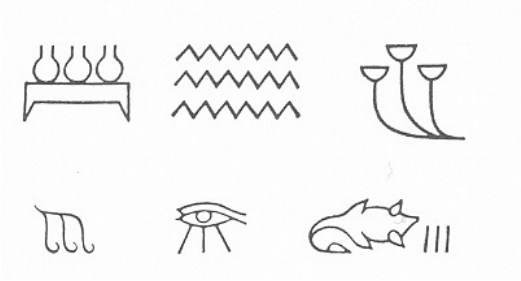
3 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ

Είναι γεγονός ότι η ιστορική πορεία εξέλιξης και χρήσης των μαθηματικών αντικειμένων καθώς και των αντίστοιχων συμβόλων, είναι συνδεδεμένη με την εξέλιξη της ίδιας της επιστήμης και του ανθρώπινου πολιτισμού. Η εξέλιξη αυτή γίνεται φανερή από την εμφάνιση νέων ιδεών, την ανακάλυψη νέων εννοιών, τη χρήση νέων μεθόδων και τεχνικών, παράλληλα με την εμφάνιση και εξέλιξη του μαθηματικού συμβολισμού. Επιστήμες και πολιτισμός αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, με αποτέλεσμα την πρόοδο και την εξέλιξη, αντικατοπτρίζοντας κάθε περίοδο ανάγκες και συμβιβασμούς της εποχής.

3.1 Το σύστημα των αριθμών

Οι πρώτες αντιλήψεις που απέκτησε ο άνθρωπος για τους αριθμούς ανάγονται στην Παλαιολιθική Εποχή, όπου η κύρια ενεργητικότητα των ανθρώπων, περιοριζόταν στις στοιχειώδεις διαδικασίες, απαραίτητες για τη συλλογή τροφής. Την περίοδο αυτή σταδιακά, οι άνθρωποι κατασκεύασαν όπλα για κυνήγι και ψάρεμα, ανέπτυξαν μία γλώσσα για επικοινωνία και αργότερα εμπλούτισαν τη ζωή τους με δημιουργικές μορφές τέχνης, οι οποίες φαίνεται να είχαν κάποιο τελετουργικό νόημα. Η πρόοδος προς την κατανόηση αριθμητικών αποτιμήσεων, θα πρέπει να συνδυαστεί με την αλλαγή στη στάση του ανθρώπου απέναντι στη φύση και την ανάγκη του ανθρώπου για την απόκτηση της τροφής. Η αλλαγή της στάσης από παθητική, με κύριο χαρακτηριστικό τη συλλογή τροφής, σε ενεργητική, η οποία χαρακτηρίζεται από την παραγωγή τροφής, φαίνεται να αναπτύσσει, παράλληλα με άλλες τεχνικές κυρίως δεξιότητες, τις βασικές αρχές της αριθμητικής όπως για παράδειγμα την ένα προς ένα αντιστοιχία δύο συνόλων (Struik, 1966). Ένα παράδειγμα σχετικό με αυτή τη διαπίστωση, προέρχεται από τη φυλή Wedda, η οποία έχει χαμηλό πολιτισμικό επίπεδο. Στη γλώσσα της φυλής αυτής, δεν υπάρχουν λέξεις για τους αριθμούς, ενώ η μέτρηση ενός πλήθους από αντικείμενα γίνεται με αντιστοίχιση των αντικειμένων αυτών, με ένα σύνολο από ραβδάκια - sticks (Menniger, 1969). Η εισαγωγή των αριθμητικών όρων σε συχνή χρήση, έγινε με αργό ρυθμό, δηλώνοντας στην αρχή μάλλον ποιότητα παρά ποσότητα. Οι λέξεις χρησιμοποιούνταν για να γίνει η διάκριση ανάμεσα στο «ένα», με την έννοια του «κάποιο» και όχι του «ένα

συγκεκριμένο», στο «δύο» και στο «πλήθος». Κάτι τέτοιο γίνεται φανερό από τους δυϊκούς τύπους που υπάρχουν σε ορισμένες γλώσσες, όπως για παράδειγμα η λέξη «τρία» εκφωνείται «δύο και ένα» (Struik, 1966). Στην Αφρική υπάρχουν ακόμη φυλές με πρωτόγονο πολιτισμό, που δεν έχουν λέξεις για την απόδοση όλων των αριθμών, όπως για παράδειγμα οι φυλή των Damara, η οποία έχει μόνο τρεις λέξεις για να εκφράσει όλους τους αριθμούς (Menniger, 1969). Κάποιοι πρωτόγονοι λαοί, σταματάνε την προφορική αρίθμηση στο τέσσερα, λέγοντας για την επόμενη σε τάξη μεγέθους ποσότητα, «είναι πολλά» (Τουμάσης, 1999, Menniger, 1969). Αυτή η διακοπή της αρίθμησης στο τέσσερα, αποδίδεται από το Menniger (1969) στο γεγονός ότι, η μέτρηση γίνεται με τα 4 δάχτυλα του χεριού – χωρίς τον αντίχειρα, ή στο ότι το «τέσσερα» δηλώνει ήδη μία σημαντική ποσότητα. Με παρόμοιο τρόπο, οι Αιγύπτιοι για να δηλώσουν την έννοια «πλήθος» ή «πολλά», παρουσιάζουν τρεις όμοιες φιγούρες (Σχήμα 1). Για παράδειγμα ένα μάτι με τρεις γραμμές για δάκρυα, δηλώνει το κλάμα.



Σχήμα 1. Σχήματα με τη χρήση του αριθμού τρία από τους Αιγυπτίους, για να δηλώσουν την έννοια «πολλά» (Menniger, 1969, σελ. 17).

Η ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου, δημιούργησαν την ανάγκη για συναλλαγές και επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων, προωθώντας παράλληλα το σχηματισμό των γλωσσών σε μία μικρή κοινωνία. Κάτι τέτοιο, είχε ως συνέπεια την εξέλιξη της έννοιας του αριθμού, τόσο για καταγραφή μεγεθών όσο και για υπολογισμούς, ενώ παράλληλα, γεννήθηκε η ανάγκη για μέτρηση, κάτι το οποίο απαιτούσε σύγκριση με κάποιο σταθερό πρότυπο (Struik, 1966). Τα πρώτα δείγματα παράστασης αριθμών, βασίζονται στην **προσθετική αρχή**. Έτσι, οι αριθμοί παριστάνονται με γραμμές, η μία πλάι στην άλλη, οι οποίες ταξινομούνται και δημιουργούν ενότητες γραμμών συγκεκριμένου πλήθους συνήθως. Στην καθημερινή πρακτική οι άνθρωποι, εφάρμοζαν την προσθετική αρχή, με τη χρήση των δακτύλων

του ενός ή και των δύο χεριών, μία πρακτική που συνηθιζόταν στο εμπόριο.

