη του πρώτου θεωρήματος
α) Γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης P(x) : (x - ρ) .
β) Προσέξτε το υπόλοιπο , τι βαθμού θα είναι;
γ) Βρείτε την τιμή Ρ(ρ). Τι παρατηρείτε;
Συμπέρασμα…

*4. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών - Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων
  α) $\chi^{2009} - \chi^{2008} - 2\chi^{2007} : (\chi - 1)$ β) $(\chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4) : (\chi + 2)$

  Τι συμπεραίνουμε στην τελευταία διαίρεση;

*5. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

Πότε ένα πολυώνυμο P(χ) θα έχει παράγοντα τον χ – ρ (ή θα διαιρείται με το χ-ρ)

- Διατύπωση –απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος

6. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών - Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

Α. Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $P(\alpha) = \alpha^3 - 5\alpha + 2$ έχει παράγοντα τον α - 2
Β. Αν για ένα πολυώνυμο Π(χ) ισχύει Π(-3) = 0 τότε το Π(χ) διαιρείται με το

Α. χ - 3 Β.χ - 2 Γ. 3 + χ Δ. 3χ

Γ. Το πολυώνυμο $\lambda^{2009} + 1$ διαιρείται με το πολυώνυμο

Α. λ Β. λ - 1 Γ. χ + 1 Δ. 1 + λ Ε. 2009λ

Δ. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \kappa^2 \chi^3 - 3\kappa\chi^2 + \kappa\chi + 1$ όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το χ-1 είναι ίσο με το μηδέν.

Α. k = 0 Β. κ = -1 Γ. k = 1 Δ. k = 2 Ε. k = -2

Ε. i) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in R$ ώστε το πολυώνυμο $Q(x) = x^3 - \lambda x^2 + 5 + \lambda$ να διαιρείται με το χ+2

ii) Για την προηγούμενη τιμή του λ να παραγοντοποιήσετε το Q(x) και να λύσετε την εξίσωση $x^3 - \lambda x^2 + 5 + \lambda = 0$.

*Εργασία στο σπίτι*

1. Σελ. 68 Παραδείγματα – εφαρμογές 1ο, 2ο
2. Σελ.72, ασκ.2, 3,6(i), (ii), 7, 8.

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

**1.** Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$
**α)** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x-2

**β)** Το υπόλοιπο υ είναι:

**γ)** Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για x = 2, P(2) .

**2.** Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων
α) $P(\chi) = \chi^{2009} - \chi^{2008} - 2\chi^{2007} : (\chi - 1)$

β) $K(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4: ( \chi + 2)$

**3.** Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $P(\alpha) = \alpha^3 - 5\alpha + 2$ έχει παράγοντα τον α - 2

**4.** Αν για ένα πολυώνυμο Π(χ) ισχύει Π(-3) = 0 τότε το Π(χ) διαιρείται με το

Α. χ - 3 Β.χ - 2 Γ. 3 + χ Δ. 3χ

**5.** Το πολυώνυμο $\lambda^{2009} + 1$ διαιρείται με το πολυώνυμο

Α. λ Β. λ - 1 Γ. χ + 1 Δ. 1 + λ Ε. 2009λ

**6**.Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \kappa^2 \chi^3 - 3\kappa\chi^2 + \kappa\chi + 1$ όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το χ-1 είναι ίσο με το μηδέν.
Α. κ=0 Β. κ=-1 Γ. k=1 Δ. k=2 Ε. κ=-2

**7.** i) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in R$ ώστε το πολυώνυμο $Q(x) = x^3 - \lambda x^2 + 5 + \lambda$ να διαιρείται
με το χ + 2
ii) Για την προηγούμενη τιμή του λ να παραγοντοποιήσετε το Q(x) και να λύσετε την
εξίσωση $x^3 - \lambda x^2 + 5 + \lambda = 0$.

*Εργασία στο σπίτι*
1. Σελ. 68 Παραδείγματα – εφαρμογές 1ο, 2ο .
2. Σελ.72, ασκ.2, 3,6(i), (ii), 7, 8.

