Αναψηλαφώντας την έννοια της παραμέτρου στα Μαθηματικά του Λυκείου.

Κυριαζής Χρήστος
Μ.Sc. Μαθηματικός, Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Α.Π.
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας, chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. – Ε.Μ.Π., Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
lprotopapas@math.ntua.gr

Θεματική ενότητα: *Η παρουσία και ο ρόλος των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης: Μια ανοιχτή και διαρκής πρόκληση.*

Περίληψη.

Στα Μαθηματικά η χρήση μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων είναι συχνότατη και απαραίτητη, δεδομένου ότι η χρήση τους είναι κομβικής σημασίας. Οι μαθητές είναι επιφυλακτικοί όταν διαχειρίζονται παραμέτρους. Φτάνοντας στη Γ΄ Λυκείου οι περισσότεροι δεν είναι εξοικειωμένοι με τις παραμέτρους και προκύπτουν προβλήματα, αφού η εισαγωγή τους αυξάνει τη δυσκολία των ασκήσεων. Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε κάποιες πτυχές των παραμέτρων.

Λέξεις κλειδιά: Παράμετρος, διερεύνηση, επαλήθευση, πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Abstract.

In Mathematics the use of one or more parameters is very frequent and necessary, since their use is crucial. Students are cautious when dealing with parameters. Arriving at the 3rd grade of Lyceum most students are not familiar with the parameters and problems arise as their introduction increases the difficulty of the exercises. We will try to clarify some particular aspects of parameters.

Εισαγωγή.

Η χρήση των γραμμάτων στα μαθηματικά είναι ιδιαίτερα σημαντική, είτε αναφερόμαστε σε μεταβλητές, είτε σε παραμέτρους. Ο Klein (Klein, 1924) έγραψε ότι κάλλιστα μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι τα πραγματικά μαθηματικά ξεκινούν όταν εμφανίζονται τα γράμματα, ενώ ο Tarski (Tarski, 1941) συμφωνεί διατυπώνοντας ότι η επινόηση των μεταβλητών αποτελεί σημείο καμπής στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Sedivy (Sedivy, 1976) αναφέρει ότι τα προβλήματα με τις παραμέτρους δοκιμάζουν βαθιά τη γνώση των μαθηματικών του λύτη και διαπιστώνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο λύνοντας εξισώσεις με παραμέτρους.

Για το επίπεδο κατανόησης της έννοιας της παραμέτρου έχουν γίνει αρκετές έρευνες στο εξωτερικό. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ότι σε έρευνα που έγινε σε μαθητές του Ισραήλ (Ilany & Hassidov, 2014) διαπιστώνεται ότι μεγάλο ποσοστό μαθητών, υπέπεσε σε σφάλμα λόγω σύγχυσης που σχετίζεται με τη μη τυπική χρήση των γραμμάτων, αφού λύνοντας εξισώσεις όπου οι παράμετροι και οι μεταβλητές δεν είχαν σαφώς διακριθεί δημιουργήθηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Οι ίδιοι συγγραφείς προτείνουν να συμπεριληφθούν στα σχολικά βιβλία και στα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών περισσότερες εξισώσεις με παραμέτρους και μεταβλητές, με απώτερο σκοπό τη βαθύτερη κατανόηση. Επίσης τα ευρήματα έρευνας που έγινε σε φοιτητές στις Η.Π.Α. (Postelnicu & Postelnicu, 2015) υποδεικνύουν ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις συμβολικές και τις γραφικές απεικονίσεις μαθηματικών εννοιών που ορίζονται με τη βοήθεια παραμέτρων και επομένως έχουν δυσκολία να αντιλαμβάνονται τα αντίστοιχα μαθηματικά αντικείμενα και τη γεωμετρική τους ερμηνεία. Συμπεραίνουν ότι η δυσκολία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων με παραμέτρους, εξαρτάται από την ευχέρειά τους να ερμηνεύουν τις μαθηματικές διαδικασίες πίσω από τα μαθηματικά αντικείμενα.

Τι είναι παράμετρος;

Στα σχολικά μαθηματικά η έννοια παράμετρος συναντάται για πρώτη φορά στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2015), στην παράγραφο όπου μελετάται η εξίσωση πρώτου βαθμού $\alpha x + \beta = 0$ με α, β πραγματικούς αριθμούς. Το βιβλίο σε ένα σχόλιο αναφέρει:

«Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια

από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται παράμετροι, η εξίσωση λέγεται παραμετρική και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται διερεύνηση».