Μία άλλη βασική αρχή της αρίθμησης, είναι η **ταξινόμηση και ομαδοποίηση** των ποσοτήτων (*ordering and grouping*), με σκοπό την ευκολία στη μέτρηση και τους υπολογισμούς. Η πρώτη πιθανή ομαδοποίηση είναι η δυάδα, όπως δηλώνει η ύπαρξη ξεχωριστής λέξης για το ζευγάρι (Menniger, 1969). Παράλληλα, οι διαδικασίες σύνδεσης των αριθμών με τα δάχτυλα των χεριών, οδήγησαν στην αρίθμηση αρχικά με βάση το πέντε και ύστερα με βάση το δέκα. Μία από τις πρώτες γραπτές αναφορές στην ομαδοποίηση με βάση το πέντε όπως επισημαίνει ο Menniger, (1969), υπάρχει στην Οδύσσεια (4, 412-413), με την λέξη «*πεμπτάσσεται*»

…αὐτὰρ ἐπὴν πάσας **πεμπάσσεται** ἠδὲ ἴδηται,

λέξεται ἐν μέσσῃσι, νομεὺς ὣς πώεσι μήλων.

Η αρίθμηση με τα δάχτυλα έχει κάνει ανεξάρτητα την εμφάνιση της, σε διαφορετικούς πολιτισμούς. Για παράδειγμα, η φυλή των Ινδιάνων Dene-Dinjie σχηματίζει τις λέξεις για τους αριθμούς μέχρι το πέντε χρησιμοποιώντας λέξεις για τα δάχτυλα του χεριού, σε μία φυλή στην Ινδονησία, υπάρχει για την αρίθμηση η ομαδοποίηση με βάση το 20 και παράλληλα με την προσθήκη της λέξης «χέρι» στον βασικό αριθμό του συστήματος, εκφράζεται το 100 (100=5x20) (Menniger, 1969), ενώ κάποιοι άλλες φυλές έχουν για τον αριθμό «δύο» τη φράση «δύο δάχτυλα» (Hughes, 1996). Η παράσταση των αριθμών με σχηματισμό των δακτύλων παρέμεινε σε εκδόσεις βιβλίων μέχρι τον $18^{ο}$ αιώνα (Menniger, 1969). Η ομαδοποίηση των αριθμών, εφαρμόζεται σταδιακά τόσο στη συμβολική παράσταση, όσο και στις λέξεις που τους περιγράφουν. Αυτό γίνεται φανερό, από το γεγονός ότι οι περισσότερες γλώσσες, σύγχρονες και μη, δομούν τις λέξεις για τους αριθμούς με βάση το 5, το 10 και το 20. Για παράδειγμα, οι λέξεις για τον αριθμό 18 έχουν ως συνθετικά, τις λέξεις «δέκα» και «οκτώ» - *achtzehn*, στα Γερμανικά - ή «είκοσι» πλην «δύο» - *duo-de-viginti*, στα Λατινικά (Menniger, 1969).

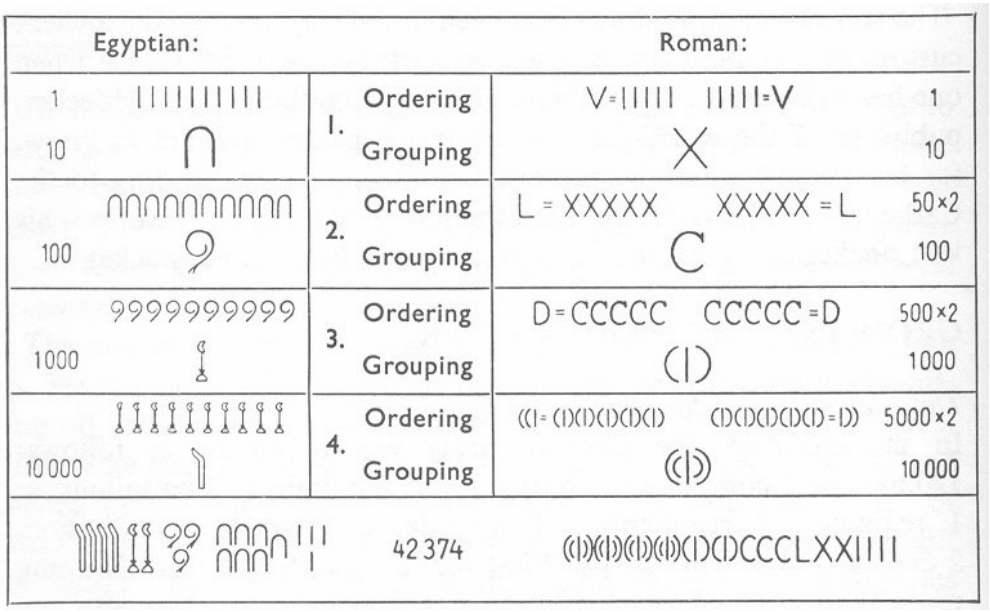
Οι διαφορετικές ανάγκες αρίθμησης, που πηγάζουν κυρίως από τις μελέτες φαινομένων, το εμπόριο και τις συναλλαγές, ήταν οι αιτίες για ομαδοποιήσεις κατά 20 ή κατά 60 μονάδες ή κατά μία ιδιαίτερη ενότητα π.χ. 12 μονάδες (ντουζίνα-δωδεκάδα). Επιπλέον, κάποιες προλήψεις για τη «μαγική- υπερφυσική» δύναμη των αριθμών, οδήγησαν στη χρήση των αριθμών αυτών για το μέτρημα σε ομάδες. Για παράδειγμα, ο αριθμός επτά, παρότι στις μέρες μας έχει χάσει την υπερφυσική του

δύναμη, παραμένει ζωντανό μέτρο ομαδοποίησης, με την εβδομάδα των επτά ημερών. Σε αυτό το αρχικό στάδιο αρίθμησης, οι λέξεις φαίνεται να εκφράζουν ένα χαρακτηριστικό για το πλήθος των μονάδων συγκεκριμένης ομάδας αντικειμένων και οι αριθμοί να περιγράφουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου. Για παράδειγμα περιγράφονται τα «πέντε ζώα» ως ένα σύνολο και το «πέντε» ως χαρακτηριστικό του συνόλου, αλλά όχι με την αφηρημένη έννοια (*abstract concept*) του αριθμού «πέντε» (Menniger, 1969).

