

ΑΛΓΕΒΡΑ *Α' ΛΥΚΕΙΟΥ*

ΣΥΛΛΟΓΗ
ΘΕΜΑΤΩΝ
2020-2021

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΛΕΥΤΕΡΗΣ

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΛΕΥΤΕΡΗΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Λευτέρης Παπανικολάου, Πτυχιούχος του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών.

Επικοινωνία:

EMAIL: left-eris82@hotmail.com

FACEBOOK: [Lefteris Papanikolaou](#)

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου του φυλλαδίου με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφηση ή άλλο, χωρίς την προηγούμενη άδεια του συγγραφέα. Νόμος 2121/1993 και κανόνες του διεθνούς δικαίου που ισχύουν στην Ελλάδα.

COPYRIGHT 2020 Λευτέρης Παπανικολάου, Μαθηματικός

Πρόλογος:

Το παρόν φυλλάδιο δημιουργήθηκε με σκοπό να βοηθήσει τους συναδέλφους Μαθηματικούς στη διδασκαλία, καθώς και τους μαθητές στην εμβάθυνση στο μάθημα της Άλγεβρας της Α΄ Τάξης Λυκείου. Προορίζεται κυρίως (όχι όμως αποκλειστικά!) για μαθητές με ιδιαίτερη κλίση στα Μαθηματικά και στοχεύει να καλύψει το μεγαλύτερο μέρος της σχολικής ύλης. Κάποιες από τις ασκήσεις, κατά τη γνώμη μου, μπορούν να αποτελέσουν και θέματα εξετάσεων καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους.

Ελπίζω η εργασία αυτή να φανεί χρήσιμη τόσο σε συναδέλφους Μαθηματικούς όσο και σε μαθητές! Εύχομαι καλή ανάγνωση και όμορφες λύσεις!

Για τυχόν λάθη ή παραλείψεις, παρακαλούνται οι αναγνώστες να επικοινωνήσουν μαζί μου και οι σχετικές επισημάνσεις θα ληφθούν υπόψη για μελλοντικές διορθώσεις.

Ευχαριστώ θερμά:

- τον αγαπητό φίλο και συνάδελφο Μαθηματικό, Γιάννη Αθανασόπουλο, για τη συμβολή του στο Α΄ ερώτημα του Θέματος 19, καθώς και για την πολύτιμη-γενικότερη συνεισφορά του.
- τον καλό φίλο και συνάδελφο Μαθηματικό, Κώστα Τσόλκα, για την καθοριστική βοήθειά του στη δημιουργία του φυλλαδίου και για τις χρήσιμες επισημάνσεις του.
- την καλή φίλη, Κρύστα Κατσαριώτη, για την πολύτιμη συνεισφορά της στο σχεδιασμό του φυλλαδίου.

Ο συγγραφέας

Λευτέρης Παπανικολάου

ΘΕΜΑ 1ο

A) Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

$$d(x, -1) < d(x, -2) \text{ και } d(x, -5) < d(x, 4) .$$

B) Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$|\alpha + 1| < |\alpha + 2| \text{ και } |\alpha + 5| < |\alpha - 4| .$$

i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $4\alpha^2 - 8|\alpha| + 3 < 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 2\alpha = 0$ έχει δύο άνισες (πραγματικές) ρίζες, από τις οποίες μία τουλάχιστον είναι θετική.

ΘΕΜΑ 2ο

A) Δίνονται οι αριθμοί: $\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 2) + 4 - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$,

$\kappa = \frac{23}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$ και η παράσταση $A = \alpha + \beta - \alpha\beta - 1$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) $A = -(\alpha - 1)(\beta - 1)$

ii) $\kappa < \lambda$

B) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu + \nu)x + \mu\nu = 0 \quad \langle 1 \rangle$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\langle 1 \rangle$ έχει μία τουλάχιστον (πραγματική) λύση για οποιουδήποτε $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Πότε έχει μία (διπλή) λύση;

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\langle 1 \rangle$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - 4000x^2 + 2040 \cdot 1960 = 0$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των ριζών της.