## 8. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

*Σχολείο:* ……………………………………………………………………….
Διδάσκων *:* ……………………………………………………………………….
*Μάθημα:* Γεωμετρία Β΄ Λυκείου..
*Διδακτική ενότητα:* § 9.4, Κατανόηση και εφαρμογή των θεωρημάτων Ι, ΙΙ (γενίκευσης του Πυθ. Θεωρήματος ) και Πορίσματος (κριτηρίου γωνιών) - Νόμος συνημιτόνων – Ασκήσεις (είχε διδαχθεί η σχετική θεωρία στο προηγούμενο μάθημα).

*Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης.*
Α. Να κατανοήσουν οι μαθητές τα θεωρήματα Ι, ΙΙ και το Πόρισμα και να αποκτήσουν την ικανότητα να τα χρησιμοποιούν στην λύση ασκήσεων και προβλημάτων. («Νοητικές δεξιότητες», «Γνωστική στρατηγική»)
Β. Να είναι σε θέση να αναφέρουν τον νόμο των συνημιτόνων και να τον χρησιμοποιούν σε υπολογιστικά και θεωρητικά προβλήματα.
(«Πληροφορίες» , «Νοητικές δεξιότητες»)

*ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας:* Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.
*ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος :* Παραγωγική.
*IV. Εποπτικά μέσα:* Πίνακας, χρ. κιμωλίες.

### V. Διδακτικές ενέργειες

1. *Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων.*

Έλεγχος γνώσεων προηγουμένου μαθήματος (θεωρήματα Ι, ΙΙ, Πόρισμα) και προ προηγούμενου (Π. Θ.)

- Γενίκευση του Πυθ. Θεωρήματος…
- Αν $\beta^2 - \gamma^2 < \alpha^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο Σ - Λ
- Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 > \beta + \gamma^2$ Σ - Λ
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 2\gamma^2$ τότε …..
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ με $\alpha=5\theta$, $\beta = 6\theta$, $\gamma = 7\theta$ ($\theta > 0$).

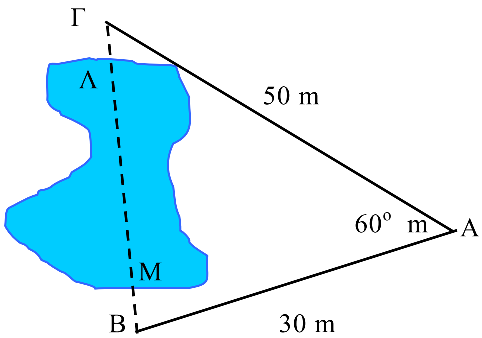
2. *Πληροφόρηση*
Σήμερα θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα επέκτασης του Π. Θ. και το πόρισμα –κριτήριο σε εφαρμογές, ασκήσεις και προβλήματα. Επίσης θα δούμε τον «νόμο των συνημιτόνων» σε τρίγωνο και εφαρμογές του.

3. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

Α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου με πλευρές ($\kappa = 6$cm, $\lambda = 80$mm, $\mu = 1$dm) Β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου με πλευρές $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\gamma = 4$ …
Γ. i) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΚΛΜ με πλευρές $\kappa = 14$, $\lambda = 10$, $\mu = 6$
ii) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΛΜ στην ευθεία ΚΛ.
Επίσης το ύψος από την κορυφή Μ.

4. *Δημιουργία κινήτρων μάθησης*

Ένας Μηχανικός έπρεπε να υπολογίσει το μήκος ΛΜ μιας λίμνης. Για τον σκοπό αυτό τοποθέτησε τρεις πασσάλους Α,Β,Γ όπως στο σχήμα. Μέτρησε την γωνία Α = $60^o$ με το γωνιόμετρο και τις αποστάσεις ΑΒ = 30m , ΑΓ= 50m . Μπορεί άραγε τώρα να βρει τη απόσταση ΒΓ (και επομένως την ΛΜ;)




5. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

- Πως θα υπολογίσουμε την ΒΓ; Ποια είναι τα δεδομένα;
- Προσπαθήστε να εκφράσετε το τετράγωνο της ΒΓ= α συναρτήσει των πλευρών β, γ και της γωνίας Α (2 περιπτώσεις).
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot Α\Delta = \ldots$
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot Α\Delta = \ldots$

✓ Ποιες δυνατότητες μας δίνει ο νόμος των συνημιτόνων;

6. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Να βρείτε το μήκος της λίμνης ΒΓ.
- Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 5θ , β =7θ, γ=3θ, θ > 0, να υπολογίσετε την μεγαλύτερη γωνία του.
- $\beta^2 - \gamma^2 - \alpha =$ , $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \ldots.$, $2\alpha\beta συνΓ =$
- Εφαρμογή στην Φυσική (παραλληλόγραμμο δυνάμεων) .

7. *Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων - Μεταφορά μάθησης.*

- Ανακεφαλαίωση.
- Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ. Να εκφραστεί η διαγώνιος ΑΓ συναρτήσει των πλευρών του ( $ΑΓ^2 = Α\Delta^2 + ΑΒ \cdot Γ\Delta$).
- Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2ρ και μια τυχαία χορδή του ΑΓ. Στην προέκταση της ΑΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι $Β\Delta^2 + 2Α\Delta \cdot ΑΓ = Α\Delta^2 + 4\rho^2$ .
- Αν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και την γωνία Γ.
- Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει συνΒ = α/γ να βρείτε το είδος του τριγώνου.
- Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου τότε $|\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2| \leq 2\alpha\beta$.
- (*) Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ και ΒΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι το $ΕΗ^2 + \Delta Ι^2 + ΘΖ^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

*Εργασία στο σπίτι* : Ασκήσεις: Εμπέδωσης 4, αποδεικτικές 1, 5.

Προαιρετική : α) Βιβλίου Συνθ. Θέματα. 2 ή 3 και ίσως η (* ).

## 9. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Διδακτική ενότητα 2.2: Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας.**

**I. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης**

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν και να αναγνωρίζουν την γενική εξίσωση ευθείας. («πληροφορίες»)

2. Να αποκτήσουν την ικανότητα να μελετούν μονοπαραμετρικές εξισώσεις ευθειών και να εντοπίζουν το σημείο τομής τους (κέντρο δέσμης). («Νοητικές δεξιότητες»)

**II. Μορφή διδασκαλίας:** Ερωτηματικός διάλογος. - Καθοδηγούμενη αυτενέργεια.

**III. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική με στοιχεία επαγωγής.

**IV. Εποπτικά μέσα:** Πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες.

**V. Διδακτικές ενέργειες**

*1. Έλεγχος προηγουμένων γνώσεων*

Άσκηση 5 προηγούμενου μαθήματος

*2. Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων - Δημιουργία κινήτρων μάθησης - Πληροφόρηση*

Ποιες μορφές εξισώσεων ευθείας γνωρίζετε; Μήπως αυτές μπορούν να συμπτυχθούν σε μία γενική εξίσωση; Θα δούμε σήμερα ότι αυτό μπορεί να γίνει.

*3. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

Α. Εξίσωση ευθείας που τέμνει τον ψ-άξονα, έστω στο σημείο (0, κ).
Προσπαθήστε να τη φέρετε στη μορφή Αχ + Βψ + Γ= 0.

Β. Εξίσωση ευθείας που δεν τέμνει τον ψ-άξονα.
Προσπαθήστε να τη φέρετε στη μορφή Αχ + Βψ + Γ= 0

Γ. Αντίστροφο: Η εξίσωση Αχ + Βψ + Γ= 0 παριστάνει ευθεία;
- (Ίσως) Λύστε ως προς ψ…

Δ. Θεώρημα….
- Επισήμανση : Αν Β =0 η ευθεία δεν έχει σ. δ. (είναι // ψ-άξονα)

4. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών - Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων – ανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις $4\chi - 2\psi = 1$, $2\chi - \psi = 0$ παριστάνουν ευθείες. Βρείτε τους συντ. διεύθυνσης. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
- Η εξίσωση $5\psi - \lambda\chi = 0$ είναι εξίσωση ευθείας, όταν:
  Α. $\lambda = 0$ Β. $\lambda \neq 0$. Γ. $\lambda \in R$ Δ. $\lambda = 1$
- Η εξίσωση $7\chi^2 + \psi = 1$ είναι εξίσωση ευθείας Σ – Λ
- Η εξίσωση $\chi + 2\sqrt{\psi} = 1$ παριστάνει ευθεία Σ – Λ
- Η εξίσωση $2\kappa\chi + (\kappa^2 + 1)\psi + 1 = 0$, $\kappa \in R$ παριστάνει ευθεία, για.
  Α. $\kappa \neq 0$ Β. $\kappa = 0$ Γ. $\kappa \in R$
- Ανακεφαλαίωση.

*5. Μεταφορά μάθησης.*

1. Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η εξίσωση $\alpha\chi + \psi\alpha^2 = \chi + \alpha\psi$ παριστάνει ευθεία; Μήπως όλες αυτές διέρχονται από ένα ορισμένο σημείο;

2. Έστω η εξίσωση $\chi + 2\psi - 5 + \lambda(\chi - \psi + 1) = 0$, $\lambda \in R$
   α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$ παριστάνει ευθεία.
   β) Βρείτε τις εξισώσεις δυο ευθειών από αυτές.
   γ) Δείξετε ότι όλες διέρχονται από το ίδιο (σταθερό) σημείο.
   δ) Ποια από τις ευθείες της δέσμης είναι παράλληλη στην $\psi = -\chi$.

*Εργασία στο σπίτι*

1. Ασκήσεις 1, 2 σελ.69, άσκηση 2 σελ.70.

2. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2, 2), Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

1. Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις $4χ - 2ψ = 1$, $2ψ + χ = 0$ παριστάνουν ευθείες. Βρείτε τους συντ. διεύθυνσης. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι ευθείες;

Λύση

2. Η εξίσωση $5ψ - λχ = 0$ είναι εξίσωση ευθείας , όταν:

Α. $λ = 0$ Β. $λ \neq 0$. Γ. $λ \in R$ Δ. $λ = 1$

3. Η εξίσωση $7χ^2 + ψ =1$ είναι εξίσωση ευθείας Σ – Λ

4. Η εξίσωση $χ +2\sqrt{ψ} = 1$ παριστάνει ευθεία Σ – Λ

5. Η εξίσωση $2κχ + (κ^2+ 1)ψ + 1 = 0$, $κ \in R$ παριστάνει ευθεία, για.
   Α. $κ \neq 0$ Β. $κ = 0$ Γ. $κ \in R$

6. Για ποιες τιμές του $α \in R$ η εξίσωση $αχ + ψα^2 = χ + αψ$ παριστάνει ευθεία; Μήπως όλες αυτές διέρχονται από ένα ορισμένο σημείο;

7. Έστω η εξίσωση $χ + 2ψ – 5 + λ(χ – ψ + 1) = 0$, $λ \in R$
   α) Δείξετε ότι για κάθε $λ \in R$ παριστάνει ευθεία.
   β) Βρείτε τις εξισώσεις δυο ευθειών από αυτές.
   γ) Δείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο (σταθερό) σημείο.
   δ) Ποια από τις ευθείες της δέσμης είναι παράλληλη στην $ψ = -χ$.

*Εργασία στο σπίτι*

1. Ασκήσεις 1, 2 σελ.69, άσκηση 2 σελ.70.

2. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(λ - 1)x + (λ + 1)y - λ - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2, 2), Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.-

# *Δ. ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*

## 10. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Ανάλυση Γ΄ Λυκείου**

**Διδακτική ενότητα : Θεώρημα του Bolzano**

***Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης***

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να αναφέρουν α) το Θ. Bolzano (Θ. Β.), β) το πόρισμά του το σχετικό με την διατήρηση προσήμου συνάρτησης. («πληροφορίες»)
2. Να κατανοήσουν την εποπτικογεωμετρική του «απόδειξη» καθώς και ότι δεν ισχύει το αντίστροφό του. («Νοητικές δεξιότητες- κατανόηση»)
3. Να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν το Θ.Β. στις εξισώσεις για την ύπαρξη ριζών.
4. Να αποκτήσουν την ικανότητα να εφαρμόζουν το σχετικό πόρισμα διατήρησης προσήμου συνεχούς συνάρτησης. («Νοητικές δεξιότητες»)

**ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας**: Ερωτηματικός διάλογος. - Καθοδηγούμενη αυτενέργεια.

**ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος** : Παραγωγική.

**ΙV. Εποπτικά μέσα**: Πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες.

### V. Διδακτικές ενέργειες

*1. Έλεγχος προηγουμένων γνώσεων*

- Γεωμετρική συνέπεια της συνέχειας μιας συνάρτησης.
- Συνέχεια σε διάστημα [α, β].

*2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης -*

- Να λύσετε την εξίσωση $\chi^3 + \chi = 1$...
- *Τι θα κάνουμε τελικά με την εξίσωση αυτή;*

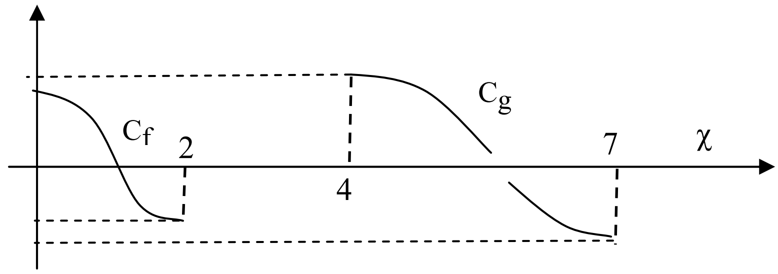
*3. Πληροφόρηση*:

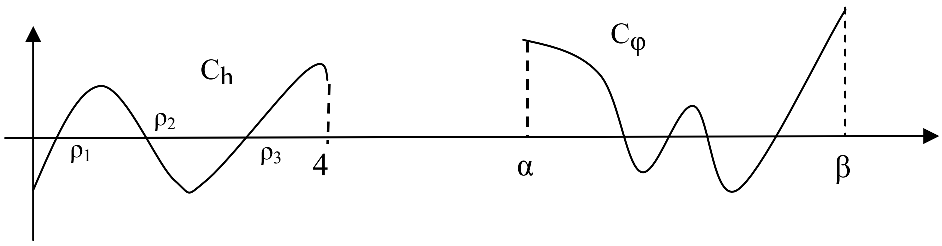
Σήμερα θα μάθετε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα των συνεχών συναρτήσεων.

*4.Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

Α. Πρώτη ενορατική προσπέλαση: Σχεδιάστε μια ευθεία στο επίπεδο. Πάρετε ένα σημείο Α στο ένα ημιεπίπεδο και ένα σημείο Β στο άλλο. Προσπαθήστε να γράψετε με το στυλό σας μια «συνεχόμενη» καμπύλη γραμμή που να αρχίζει από το Α και να καταλήγει στο Β χωρίς να συναντήσει την ευθεία (και χωρίς να σηκώσετε το στυλό!) (Μπορείτε να αντικαταστήσετε την ευθεία με ένα ποτάμι και τα σημεία με χωριά…).

Β. Δεύτερη ενορατική προσπέλαση. Προσέξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων….




Γ. i) Διατύπωση του Θ. Β. ....(διευκρίνιση επ' ευκαιρία της έννοιας του «υπάρχει» στα Μαθηματικά και επισήμανση του ότι το θεώρημα μας δίνει απλά την πληροφορία ότι υπάρχει ρίζα, στο εσωτερικό ενός διαστήματος, δεν μας λέει αν είναι μοναδική, ούτε την υπολογίζει).

ii) Θ. Bolzano : Λίγα ιστορικά και πληροφοριακά στοιχεία (βλ. *«Διδακτικό υλικό : Όρια –Συνέχεια», 30-11-2007*, σελ.4)

iii) Το αντίστροφο (με δεδομένο f συνεχή στο [α, β]) ισχύει; …

(βλ. σχήμα $C_\varphi$ και η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2-1$ στο διάστημα [-2, 2] με ομόσημες τιμές στα άκρα.