Επομένως, έχοντας ήδη διευκρινίσει πως ο άγνωστος είναι ο x, τα γράμματα που υπάρχουν σε μια εξίσωση λέγονται παράμετροι και καθορίζουν αν η εξίσωση έχει λύσεις και πόσες.

Στις επίσημες οδηγίες διδασκαλίας (ΥΠΕΘ, 160253/Δ2/26-9-2018) δίνονται οι λόγοι που οι μαθητές δυσκολεύονται:

i. είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και
ii. δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Μάλιστα προτείνεται η απόδοση τιμών από τους μαθητές στην παράμετρο και η συζήτηση μαζί τους σχετικά με το πλήθος των λύσεων σε κάθε αντικατάσταση. Ίσως αυτός είναι και ο πιο ενδεδειγμένος τρόπος εισαγωγής στη σκέψη με παράμετρο, αφού έτσι αναδεικνύεται η εξάρτηση του πλήθους των λύσεων σε μια εξίσωση.

Αργότερα στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου διερευνάται και η ανίσωση πρώτου βαθμού χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη μνεία για τις παραμετρικές ανισώσεις στις οδηγίες διδασκαλίας.

Διάκριση περιπτώσεων.

Για τα Μαθηματικά ίσως είναι η βασικότερη κατηγορία ασκήσεων, διότι επιλύοντας μια τέτοια άσκηση έχεις λύσει άπειρες. Ως εκ τούτου η κατανόηση της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι απαραίτητη για τους μαθητές, δεδομένου ότι ελέγχει αν ο μαθητής μπορεί να διακρίνει από τι εξαρτάται το αποτέλεσμα και να πάρει τις αντίστοιχες περιπτώσεις. Όπως πάντα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί λαμβάνοντας όλες τις πιθανές τιμές των παραμέτρων. Ας δούμε μια παραλλαγή της άσκησης 6 στη σελίδα 138 (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016): Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^3+3x^2+x+1$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3\alpha x^2+6x+1, x\in\mathbb{R}$.

- Αν $\alpha=0$ έχουμε ότι $f'(x)=6x+1, x\in\mathbb{R}$ και
  $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1/6$, $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1/6$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1/6$,

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1/6,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1/6]$.

- Αν $\alpha\neq 0$, το τριώνυμο $3\alpha x^2+6x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=12(3-\alpha)$. Τότε:
  - Αν $\Delta<0\Leftrightarrow \alpha>3>0$, το τριώνυμο $3\alpha x^2+6x+1$ είναι ομόσημο του 3α, άρα $f'(x)>0, x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  - Αν $\Delta=0\Leftrightarrow \alpha=3$, το τριώνυμο $3\alpha x^2+6x+1$ γίνεται $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$, άρα $f'(x)\geq 0, x\in\mathbb{R}$. Όμως:
    $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1/3$, $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1/3)\cup(-1/3,+\infty)$
    και δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=-1/3$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  - Αν $\Delta>0\Leftrightarrow \alpha<0$ ή $0<\alpha<3$, έχουμε ότι
    $$f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_1=\frac{-3-\sqrt{3(3-\alpha)}}{3\alpha} \text{ ή } x=x_2=\frac{-3+\sqrt{3(3-\alpha)}}{3\alpha}.$$
    Επίσης:
    - Αν $\alpha<0$ ισχύει $x_1>x_2$ και
      $f'(x)>0\Leftrightarrow x_2<x<x_1$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x<x_2$ ή $x>x_1$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,x_1]$ και γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,x_2]$, $[x_1,+\infty)$.
    - Αν $0<\alpha<3$ ισχύει $x_1<x_2$ και
      $f'(x)>0\Leftrightarrow x<x_1$ ή $x>x_2$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x_1<x<x_2$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,x_1]$, $[x_2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$.

Υπολογισμός παραμέτρου: Χρειάζεται επαλήθευση;

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πότε πρέπει να επαληθεύουμε την τιμή της παραμέτρου που υπολογίζουμε σε μια άσκηση. Επιπλέον θα διαπιστώσουμε τι συμβαίνει αν υπόθεση δεν είναι αληθής.

1. Αν $a^x\leq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $a>0$, να βρείτε τον a.