Η αρχή της ένα προς ένα αντιστοιχίας, η οποία αποτελεί τη βάση για τη χρήση των δακτύλων, αποτελεί παράλληλα την προϋπόθεση για την πιο βασική μορφή γραπτής αναπαράστασης, αυτή των γραμμών. Οι επαναλαμβανόμενες γραμμές, είναι από τις παλαιότερες γνωστές μεθόδους αναπαράστασης αριθμών. Σημάδια πάνω σε κόκαλα, εγκοπές πάνω σε ραβδιά, κόμποι δεμένοι στη σειρά, και συλλογές από διάφορα βότσαλα ή όστρακα, συγκαταλέγονται επίσης, ανάμεσα στις πιο πρωτόγονες αναπαραστάσεις που έχουν βρεθεί. Τις περισσότερες φορές, οι γραμμές που αναπαριστούν αριθμούς είναι διευθετημένες σε σειρές και ταξινομημένες σε ομάδες των πέντε (Struik, 1966). Διάφορα συστήματα γραμμών έχουν χρησιμοποιηθεί μέσα στους αιώνες και χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα σε κάποια μέρη της Αφρικής και της Ασίας. Σε απλές περιπτώσεις, οι γραμμές χρησιμοποιούνται σήμερα στις σύγχρονες κοινωνίες για πρακτικούς κυρίως λόγους, σε διάφορες δραστηριότητες. Για παράδειγμα χρησιμοποιούνται για ανάγκες καταγραφής σε στατιστικούς ελέγχους, όπου μία μονάδα καταγράφεται με μία γραμμή και η πεντάδα συνήθως παρουσιάζεται με την πέμπτη γραμμή πλάγια ώστε να είναι εμφανής η ομάδα των πέντε παρατηρήσεων όπως στο επόμενο σχήμα  (Hughes, 1996, Struik, 1966).

Το επόμενο βήμα στην ανάπτυξη της παράστασης των αριθμών, είναι η εισαγωγή συμβόλων και η δημιουργία των αριθμητικών συστημάτων. Τα σύμβολα που υιοθετούνται δεν έχουν πάντα προφανή σχέση με την εικονική αναπαράσταση των αριθμών με γραμμές, αλλά βασίζονται στην αρχή της ομαδοποίησης και της προσθετικής αρχής. Οι αναπαραστάσεις των αριθμών από το 1 μέχρι το 5, σχεδόν σε όλα τα πρώτα συστήματα, βασίζονται στις γραμμές, ενώ για τους μεγαλύτερους αριθμούς γίνεται εισαγωγή «κομβικών» αριθμών με σύμβολα τα οποία δεν παραπέμπουν με κάποιο τρόπο στην αξία του αριθμού (Hughes, 1996). Για παράδειγμα, το Αιγυπτιακό σύστημα όπως και το Ρωμαϊκό, ακολουθεί την

προσθετική αρχή, είναι απλό και πρωτόγονο και οι αριθμοί παριστάνονται (Σχήμα 2), με επανάληψη συγκεκριμένων συμβόλων (Struik, 1966, Van der Wearden, 2003).



Σχήμα 2. Αιγυπτιακοί και Ρωμαϊκοί ταξινομημένοι αριθμοί (Menniger, 1969, σελ. 42)

Στα δύο συστήματα υπάρχει μία διαφοροποίηση. Συγκεκριμένα, ενώ στο Αιγυπτιακό σύστημα, κάθε αριθμός εκτός των κομβικών, προκύπτει από τον προηγούμενο του με προσθήκη μίας γραμμής, στο Ρωμαϊκό χρησιμοποιείται σε κάποιες περιπτώσεις η έννοια της αφαίρεση (Πίνακας 1).

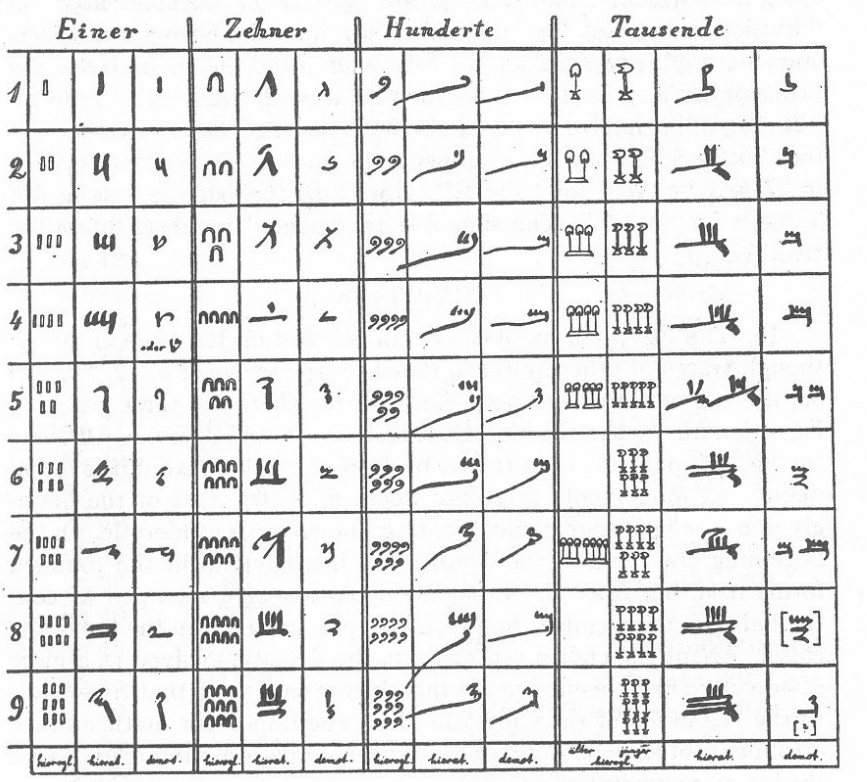
Σύγχρονη γραφή	Αιγυπτιακά ιερογλυφικά	Ρωμαϊκά
8		VIII (5+3)
9		IX (10-1)
19		XIX (10+9)

Πίνακας 1. Παράσταση των αριθμών 8, 9 και 19 με το Ρωμαϊκό και το Αιγυπτιακό σύστημα

Παράλληλα, στο Αιγυπτιακό σύστημα υπάρχει ειδικό σύμβολο για την παράσταση των κλασματικών μονάδων, κλάσματα δηλαδή με αριθμητή τη μονάδα. Αυτή είναι η αιτία ύπαρξης στην υπολογιστική τέχνη των Αιγυπτίων, του λογισμού με σκοπό την αναγωγή σε κλάσματα της μορφής 1/α (Van der Wearden, 2003, Struik, 1966). Οι κλασματικές μονάδες συμβολίζονταν με το σύμβολο του αριθμού και την

προσθήκη ενός ειδικού συμβόλου στο πάνω μέρος του αριθμού, που σημαίνει μέρος. Για παράδειγμα, το 1/12 συμβολίζεται ως  (Van der Wearden, 2003).