- Άρα η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta) < 0$ είναι μόνο *ικανή* για να υπάρχει ρίζα…(όχι *αναγκαία*)

Δ. Τι δυνατότητες μας δίνει το Θ. Β.;

i) Να διαπιστώνουμε τη ύπαρξη ρίζας εξίσωσης –συνάρτησης σε δεδομένο ανοικτό διάστημα και γενικά πολλών ριζών σε διάφορα (ξένα) διαστήματα.
ii) Δοκιμάζοντας διάφορα κλειστά διαστήματα να εντοπίζουμε εκείνο στο (εσωτερικό) του οποίου υπάρχει ρίζα (αν οι τιμές στα άκρα του διαστήματος είναι ομόσημες *δεν* αποκλείεται να υπάρχει και σ' αυτό ρίζα.)
iii) Οι ισοδυναμίες $g(\chi) = \alpha \Leftrightarrow g(\chi) - \alpha = 0$ , $g(\chi) = h(\chi) \Leftrightarrow g(\chi) - h(\chi) = 0$ μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε το Θ. Β. και για άλλες μορφές εξισώσεων θεωρώντας κατάλληλη συνάρτηση.

5. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*
Ι. Έστω η εξίσωση $\chi^3 + \chi = 1$, $\chi\in R$.
α) Να αποδείξετε ότι έχει μια ρίζα στο διάστημα (0, 1). β) Μήπως είναι μοναδική (νύξη στη μονοτονία και μοναδικότητα);
γ) Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή ανήκει στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ (η επανειλημμένη χρήση του Θ.Β. σε διαστήματα που προκύπτουν με διχοτόμηση μας δίνει τη

δυνατότητα να εγκλωβίζουμε τη ρίζα σε όσο στενά διαστήματα θέλουμε και έτσι να την υπολογίσουμε, με τη βοήθεια και των Η.Υ., με όση προσέγγιση θέλουμε).

δ) Μπορεί να έχει ρίζα και στο διάστημα $\left[0\,,\dfrac{1}{2}\right]$;…

ΙΙ. Η συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο διάστημα [0, 1] και είναι $\varphi(\chi) < 0$ για κάθε $\chi\in[0, 1]$.Τότε η φ στο διάστημα [0, 1] είναι:

Α. Γν. αύξουσα Β. Γν. φθίνουσα Γ. Ασυνεχής. Δ. Συνεχής Ε.Άλλο

*6. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων - Μεταφορά μάθησης.*

Τι συμβαίνει με το πρόσημο των τιμών μιας συνάρτησης που είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό του (βλ. π.χ. τα τμήματα μεταξύ των ριζών της $C_h$).

- Διατύπωση και απόδειξη του σχετικού πορίσματος.
- Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $\Sigma(\chi) = (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)e^{\chi}$ στο διάστημα [0, 2π] δεδομένου ότι οι μοναδικές ρίζες της στο διάστημα αυτό είναι π/4, 5π/4.
- Ανακεφαλαίωση.

*Εργασία στο σπίτι :*

*1.* Ασκήσεις βιβλίου, σελ.198, άσκηση 6,7 (ii), 8, 9(iv).

2. Άσκηση: Να δείξετε ότι η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(\chi) = \chi^2 + \chi\eta\mu\chi$, $\gamma(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$, $x\in R$, τέμνονται σε δυο τουλάχιστον σημεία.