Για την αντιμετώπιση της άσκησης θεωρούμε συνάρτηση f με

$$f(x)=a^x-x-1, x\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

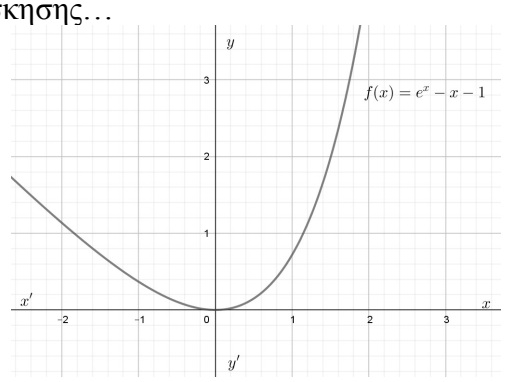
οπότε η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) \le 0 = f(0),\ x \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$. Επιπλέον η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a = e. \qquad (3)$$

Χρειάζεται επαλήθευση; Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή $a = e$ δεν ικανοποιεί τα δεδομένα της άσκησης…



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Θα μπορούσε βέβαια η άσκηση να είχε δοθεί ως εξής:

2. Αν $a^x \le x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Η λύση αυτή της άσκησης μοιάζει με αυτή της άσκησης 1. Προφανώς κάποιος μόλις αποδείκνυε ότι $a = e$ θα σταματούσε…

Πως μπορεί η ίδια σχεδόν άσκηση να έχει διαφορετικές απαντήσεις; Ο υποψιασμένος μαθητής θα πίστευε ότι κάτι πάει λάθος στη λύση του και ίσως να αποπροσανατολίζονταν.

Η ερμηνεία για την εκφώνηση (άρα και την λύση) της άσκησης αυτής βρίσκεται στη Μαθηματική Λογική, όπου σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας για τη συνεπαγωγή έχουμε ότι μια συνεπαγωγή είναι αληθής ακόμη και όταν, όπως στα παραπάνω παραδείγματα, η υπόθεση ($a^x \le x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$) είναι ψευδής (πίνακας 1). Αυτό σημαίνει ότι σύμφωνα με τη Μαθηματική Λογική και οι δύο απαντήσεις του μαθητή είναι σωστές!

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ

Πίνακας 1: Πίνακας αληθείας για τη συνεπαγωγή.

Νομιμοποιούμαστε να δίνουμε στους μαθητές μας ασκήσεις με ψευδή υπόθεση; Θεωρούμε ότι για τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν πρέπει να υφίσταται κάτι τέτοιο, διότι υπάρχει περίπτωση να δημιουργήσει σύγχυση, δεδομένου ότι η Μαθηματική Λογική πρακτικά είναι ανύπαρκτη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αυτό δεν έχει νόημα για τους μαθητές, όπως χαρακτηριστικά διαβάζουν στο εισαγωγικό κεφάλαιο της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2015):

«Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν θα εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή». Επομένως καλό θα είναι να μη δίνονται ασκήσεις με ψευδή υπόθεση. Σε ότι έπεται θεωρούμε ότι τα δεδομένα που δίνονται είναι αληθή.

Ας προβληματιστούμε κοιτάζοντας τις ασκήσεις 3, 4 (Ιωσηφίδης, 2011) για το αν θα πρέπει να επαληθεύσουμε την τιμή του a.

3. Αν $a^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, να βρείτε τον a.

4. Αν $a^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Η επαλήθευση σε ένα πρόβλημα ή μια άσκηση όπου εμπλέκεται ο υπολογισμός μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων (π.χ. άσκηση 3) είναι αναγκαιότητα της διαδικασίας επίλυσης και όχι επιλογή από τη στιγμή που δεν διατηρούνται οι ισοδυναμίες στην επίλυσή της. Έτσι πρέπει να εξασφαλίζεται ότι οι τιμές των παραμέτρων που βρίσκουμε ικανοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος ή της άσκησης. Στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου οι ασκήσεις που ζητούν υπολογισμό παραμέτρου είναι τέτοιες

ώστε η επαλήθευση να μην είναι απαραίτητη (αφού οι ισοδυναμίες διατηρούνται) είτε η επαλήθευση γίνεται μέσω των επόμενων ερωτημάτων (άσκηση 5 Α΄ ομάδα σελίδα 150).

Μια «προβληματική» λύση ως ευκαιρία διδακτικών παρατηρήσεων.

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πως ένας ελλιπής χειρισμός των παραμέτρων δε δίνει πλήρως σωστή λύση, χρησιμοποιώντας την άσκηση 3 της Β΄ ομάδας του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου στη σελίδα 168, όπου ζητείται να προσδιοριστούν οι παράμετροι ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x\le 0\\ e^{\beta x}, & x>0\end{cases}, \qquad (4)$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016).