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν αρχικά το ιερογλυφικό σύστημα, ενώ αργότερα το σύστημα αυτό εξελίχθηκε σε μία κρυπτογραφημένη έκδοση, η οποία ονομάζεται *ιερατική* γραφή. Η ιερατική γραφή, ήταν σύμφωνα με τον Cajori (1928), αποτέλεσμα της γρήγορης γραφής των ιερογλυφικών, με ένα είδος ραβδογλύφου πάνω σε πάπυρο. Μία Τρίτη μορφή αιγυπτιακής γραφής, (Σχήμα 3), η οποία ονομάστηκε *δημώδης* ή *λαϊκή*, αναπτύχθηκε γύρω στο 800 π.Χ. και είναι αυτή, που οδήγησε στην εκλαΐκευση της γραφής των αριθμών (Cajori, 1928).



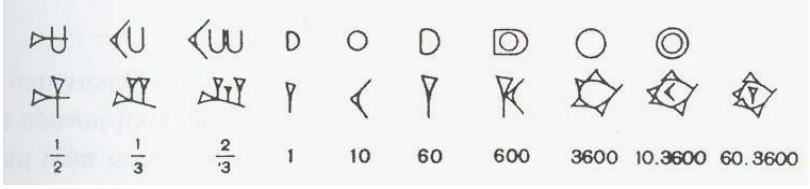
Σχήμα 3. Οι τρεις διαφορετικές γραφές ιερογλυφική, ιερατική και δημώδης, για το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων (Cajori, 1928, σελ. 12)

Οι υπολογισμοί των Αιγυπτίων, έχουν ως κυρίαρχο στοιχείο την πρόσθεση. Έτσι, τα κλάσματα γράφονται ως άθροισμα κλασματικών μονάδων και η πράξη του πολλαπλασιασμού, μία γραπτή πράξη, γράφεται και αυτή ως ένα είδος πρόσθεσης. Οι πρακτικοί υπολογισμοί γίνονταν περίπλοκοι ενώ η τάξη των γραφέων ασχολείται με αυτούς. Παράλληλα με τους πρακτικούς υπολογισμούς, στην Αίγυπτο υπήρξε και θεωρητικό ενδιαφέρον για την αριθμητική, γνωστό ως «υπολογισμοί αχά». Οι υπολογισμοί αυτοί, αντιστοιχούν σε γραμμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο, τις οποίες

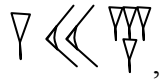
όπως και τις δυωνυμικές εξισώσεις, οι Αιγύπτιοι με την επίπονη και πρωτόγονη υπολογιστική τεχνική τους, δεν μπόρεσαν να υπερβούν με επιτυχία (Van der Wearden, 2003).

Το ίδιο πολύπλοκοι και χρονοβόροι είναι οι υπολογισμοί με το Ρωμαϊκό σύστημα. Βέβαια η χρήση των αβάκων – αρχαίων υπολογιστικών μηχανών - διευκόλυναν τις διαδικασίες υπολογισμών. Οι υποστηρικτές της χρήσης ρωμαϊκών ψηφίων και του άβακα έναντι των ινδό-αραβικών, για την εκτέλεση των υπολογισμών κατά τον Μεσαίωνα, ονομάστηκαν *αβακιστές*. Τα ρωμαϊκά ψηφία διατηρήθηκαν τουλάχιστον μέχρι τα τέλη του 15^{ου} αιώνα, όπου και αντικαταστάθηκαν σταδιακά από τα σημερινά ψηφία, του ινδό-αραβικού συστήματος. Η διαμάχη ανάμεσα στους *αβακιστές*, και στους *αλγοριστές*, υποστηρικτές των ινδό-αραβικών ψηφίων και των αλγορίθμων για τους υπολογισμούς, κράτησε πάνω από 400 χρόνια (Eves, 1981).

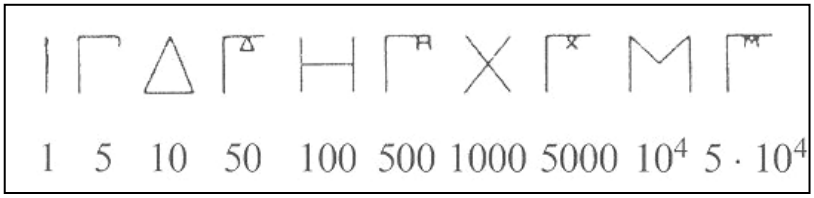
Σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους, οι Βαβυλώνιοι είχαν έναν θαυμάσιο συμβολισμό για τους ακεραίους και για τα κλάσματα, ο οποίος τους επέτρεπε να κάνουν υπολογισμούς με κλάσματα τόσο εύκολα όσο και με ακεραίους. Αυτό τους έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξουν σε υψηλό βαθμό την άλγεβρα. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα και τα εξηκονταδικά κλάσματα. Το σύστημα αυτό το παρέλαβαν από τους προγενέστερους τους Σουμέριους, οι οποίοι αρχικά, δεν είχαν συστηματικό θεσιακό σύστημα για όλες τις δυνάμεις του 60 και τα πολλαπλάσια τους. Τα πρώτα σύμβολα, τα σχημάτιζαν με το άκρο στρογγυλής γραφίδας, ενώ αργότερα τα σύμβολα επιμερίστηκαν σε αποτυπώματα σφηνών (Van der Wearden, 2003). Το σχήμα του «1» και του «60» είναι το ίδιο αλλά το σχήμα του 60 έχει μεγαλύτερο μέγεθος (Σχήμα 4). Όπως παρατηρεί ο Van der Wearden (2003, σελ.33), αυτό συνέβαινε, προφανώς «*επειδή το έβλεπαν σαν "μεγάλη μονάδα"*».