Προαιρετικό πρόβλημα

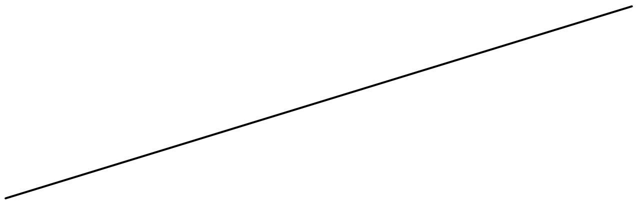
Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση φ στο R με την ιδιότητα; $\varphi^2(\chi) = 2008+\chi^4$, για κάθε $\chi\in R$ και $\varphi(0) < 0$. Χωρίς την συνθήκη $\varphi(0) < 0$ πόσες συναρτήσεις υπάρχουν. Πόσες συναρτήσεις θα υπήρχαν χωρίς την υπόθεση της συνέχειας της φ;

---

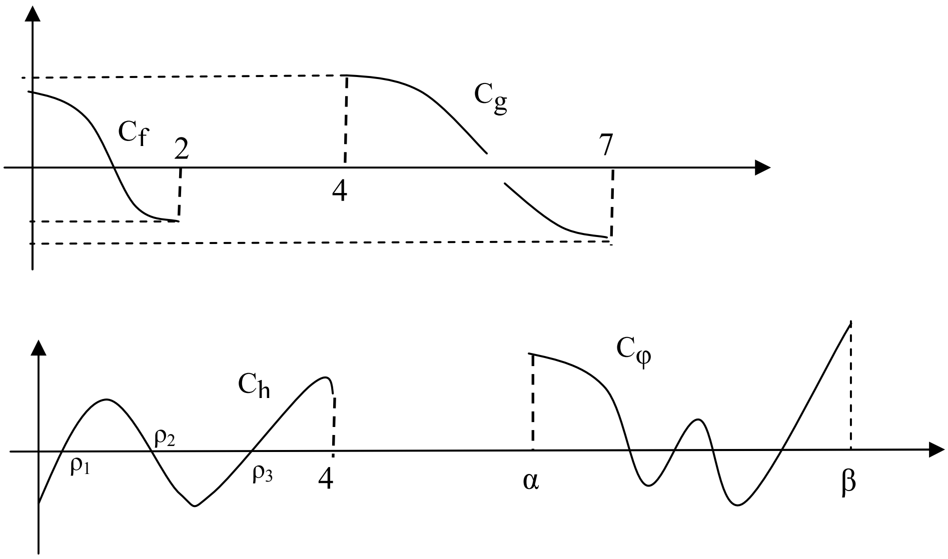
(ακολουθεί φύλλο εργασίας)

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1.



2.




3. Α. θεώρημα Bolzano:

Υποθέσεις:

Συμπέρασμα:

Β. Το αντίστροφο (με δεδομένο f συνεχή στο [α, β]) ισχύει; …

- Προσέχω το σχήμα $C_\varphi$ .
- Π.χ. η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2-1$ στο διάστημα [-2, 2] με ομόσημες τιμές στα άκρα.

➢ Άρα η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta) < 0$ είναι μόνο …....................για να υπάρχει ρίζα και όχι ……………

4. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3 + \chi - 1 = 0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Θεωρούμε την (αντίστοιχη) συνάρτηση f(χ) =……………., χ∈ … , …

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Β.;

Βρίσκω τα πρόσημα των τιμών f(…), f(…).

f(…) = ………………., f( …) =……………..

β) Εξετάσετε η ρίζα αν είναι μοναδική.

γ) Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή ανήκει στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

Εργαστείτε ανάλογα…

δ) Μπορεί να έχει ρίζα και στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$;

*Απάντηση*

ε) Η συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο διάστημα [0, 1] και είναι $\varphi(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in [0, 1]$.Τότε η φ στο διάστημα [0, 1] είναι:

Α. Γν. αύξουσα Β. Γν. φθίνουσα Γ. Ασυνεχής. Δ. Συνεχής Ε.Άλλο

5. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $\Sigma(\chi) = (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)e^{\chi}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ δεδομένου ότι οι μοναδικές ρίζες της στο διάστημα αυτό είναι π/4, 5π/4.

| *χ* | *0* | *π/4* | *5π/4* | *2π* |
|---|---|---|---|---|
| Σ(χ) | | | | |

Βρίσκω τα …………… .των τιμών

Σ(… ) = ………… Σ(… ) = ………… Σ(… ) = ……..

και συμπληρώνω τον πίνακα...

* * *