Στις επίσημες λύσεις του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2017), αφού αξιοποιεί το δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, οπότε θα είναι και συνεχής στο ίδιο σημείο, καταλήγει πως πρέπει υποχρεωτικά $\alpha=1$. Επομένως η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1, & x\le 0\\ e^{\beta x}, & x>0\end{cases}. \qquad (5)$$

Συνεχίζοντας τη λύση επισημαίνει πως αν $\alpha\neq 1$ δε θα είναι συνεχής συνάρτηση, επομένως δε θα είναι και παραγωγίσιμη. Έπειτα αναφέρει:

«Εξετάζουμε τώρα για ποιες τιμές της παραμέτρου β η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

i. Για $x<0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ldots=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ldots=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$$

ii. Για $x>0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{e^{\beta x}-1}{x}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\beta x}-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta e^{\beta x}}{1}=\beta.$$

Επομένως η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta=1$.»

Εδώ αξίζει να ζητήσουμε από τους μαθητές αν η διαδικασία επίλυσης είναι σωστή και αν λάβουμε θετική απάντηση να τους ζητήσουμε να ελέγξουν τι συμβαίνει όταν $\beta=0$. Αφού δουν τότε ότι η συνάρτηση δεν

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει να τους ζητήσουμε να μας πουν που υπάρχει πρόβλημα στην πορεία λύσης και φυσικά να καταλήξουμε πως δεν έγινε σωστή διερεύνηση όσον αφορά τη μεταβλητή β (mathematica.gr, 2019). Έπρεπε να γίνει έλεγχος για την περίπτωση $\beta = 0$ που σταθεροποιεί τον ένα από τους δύο κλάδους της συνάρτησης f, οπότε οι συνθήκες του θεωρήματος de l' Hospital δεν ικανοποιούνται και πρέπει να κινηθούμε αλλιώς (με χρήση του ορισμού και απόδειξη μη παραγωγισιμότητας της συνάρτησης σε αυτήν την περίπτωση). Το δίδαγμα είναι πως η διερεύνηση πρέπει να γίνεται για κάθε τιμή της παραμέτρου που μεταβάλλει τη μορφή της συνάρτησης ή γενικότερα της άσκησης.

Μετασχηματισμός παραμετρικής εξίσωσης σε γεωμετρικό περιβάλλον.

Στην ενότητα αυτή θέλουμε να τονίσουμε τη σημαντικότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά, λύνοντας μια αλγεβρική παραμετρική εξίσωση μέσω της γεωμετρικής της ερμηνείας.

Έστω η εξίσωση

$$(x-1)^2 = |x-\alpha|, \tag{6}$$

όπου α πραγματικός αριθμός (παράμετρος). Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες η εξίσωση έχει ακριβώς τρεις διακεκριμένες πραγματικές λύσεις (Andreescu & Enescu, 2011).

Δίνουμε μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση μέσω αναγωγής της εξίσωσης σε περιβάλλον συναρτήσεων, όπου είναι δυνατή και η οπτικοποίηση του, θεωρώντας την πολύ χρήσιμη και διδακτική για τους μαθητές.

Έστω λοιπόν x μια λύση της εξίσωσης. Τότε για αυτήν τη τιμή του x ισχύει

$$x-\alpha = \pm(x-1)^2, \tag{7}$$

σχέση που δίνει ισοδύναμα

$$x \pm (x-1)^2 = \alpha, \tag{8}$$

ή καλύτερα

$$x^2 - x + 1 = \alpha \quad \text{ή} \quad -x^2 + 3x - 1 = \alpha. \tag{9}$$

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = x^2 - x + 1,\ g(x) = -x^2 + 3x - 1, \tag{10}$$

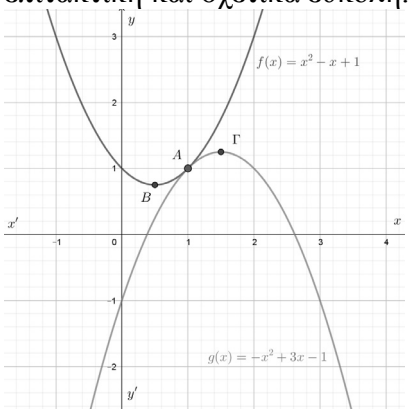
στην ουσία απαιτούμε οι γραφικές τους παραστάσεις να έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία με την ευθεία με εξίσωση $y = \alpha$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