Σχήμα 4. Σύμβολα παράστασης αριθμών από την ύστερη σουμεριακή περίοδο (Van der Wearden, 2003, σελ. 33)

Στο σύστημα των Βαβυλωνίων, οι αριθμοί γράφονταν με το συνήθη δεκαδικό συμβολισμό χρησιμοποιώντας δύο σύμβολα. Η απλή κατακόρυφη σφήνα , έχει την τιμή 1, ενώ η σφήνα με δύο άκρα , την τιμή 10. Για παράδειγμα ο αριθμός 35 γραφόταν . Το ξεχωριστό στοιχείο του συστήματος αυτού, είναι το γεγονός ότι, για τον αριθμό 60 υπάρχει πάλι το σύμβολο του αριθμού 1, οπότε παρόμοια, το σύμβολο για το 10 μπορεί να σημαίνει και τον αριθμό 10 x 60. Με τα ίδια σύμβολα παριστάνονται και τα κλάσματα. Για παράδειγμα, το σύμβολο , για το 1, μπορεί να παριστάνει το 60 , το 60^2 αλλά και το 1/60 ή $1/60^2$ κλπ. Η τιμή ενός συμβόλου εξαρτάται, από τη θέση του συμβόλου μέσα στον αριθμό και για το λόγο αυτό το σύστημα χαρακτηρίζεται θεσιακό. Οι ανώτερες δυνάμεις του 60 τοποθετούνται στην αρχή και οι κατώτερες στο τέλος. Για παράδειγμα, η τιμή του συμβόλου , μπορεί να είναι 60+20+4=84 ή 1+24/60=84/60 ή και κάποια άλλη τιμή. Η αναγνώριση της τιμής των συμβόλων βασιζόταν στο πλαίσιο στο οποίο αναφερόταν, κάτι που αποτελούσε ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του συστήματος αυτού κυρίως για θεωρητικά προβλήματα (Van der Wearden, 2003, Bunt, 1981). Επιπλέον, η έλλειψη ενός συμβόλου για τη μηδενική τιμή σε μία δύναμη του 60, δημιουργούσε μία ακόμη σύγχυση στην αξία ενός συμβόλου. Η έλλειψη αυτή, διορθώθηκε μερικώς αργότερα, με την εισαγωγή στη συγκεκριμένη θέση ενός συμβόλου , για τη μηδενική τιμή. Για παράδειγμα, το σύμβολο  με το νέο διαχωριστικό σύμβολο, δηλώνει τον αριθμό $1x60^2+0x60+4=3604$ ενώ χωρίς το διαχωριστικό θα μπορούσε να δηλώνει και τον αριθμό 1x60+4=64 (Van der Wearden, 2003).

Αντίθετα με το ευφυές σύστημα των Βαβυλωνίων, ο Ελληνικός συμβολισμός, είναι απλοϊκός και δύσχρηστος. Το αρχικό σύστημα Ελλήνων, το Ηρωδιανικό, μοιάζει με αυτό των Ρωμαίων, αλλά με χρήση των γραμμάτων στο σχηματισμό των συμβόλων (Σχήμα 5). Είναι φανερό ότι χρησιμοποιούνται τα γράμματα Π, Δ, Χ και Μ τα οποία είναι τα αρχικά γράμματα των λέξεων *Πέντε, Δέκα, Χίλιοι, και Μύριοι*, και το Η, για το *Εκατό*. Το σύστημα αυτό, το χρησιμοποιούσαν αποκλειστικά για πληθικούς αριθμούς (Van der Wearden, 2003, Heath, 2001).



Σχήμα 5. Ο συμβολισμός των Ελλήνων, ο οποίος καλείται *Ηρωδιανικό* σύστημα (Van der Wearden, 2003, σελ. 42).

Αργότερα, εισήχθη ένας πιο σύντομος, αλφαβητικός συμβολισμός με τα 24 γράμματα του αλφαβήτου και τα σύμβολα ϛ ϟ και μ (Πίνακας 2). Με συνδυασμούς των γραμμάτων και των συμβόλων, μπορούσαν να παριστάνουν τους αριθμούς μέχρι το 999, καθώς και με την προσθήκη μίας γραμμής στο κάτω μέρος να πολλαπλασιάζουν επί χίλια την αξία της συμβολικής παράστασης για τα πρώτα 9 σύμβολα. Για να διακρίνονται οι αριθμοί από τις λέξεις, προσθέτανε ένα τόνο στο τέλος ή τοποθετούσαν μία παύλα πάνω από τα γράμματα. Για παράδειγμα ο αριθμός 1305 συμβολίζεται ,*ατε΄* ή $\overline{,ατε}$, ο αριθμός ,γ΄ είναι 3.000, ενώ ο ,δτνβ΄ είναι 4.352. Η αλλαγή αυτή σύμφωνα με τον Cajori (1928) οφείλεται στις εμπορικές συναλλαγές των Ελλήνων, με Φοίνικες, Σύριους και Άραβες.

Α=1	Ι=10	Ρ=100
Β=2	Κ=20	Σ=200
Γ=3	Λ=30	Τ=300
Δ=4	Μ=40	Υ=400
Ε=5	Ν=50	Φ=500
ϛ=6	Ξ=60	Χ=600
Ζ=7	Ο=70	Ψ=700
Η=8	Π=80	Ω=800
Θ=9	ϟ=90	μ=900

Πίνακας 2. Η παράσταση των αριθμών με γράμματα και σύμβολα από τους Έλληνες

Το σύμβολο ϛ ονομάστηκε Στίγμα, το σύμβολο ϟ είναι το αρχαίο Κόππα και το σύμβολο μ είναι το αρχαίο Σαμπί (Heath, 2001).

Για αριθμούς μεγαλύτερους της μυριάδας Μ=10.000, οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν το σύμβολο Μ με τον αριθμό για την δύναμη στο πάνω μέρος, δηλαδή ο αριθμός $\overset{\kappa\varepsilon}{M}$ μγ΄ είναι ο 250043 (Van der Wearden, 2003). Για αριθμούς με μεγαλύτερες δυνάμεις του *Μύρια* ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος ανέπτυξαν ένα σύστημα, το οποίο δεν συνδέεται με τον συνηθισμένο αριθμητικό συμβολισμό και έπαιξε περισσότερο ρόλο γυμνάσματος (Heath, 2001). Το βασικό μειονέκτημα του αλφαβητικού συμβολικού συστήματος, ήταν το γεγονός ότι, καθιστούσε τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς ασαφείς. Για παράδειγμα, δεν υπήρχε φανερός συσχετισμός ανάμεσα στους αριθμούς, τέσσερα (δ΄), σαράντα (μ΄) και τετρακόσια (υ΄). Επιπλέον, καθώς το σύστημα δεν χρησιμοποιούσε την αξία θέσης, μπορούσε να λειτουργεί χωρίς μηδέν, με αποτέλεσμα κάποιες ιδιότητες των πολλαπλασίων του 10, να μην είναι φανερές. Για παράδειγμα, η πρόσθεση του 3 με το 4 δίνει 7, αλλά αυτό δεν φανερώνει, ότι η πρόσθεση του 30 με το 40 έχει αποτέλεσμα το 70 (Hughes, 1996). Παρόλο που οι Έλληνες έκαναν με αρκετά μεγάλη ευκολία υπολογισμούς με το σύστημα αυτό, σύμφωνα με τον Van der Wearden (2003, σελ. 43) «*η χρήση γραμμάτων για την παράσταση καθορισμένων αριθμών δεν ήταν επωφελής για την ανάπτυξη της άλγεβρας στην Ελλάδα*», αφού δεν παρείχε τη δυνατότητα παράστασης των άγνωστων ποσοτήτων με τα ίδια γράμματα. Αργότερα, η διατήρηση των πρώτων εννέα ψηφίων και η προσθήκη ενός συμβόλου «Ч» για το μηδέν από τους σοφούς του Βυζαντίου, σύμφωνα με τους Boyer & Merzbach (1997), καθιστούσε το σύστημα με τα γράμματα εξίσου λειτουργικό με το σημερινό, αφού οι μορφές των αριθμών ήταν παρόμοιες. Για παράδειγμα ο αριθμός 3520 γραφόταν ως «*γεβч*».

