ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΟΥ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: ΤΡΕΙΣ (3) ΩΡΕΣ
ΤΗΛ. ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ: 6940858921

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού A,B αντιστοίχως. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g; Πώς και πότε ορίζεται σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 6

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο;

Μονάδες 5

Α3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

β) Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει υποχρεωτικά πεδίο ορισμού το σύνολο $A\cap B$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Δύο κινητά A,B ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή, από το ίδιο σημείο και οι θέσεις τους τη χρονική στιγμή t δίνονται από τις συναρτήσεις $f(t) = e^t + t^2 - \lambda$ και $g(t) = e^{t+\lambda} + t + \lambda$, αντίστοιχα, με $0 \le t \le 3$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 8

Β2. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή $t \neq 0$, για την οποία τα κινητά A,B συναντιούνται.

Μονάδες 5

Β3. α) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο, η θέση του κινητού A βρίσκεται κάτω από τη θέση του κινητού B.

(μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή $0 < t_1 < 1$, για την οποία η κατακόρυφη απόσταση των δύο κινητών A,B γίνεται μέγιστη.

(μονάδες 7)

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 4f(x) = 4x$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^3}{4} + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς τη μονοτονία της (μονάδες 2) και στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f (μονάδες 6).

Μονάδες 8

Για τα ερωτήματα Γ3, Γ4, θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι $g(4) = 10$.

Μονάδες 4

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 3x) = -2x^2 + 6x + 10$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)f(x)=1$ (μονάδα 1). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 6

Δ4. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}\alpha^{2021}-\beta^{2021}=2\\ \left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1\end{cases}$$

Μονάδες 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!

Επιμέλεια θεμάτων:

Θέμα Β: Θεόδωρος Παπανδρέου (Πηγή - Μαθηματικά για υποψήφιους)
Θέμα Γ: Βασίλης Κακαβάς (Πηγή - mathematica.gr)
Θέμα Δ: Αλέξανδρος Συγκελάκης (Πηγή - mathematica.gr)