ΘΕΜΑ 3ο

A) Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ και η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$.

B) i) Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \geq 2\sqrt[4]{\alpha\beta}$ και η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{(x^2 - 1)^2} + \sqrt{(x + 1)^2} = 2\sqrt[4]{(x - 1)^2(x + 1)^4}$ $\langle 1 \rangle$.

Γ) Έστω ρ_1, ρ_2 η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα λύση της εξίσωσης $\langle 1 \rangle$.

Να βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει: $\rho_1 \leq \rho_2 x + \rho_1 \sqrt{x} + \rho_1 < \rho_2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha = \frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$, $\beta = 5 + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

και $\gamma = 5\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

i) $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ και ii) $(1 - \sqrt{3})^3 = 10 - 6\sqrt{3}$.

B) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις α και γ .

Γ) Για $\alpha = 2(\sqrt{2} + 1)^2$ και $\gamma = 5(1 + \sqrt{3})$:

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha < \gamma$ και ότι ο β είναι ο αριθμητικός μέσος των α και γ .
- ii) Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ τέτοιος ώστε $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, τότε να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $x - \frac{1}{x}$ και $x^6 - \frac{1}{x^6}$ και να αποδείξετε ότι:
- $$\alpha + \gamma > \left| x^6 - \frac{1}{x^6} \right| > \left| x - \frac{1}{x} \right| > \alpha - \gamma.$$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \leq 5 \\ x-6, & x > 5 \end{cases}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι οι τιμές $f(-4), f(10), f(2)$ αποτελούν (με αυτή τη σειρά) διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$.

B) Να βρείτε τον $a \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $M(3, (a-2021)^{2021})$ του επιπέδου.

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 2x - 4, x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την παραβολή $y = -x^2 + 2x - 4$.

ii) Αν $A(0, -4)$ και $B(1, -3)$ τα ζητούμενα σημεία του προηγούμενου ερωτήματος, να εξηγήσετε γιατί τα σημεία $A(0, -4), B(1, -3), O(0, 0)$ δεν είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

Δ) i) Να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)| = f(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\sqrt{26} + \sqrt{35}}{2}\right) < 0$.

ΘΕΜΑ 6ο

A) Θεωρούμε την αλγεβρική παράσταση:

$$K = -\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 + \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma) - 2\alpha\beta\gamma, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι: $K = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma \text{ ή } \beta = \gamma + \alpha \text{ ή } \gamma = \alpha + \beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$2020^3 + 2021^3 + 1 - 2020 \cdot 2021 \cdot 4041 - 2020 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2022 + 4040 \cdot 2021$$

B) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ xy = \frac{yz}{4} = \frac{zx}{2} = 2 \\ 3xy + zx = 10 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι: $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.

Γ) Για $x = 1, y = 2, z = 4$:

i) Να αποδείξετε ότι οι x, y, z αποτελούν (με αυτή τη σειρά) διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, έστω (α_v) , της οποίας να βρείτε τον γενικό όρο θεωρώντας ότι:

$$\alpha_1 = x.$$

ii) Να αποδείξετε ότι οι xy, zx, yz αποτελούν (με αυτή τη σειρά) διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, έστω (β_v) , της οποίας να βρείτε τον γενικό όρο θεωρώντας ότι:

$$\beta_1 = xy.$$

iii) Για τις γεωμετρικές προόδους των προηγούμενων ερωτημάτων, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\alpha_v \neq \beta_v \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}, v \geq 1.$$

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

B) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(x) = x^2$ και ii) $f(x) = x$ και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

Γ) i) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

ii) Για $\alpha > 0$ έστω x_1 η αρνητική και x_2 η θετική λύση της προηγούμενης εξίσωσης.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $|x_1|$ και x_2 .

Δ) Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = -x + 12$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση: $y = -x + 12$.