Η παράσταση των αριθμών στην Κίνα και την Ιαπωνία ακολουθεί αρχικά παρόμοιους κανόνες επανάληψης γραμμών για τους μικρούς αριθμούς αλλά η παράσταση των μεγαλύτερων χρησιμοποιεί ιδιαίτερα σχήματα. Στην Κίνα όμως, πριν το 221 π.Χ., έχει γίνει αποδεκτό ένα διαφορετικό σύστημα παράστασης αριθμών, με χρήση μόνο οριζοντίων και καθέτων γραμμών (Lam Lay-Yong, 1986, Cajori,1928).

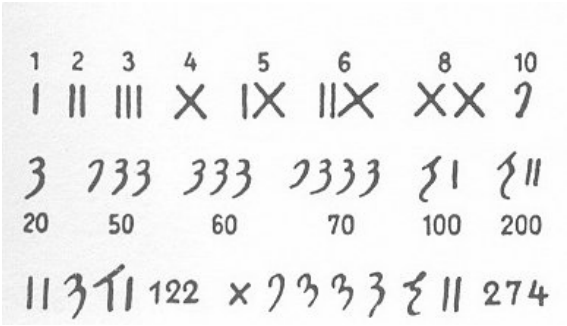
Στο Κινέζικο αυτό σύστημα παράστασης αριθμών (Πίνακας 3), υπάρχει η παράσταση με κατακόρυφες γραμμές για τις μονάδες, με οριζόντιες γραμμές για τις δεκάδες, πάλι με κατακόρυφες γραμμές για τις εκατοντάδες, πάλι με οριζόντιες γραμμές για τις χιλιάδες, και ούτω καθ' εξής, όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Θέση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Μονάδες									
Δεκάδες									

Πίνακας 3. Η παράσταση των αριθμών σύμφωνα με ένα κινέζικο σύστημα (Lay-Yong, 1986).

Στο σύστημα αυτό που χρησιμοποιούσαν οι Κινέζοι από τη δυναστεία του Shang, υπάρχει η αρχή της αξίας θέσης, σύμφωνα με την οποία ένα ψηφίο έχει αριθμητική τιμή, ανάλογα με τη θέση του στην παράσταση του αριθμού. Για παράδειγμα ο αριθμός 94571 συμβολίζεται «». Επιπλέον, υπήρχε δυνατότητα παράστασης του μηδενός, για μία δύναμη του δέκα, αφήνοντας κενή την αντίστοιχη θέση (Lay-Yong, 1986).

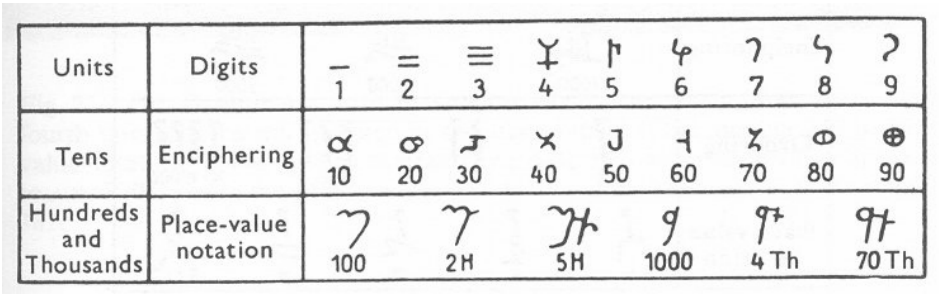
Η εξέλιξη του αριθμητικού συμβολισμού στην Ινδία, ακολούθησε τον ίδιο δρόμο που ακολούθησε και στην Ελλάδα. Οι χαράξεις της πρώτης περιόδου, παρουσιάζουν κατ' αρχήν απλές κατακόρυφες γραμμές ταξινομημένες σε ομάδες. Τον τρίτο π.Χ. αιώνα οι Ινδοί, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα που θύμιζε το Ηρωδιανικό. Στο νεώτερο αυτό σύστημα διατηρήθηκε η αρχή της επανάληψης και υπήρχαν καινούρια σύμβολα για το τέσσερα, το δέκα, το είκοσι και το εκατό Το σύστημα αυτό είναι γνωστό ως γραφή Kharosti (Boyer & Merzbach, 1997, σελ. 237).



Σχήμα 6. Ταξινομημένοι αριθμοί με γραφή Kharosti (Menniger, 1969, σελ. 50).

Η γραφή Kharosti αντικαταστάθηκε σταδιακά από το σύστημα με χαρακτήρες Brahmi (Σχήμα 7), παρόλο που λείπει το σύμβολο για το μηδέν και το σύστημα δεν είναι θεσιακό, υπάρχουν στοιχεία ικανά να δικαιολογήσουν τη μετέπειτα ανάπτυξη, όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι κάθε αριθμός μικρότερος του 10 παριστάνεται

με ένα μόνο σύμβολο και όχι με σύμπλεγμα συμβόλων, ενώ με γρήγορή γραφή τα σύμβολα για το δύο και το τρία παραπέμπουν στα σημερινά (Van der Wearden, 2003, Menniger, 1969).