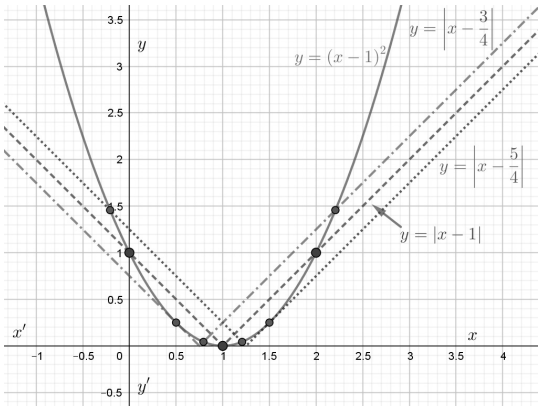
$$f(x) \geq g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (11)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $x = 1$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων εφάπτονται στο σημείο $A(1,1)$ (σχήμα 2). Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f έχει κορυφή το σημείο $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, ενώ της g έχει το σημείο $\Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Κάνοντας τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, g ο μαθητής μπορεί να δει πως οι περιπτώσεις που τον ενδιαφέρουν είναι εκείνες που η ευθεία $y = \alpha$ διέρχεται ή από το Α ή από το Β ή από το Γ, δηλαδή μόνον αν $\alpha = 1$ ή $\alpha = \frac{3}{4}$ ή $\alpha = \frac{5}{4}$ (σχήμα 3). Στην περίπτωση αυτή η επαλήθευση είναι επιτακτική και σχετικά εύκολη.



Σχήμα 2: Οι γραφικές παραστάσεις των f, g με $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^2 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 3: Οι γραφικές παραστάσεις της συναρτήσεων με τύπους $y = (x-1)^2$, $y = |x-1|$, $y = \left|x - \frac{3}{4}\right|$, $y = \left|x - \frac{5}{4}\right|$, $x \in \mathbb{R}$.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή ασχολούμενοι με την έννοια της παραμέτρου στα μαθηματικά δείξαμε μερικές βασικές χρήσεις της, αναδεικνύοντας προβλήματα που εμφανίζονται. Θεωρούμε ότι η προσέγγιση μιας οποιασδήποτε άσκησης με παραμέτρους πρέπει να γίνεται με πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις (π.χ. αλγεβρικά, γεωμετρικά) ώστε ο μαθητής να διευκολύνεται στην κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών. Η διαίσθηση και η οπτικοποίηση που μας δίνει η γεωμετρία είναι σημαντικά

εργαλεία για τον διδάσκοντα στην προσπάθεια να διδάξει με διαφορετικό τρόπο μια αλγεβρική έννοια. Η ανάπτυξη των διαφόρων λογισμικών μπορεί να συνδράμει δραστικά στην καλύτερη δυνατή κατανόηση. Αυτά βέβαια μπορούν να επιτευχθούν μόνο αν στα βιβλία, στα αναλυτικά προγράμματα και εν γένει στη διδασκαλία εισαχθούν πολύ περισσότερες ασκήσεις ή προβλήματα με παραμέτρους, δίνοντας ταυτόχρονα στον διδάσκοντα περισσότερο χρόνο για τη διδασκαλία τους. Η επίλυση πολλών τέτοιων θεμάτων, αλλά και η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων θα βοηθήσει στη καλύτερη εμπέδωση της έννοιας της παραμέτρου.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (2015). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου,* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2017). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής, Λύσεις των ασκήσεων*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ilany B. S., Hassidov D. (2014). *Solving Equations with Parameters. Creative Education*, 963-968.

http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.511110.

Ιωσηφίδης Ν. (2011). *Σημεία Διαφωνιών.* Πρακτικά 3ης Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας, σελ. 430 – 439.

Andreescu T., Enescu B. (2011). *Mathematical Olympiad Treasures second edition,* Birkhauser.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (Translated from the 3rd German edition by Hedrick, E.R. and Noble, C.A.). Dover Publications, New York.

Tarski, A. (1941). *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Oxford University Press, New York.

Postelnicu V., Postelnicu F. (2015). *College students' understanding of parameters in algebra*. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.453-459. hal-01286934.

https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=63692&p=308044&fbclid=IwAR1lp8CcGZ0U_-5OC5p_WWbir39Dfe6_zEIp4Qxo0hc38-7ZZtloLoIMZBQ#p308044