ΘΕΜΑ 8ο

A) Δίνεται η (σταθερή) ακολουθία: $3, 3, 3, 3, \dots, 3, \dots$

i) Να εξετάσετε αν η ακολουθία αποτελεί αριθμητική πρόοδο και, αν ναι, να αναφέρετε τον πρώτο όρο, τη διαφορά και τον γενικό της όρο.

ii) Να εξετάσετε αν η ακολουθία αποτελεί γεωμετρική πρόοδο και, αν ναι, να αναφέρετε τον πρώτο όρο, τον λόγο και τον γενικό της όρο.

B) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους αριθμούς: $\alpha = (x - 3)^2$, $\beta = x^2 - 9$, $\gamma = (x + 3)^2$.

i) Να βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι α, β, γ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι α, β, γ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

iii) Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους α, β, γ .

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{x^2 - 9 + 36}{[(x-3) \cdot (x+3)]^2} = 0$.

ΘΕΜΑ 9ο

A) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $0 \leq \left| x + \frac{1}{x} \right| < 2$.

B) i) Να βρεθούν όλοι οι $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει: $1 < |x+5| < 5$ $\langle 1 \rangle$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x-3| = x^2 - x$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν οι λύσεις της επαληθεύουν τη σχέση $\langle 1 \rangle$.

Γ) Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης: $|x + \sqrt[4]{17}| + |-2-x| = -x$

με $\rho_1 < \rho_2$.

Δ) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η συνεπαγωγή: αν οι αριθμοί $|\alpha|$ και $|\beta|$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$, τότε $|\alpha^3 - \beta^3| \leq 9$.

ΘΕΜΑ 10ο

A) Θεωρούμε τα σημεία: $M(\alpha^2 - 16, -\alpha^2 - 2\alpha + 3)$ και $N(\alpha + 10, -\alpha^2 + 2\alpha - 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε όλους τους $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο M να βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.
- ii) Να βρείτε όλους τους $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο M να ανήκει στον άξονα $x'x$ ή στον άξονα $y'y$. Υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο M να είναι η αρχή των αξόνων;
- iii) Να δείξετε ότι το σημείο N δεν μπορεί να βρίσκεται στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο.
- iv) Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ για τον οποίο τα σημεία M και N είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

B) Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4, & -3 \leq x < -1 \\ -x + 6, & -1 \leq x < 0 \\ x - 2, & 1 < x \leq 4 \end{cases}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- ii) Να βρείτε όλους τους $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η τετμημένη του σημείου $N(\alpha + 10, -\alpha^2 + 2\alpha - 5)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- iii) Για τη μεγαλύτερη τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο N .

ΘΕΜΑ 11ο

Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \left(\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}x} \right)^2$ και τα σημεία $K(\alpha + 4, -\alpha - 1)$,

$\Lambda(2\alpha - 7, \alpha^2 + 2\alpha - 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- A) Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ για τον οποίο τα σημεία K, Λ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία K, Λ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$;

Β) Για $\alpha = 1$:

i) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$ και την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία $Κ, Λ$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι παράλληλη στην ευθεία $ΚΛ$ και διέρχεται από το σημείο $M(-5, 8)$.

Γ) Αν $\varepsilon: y = -\frac{2}{5}x + 6$, να προσδιορίσετε το σύνολο A και στη συνέχεια να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τα οποία **δεν** βρίσκονται πάνω από την ευθεία ε .

ΘΕΜΑ 12ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\lambda x^2 + 2(1-\lambda)x - \lambda + \frac{3}{\lambda}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

και $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \alpha^2 + 2\alpha - 2}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνονται, επίσης, τα σημεία:

$A(2, 2)$, $B(2, 4)$, $\Gamma(5, 4)$ και $\Delta(5, 2)$.

A) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2, 2)$, $B(2, 4)$, $\Gamma(5, 4)$ και $\Delta(5, 2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Β) Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το $\mathbb{R}$.

Γ) Για $\alpha = -3$:

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , να απλοποιήσετε τον τύπο της και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii) Να προσδιορίσετε όλα τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου με την εξής ιδιότητα: το $M(x, y)$ ανήκει στη C_f και βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$.