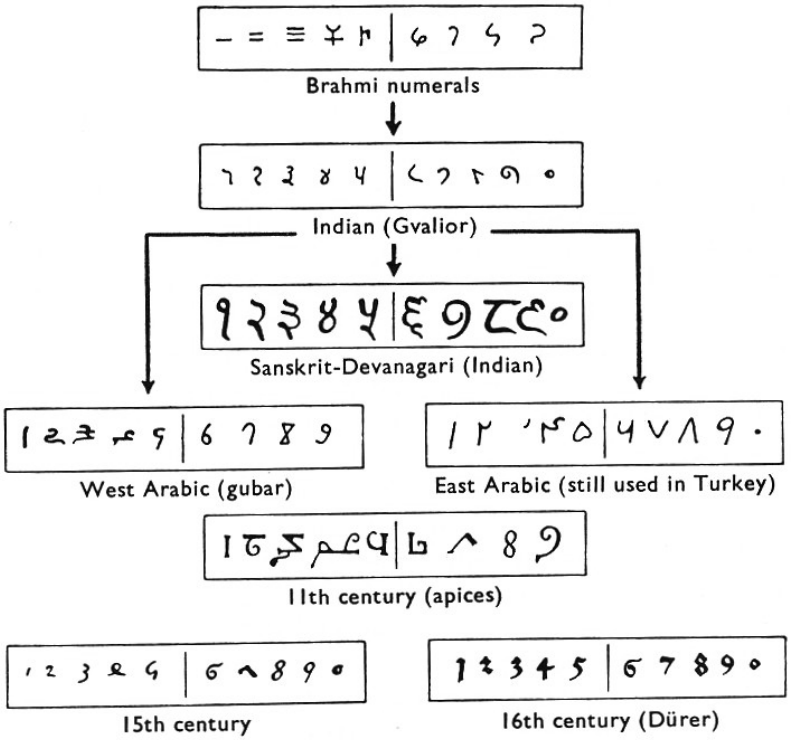


Σχήμα 7. Αριθμοί με γραφή Brahmi (Menniger, 1969, σελ. 395).

Η εξέλιξη που ακολούθησαν οι χαρακτήρες Brahmi, οδήγησαν στο σημερινό θεσιακό σύστημα με τα γνωστά σύμβολα Gvalior για τα εννέα ψηφία και την προσθήκη ειδικού συμβόλου για το μηδέν (Menniger, 1969). Ειδικά για το σύμβολο και την έννοια του μηδενός, ο Freudenthal, όπως αναφέρει ο Van der Wearden (2003) πιστεύει, ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στο σημερινό μηδέν και αυτό που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες. Η προέλευση του συμβόλου «0» σύμφωνα με τους Menniger, (1969) και Cajori (1928), μπορεί να είναι το αρχικό γράμμα «ο-όμικρον» της λέξης «*ουδέν*» το οποίο χρησιμοποιούσαν στα εξηκονταδικά κλάσματα ή το σύμβολο 𝛢 για τον αριθμό δέκα στη γραφή Brahmi (Σχήμα 7). Βασικό στοιχείο του νέου συστήματος, είναι η αρχή της αξίας θέσης για κάθε ψηφίο του αριθμού. Είναι πολύ πιθανό οι Ινδοί αστρονόμοι και υπολογιστές, να γνώριζαν την αρχή αυτή, αφού τη χρησιμοποιούσαν στους ποιητικούς και συλλαβικούς αριθμούς (Van der Wearden, 2003). Πολλοί ιστορικοί εκφράζουν την άποψη, ότι αυτή η εξέλιξη των συμβόλων και η αξιοποίηση της αρχής του θεσιακού συστήματος για την παράσταση των αριθμών από τους Ινδούς, πιθανόν να προήλθε από την αξιοποίηση στοιχείων από την Ελληνική αστρονομία, τη Βαβυλωνιακή και Κινέζικη μέθοδο παράστασης των αριθμών (Van der Wearden, 2003, Boyer & Merzbach, 1997, Lay-Yong, 1986, Struik, 1966).

Τα σύμβολα Gvalior, εξελίχθησαν σε (α) Δυτικά Αραβικά (*gubar*), τα οποία εξελίχθηκαν στα σημερινά σύμβολα και (β) Ανατολικά Αραβικά, τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα σε αρκετές αραβικές χώρες. Τα σύμβολα Brahmi, όπως

φανερώνει και ο πίνακας του Σχήματος 8, είναι ο πρόγονος πολλών τοπικών μορφών στην Ινδία οι οποίες χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα (Menniger, 1969)



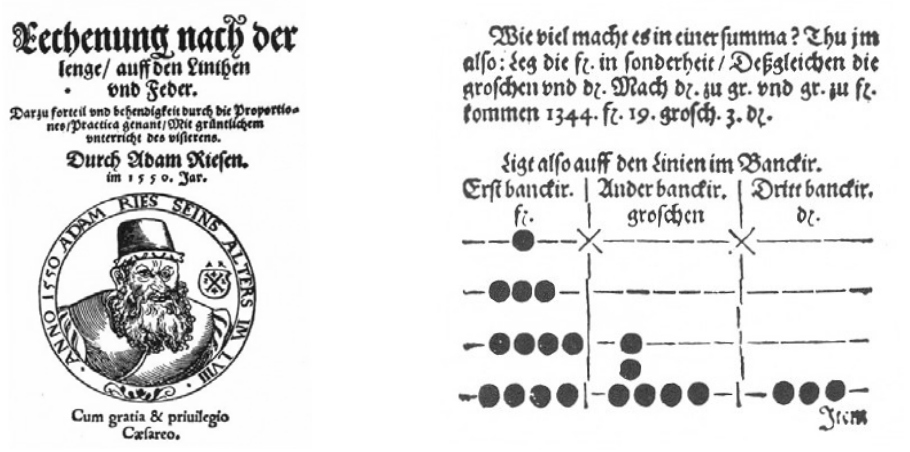
Σχήμα 8. Η εξέλιξη των ψηφίων μέχρι τη σημερινή τους μορφή σε διάφορες ενδιάμεσες μορφές, σύμφωνα με τον Menniger, (1969, σελ.418)

Η συμβολή των Αράβων στην εξέλιξη και διάδοση του σημερινού συστήματος αρίθμησης, είναι καθοριστικής σημασίας και περιγράφεται από τον Menniger, (1969, σελ. 406) με τη φράση «*οι αριθμοί των Ινδών στα χέρια των Αράβων*» (*The Indian numerals in Arab hands*). Στον ισλαμικό επιστημονικό κόσμο, πριν υιοθετηθεί το ινδικό σύστημα παράστασης, συνυπήρχαν το ελληνικό σύστημα και τοπικά αλφαριθμητικά συστήματα αρίθμησης παρόμοια με το ελληνικό (Cajori, 1928, Struik, 1966, Lay-Yong, 1986). Η πρώτη γνωστή αναφορά στα ινδικά ψηφία, είναι αυτή του Σύριου επισκόπου Severus Sebokht (Σεβέριου Σέμποκτ) σε μία εργασία του γραμμένη το 622 μ.Χ.. Σε αυτή την εργασία, ο επίσκοπος αναφέρεται στα επιτεύγματα των Ινδών και «*τις πολύτιμες υπολογιστικές μεθόδους τους και τους υπολογισμούς τους που ξεπερνούν τη φαντασία. Θέλω μόνο να πω ότι, αυτοί οι υπολογισμοί γίνονται με εννέα μόνο ψηφία*». Προφανώς, τα ψηφία αυτά ήταν ήδη σε χρήση, κάτι που μαρτυρεί μία ινδική επιγραφή του έτους 595 και η οποία αναφέρεται

στο έτος «346» (Boyer & Merzbach, 1997, Struik, 1966) Η γνώση των ινδικών ψηφίων και του συστήματος αρίθμησης από τους Άραβες, φαίνεται να άρχισε από μία αστρονομική πραγματεία (Σιδχάντα), μεταφρασμένη από τα Σανσκριτικά στα Αραβικά (Menniger, 1969). Η χρήση των ψηφίων αυτών είχε σαν αποτέλεσμα την εξάπλωσή τους σε όλα τα Αραβικά κέντρα πολιτισμού και επιστημών της εποχής, από τον Ινδό ποταμό μέχρι και τα Πυρηναία. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια των 8^{ου} και 9^{ου} αιώνα η αραβοκρατούμενη Ισπανία, αποτελούσε κέντρο εκπαίδευσης για την υπόλοιπη Ευρώπη και πολλοί ήταν οι Ευρωπαίοι που σπούδαζαν σε πόλεις της Ισπανίας. Με τον τρόπο αυτό, μεταφέρθηκαν αραβικές και ελληνικές επιστημονικές γνώσεις, οι οποίες ήταν άγνωστες μέχρι τότε στην Ευρώπη (Menniger, 1969, Van der Wearden, 2003). Από την Ισπανία γίνεται και η εισαγωγή του ινδό-αραβικού συστήματος αρίθμησης στην Ευρώπη, με πρώτη προσπάθεια από ένα μικρό βιβλίο του εκκλησιαστικού μαθηματικού Gerbert (αργότερα Πάπας Σιλβέστρος Β΄) τον 10 αιώνα. Στη συνέχεια, το 12^{ο} αιώνα, τα εννέα ψηφία μαζί με το μηδέν, εμφανίζονται στην Ευρώπη σε μεταφρασμένα έργα του Al Khwarizmi. Συγκεκριμένα, τα νέα ψηφία εμφανίζονται σε λατινική μετάφραση ενός έργου ειδικά για τον ινδικό λογισμό, με τίτλο «*Algorithmi de numero Indorum*», καθώς και στη μετάφραση του βιβλίου αριθμητικής «*Hisab aljabr w'almuqabala*». Και οι δύο αυτές μεταφράσεις, συνεισφέρουν στη διάδοση του νέου συστήματος (Boyer & Merzbach, 1997, Van der Wearden, 2003, Menniger, 1969, Struik,1966).

Τη σημαντικότερη συμβολή στη διάδοση του νέου συστήματος κατά τη μεταβατική διαδικασία, παρείχε το έργο του Leonardo di Pisa *Liber abaci,* το οποίο έκανε την εμφάνισή του το 1202 στην Ιταλία και αναφέρεται στους αριθμούς και τους υπολογισμούς χωρίς τον άβακα, παρά τον παραπλανητικό τίτλο του. Συγκεκριμένα, περιγράφει τα εννέα ινδικά ψηφία, το σύμβολο 0, καθώς και μια πλήρης μελέτη αλγεβρικών μεθόδων και προβλημάτων στα οποία συνιστάται η χρήση των ινδό-αραβικών ψηφίων (Boyer & Merzbach, 1997). Κατά τα χρόνια του Βυζαντίου, ο Μάξιμος Πλανούδος, έγραψε ένα έργο για το ινδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο είχε γίνει πλέον γνωστό και στον ελληνικό κόσμο, μάλλον από τον Leonardo di Pisa. Αργότερα ο ίδιος ο Πλανούδος, αντικατέστησε τα δυτικά, με τα ανατολικά- αραβικά ψηφία (Boyer & Merzbach, 1997, Vogel, 1996).

Η διάδοση και η εδραίωση του νέου ινδό-αραβικού συστήματος και των αλγορίθμων, έναντι του ρωμαϊκού και του άβακα, δεν ήταν μια απλή υπόθεση, αφού τα νέα ψηφία ήταν εύκολο να αλλοιωθούν και να διαφοροποιηθεί η αξία των μεγεθών που περιέγραφαν (Van der Wearden, 2003). Σε μερικές περιπτώσεις έχουν βρεθεί και παραστάσεις με μία ενδιάμεση μορφή όπως για παράδειγμα η $II^{m}III^{c}XV$ για τον αριθμό 2315 (Struik, 1966). Τα πλεονεκτήματα του νέου συστήματος, έγιναν σιγά-σιγά αντιληπτά σε ολόκληρη την Ευρώπη. Παρόλο που η επικράτηση του νέου συστήματος χρειάστηκε πάνω από 400 χρόνια, τελικά όλοι αυτοί που εμπλέκονταν στις διαδικασίες υπολογισμών, το υιοθέτησαν. Παράλληλα, υπήρξε πληθώρα βιβλίων αριθμητικής, με επεξηγήσεις για τους υπολογισμούς με το νέο σύστημα, με πιο φημισμένη αυτήν, του Adam Riese (Σχήμα 9) στη Γερμανία.



Σχήμα 9. Το εξώφυλλο και μία σελίδα από τη άλγεβρα του Adam Riese (Menniger, 1969, σελ. 437 & 352)

Η τελική η επικράτηση του ινδό-αραβικού συστήματος αρίθμησης ήρθε μετά τον $15^{ο}$ αιώνα και η χρήση του διαδόθηκε τόσο στον εμπορικό κόσμο όσο και στον απλό λαό. Η λέξη «*ινδό-αραβικό*» σύστημα, αποδίδει την Ινδική προέλευσή του συστήματος αυτού και τη συμβολή των Αράβων στη εξέλιξη και διάδοσή του. Χαρακτηριστική είναι η άποψη του Van der Wearden, (2003, σελ. 55) σύμφωνα με την οποία, «*Οι Ινδοί ανέπτυξαν τον τελειότερο συμβολισμό των αριθμών που γνωρίζουμε*» και η δήλωση του Menniger, (1969, σελ. 55), «*Η γλώσσα μας είναι Γερμανική, η γραφή μας Ρωμαϊκή, και οι αριθμοί μας Ινδικοί*».