Δ) Να βρείτε όλους τους $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, ώστε:

- i) Η τεταγμένη του κοινού σημείου της C_g με τον άξονα $y'y$ να ισούται με 2. Ποιο είναι το σημείο αυτό;
- ii) Η C_g να έχει με τον άξονα $x'x$ δύο (διαφορετικά) σημεία τομής τα οποία να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Ποια είναι τα σημεία αυτά;
- iii) Η C_g να βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε) Να αποδείξετε ότι: αν $\lambda \geq 2$, τότε η C_g βρίσκεται κάτω από την C_f για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $f(x) = |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 3)x - \lambda + \frac{17}{4} = 0$ $\langle 1 \rangle$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Α) Να βρείτε όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\langle 1 \rangle$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\langle 1 \rangle$ να έχει πραγματικές ρίζες οι οποίες να είναι:

i) αρνητικές, ii) αντίστροφες, iii) αντίθετες, iv) ετερόσημες

Γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ οι ρίζες της εξίσωσης $\langle 1 \rangle$. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίον ισχύει ότι: $d(x_1, x_2) = -\lambda$.

Δ) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: $x^2 + \left(\frac{|\alpha|}{\alpha^2 + 1} - 3 \right)x - \frac{|\alpha|}{\alpha^2 + 1} + \frac{17}{4} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 14ο

A) i) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha + \beta)^4 - [2(\alpha + \beta)]^2 \alpha \beta + 2(\alpha \beta)^2.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$\frac{-\left(\frac{-\sqrt{11}-1}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{11}-1}{2}\right)^4}{51}$$

B) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x^2}{x^3} + x\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$, $g(x) = \frac{-|x|}{|x-1| - |x|} - 1$ και

$$h(x) = 4f(4)x^2 + \left(5 + g\left(\frac{1}{3}\right)\right)x + f(-1) + g(-1) - 15, x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = \frac{1}{x} + x\sqrt{(x+1)(4-x)}$, $x \in [-1, 0) \cup (0, 4]$ και

$g(x) = \frac{|x-1|}{|x| - |x-1|}$, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα

σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii) Να δείξετε ότι: $h(x) = x^2 + 3x - 18$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $h(x) \geq -\frac{81}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΘΕΜΑ 15ο

A) Δίνεται η παράσταση: $K = \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{2}{\beta}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $-2 \leq \alpha \leq 3$ και $-8 < \beta < -4$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1}{2} < K < \sqrt{10} - \frac{1}{4}$

ii) Δεν υπάρχουν τιμές των α, β ώστε να ισχύει: $K = \sqrt{6} + \frac{7}{4}$.

B) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί: $x = \sqrt[4]{16\sqrt{3^{59}}}\sqrt[5]{3^2}\sqrt[4]{\frac{1}{3^2}}\sqrt[4]{3}$ και $y = 5^{11} \cdot 20^5 \cdot 35^3 \cdot 2^9$.

i) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού y .

ii) Να αποδείξετε ότι το πρώτο ψηφίο του αριθμού y ισούται με τον αριθμό x .

ΘΕΜΑ 16ο

Θεωρούμε την εξίσωση: $\lambda^2\sqrt{8x} - \sqrt{2x} = \lambda\sqrt{2} + 1$ $\langle 1 \rangle$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

A) Να λύσετε την εξίσωση $\langle 1 \rangle$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να λύσετε την εξίσωση $\langle 1 \rangle$ για $\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \frac{-2\sqrt[3]{2} + 2 - \sqrt{2}}{2}$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός 1 να είναι λύση της εξίσωσης $\langle 1 \rangle$.

Δ) Αν λ_1, λ_2 είναι οι τιμές που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την

εξίσωση:
$$\frac{1}{2x - x^2} + \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4}}{(2x - x^2)^2} = \frac{3}{(2x - x^2)^3}.$$

ΘΕΜΑ 17ο

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$ και θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{-2000x - 3000}, \quad g(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{-(81x^4 - 1) \cdot \frac{1 - 27x^3}{1 + 9x^2}}{25}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης h και να υπολογίσετε την τιμή $h(2)$.

B) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

Γ) Να βρείτε την τιμή του α , να απλοποιήσετε τους τύπους των f και g και να δείξετε ότι ισχύει: $f(-13999) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = h(2)$.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση $x^{15} - \beta^2 x^7 = x^{\gamma^3} - \beta^2$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\left|(\gamma^6 - 64)^2 + (\beta^5 + 343)^2\right| + \left|\beta\gamma + g\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right| = h\left(-\frac{1}{3}\right).$$

ΘΕΜΑ 18ο

Θεωρούμε την παράσταση $\Pi = -xy - 3 \cdot \frac{x}{y} - y^3 - 9$, όπου $x \in [1, 4]$, $y \in [-3, -2]$ και τη

γεωμετρική πρόοδο (α_v) με $\alpha_5 = -\frac{1}{32}$ και $\alpha_8 = \frac{1}{256}$.

A) Να αποδείξετε ότι: $\Pi \in [2, 36]$.

B) Να δείξετε ότι: $\alpha_v = \left(-\frac{1}{2}\right)^v$, $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των v πρώτων όρων της γεωμετρικής πρόόδου (α_v) είναι αρνητικός αριθμός για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο v .

Δ) Έστω x_0 το κέντρο του διαστήματος $[2, 36]$ και (β_n) η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = 10 - 3n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο της όρο β_1 και τη διαφορά της ω .

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του θετικού ακέραιου n για τον οποίο ο γενικός όρος της (β_n) ξεπερνάει τον πρώτο όρο της (α_n) .

iii) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από την (β_n) ώστε το άθροισμά τους να ισούται με τον αριθμό: $-6x_0$.

iv) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί β_4 και $\sqrt{6 - \sqrt{20}} - \sqrt{6 + \sqrt{20}}$ είναι ίσοι ακέραιοι.

ΘΕΜΑ 19ο

A) Έστω οι συναρτήσεις $F(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ και $G(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων F και G . Τι παρατηρείτε;

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $F(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}, & x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1 \\ (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}, & -1 < x < 1 \end{cases}$.

B) Υποθέτουμε ότι τρεις φίλοι, ο Αντρέας, ο Βασίλης και ο Γιάννης κινούνται πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = -2x - 6$, $x \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα. Επίσης, ως μονάδα των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος θεωρούμε το 1 μέτρο.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο του επιπέδου στο οποίο ο Αντρέας και ο Βασίλης μπορούν να συναντηθούν, το οποίο σημείο και να προσδιορίσετε.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου στο οποίο ο Βασίλης και ο Γιάννης μπορούν να συναντηθούν.

iii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο Αντρέας είναι ασθενής της μεταδοτικής νόσου COVID-19, ενώ ο Βασίλης και ο Γιάννης δεν έχουν ανοσία έναντι της συγκεκριμένης ασθένειας και κυκλοφορούν χωρίς προστατευτικά μέτρα. Να αποδείξετε ότι ενώ ο Βασίλης είναι πιθανό να νοσήσει, ο Γιάννης δεν κινδυνεύει να μολυνθεί από τον Αντρέα ή τον Βασίλη. (Για τη μη μετάδοση της νόσου, θεωρείστε ως απόσταση ασφαλείας μεταξύ δύο ατόμων την απόσταση άνω των 1,5 μέτρων.).

ΘΕΜΑ 20ο

Δίνεται η εξίσωση $(x^2 - 9|x|)^2 - 4(x^2 - 9|x|) = 252$ $\langle 1 \rangle$ και η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + \beta}{x + \alpha - 3\sqrt{2} + 1}, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \geq 1.$$

A) Να λυθεί η εξίσωση $\langle 1 \rangle$.

B) Να δείξετε ότι ισχύει: $3 - 2\sqrt{2} > 0$.

Γ) Να βρεθούν οι α, β ώστε να ισχύει $d(\sqrt{\alpha^2}, 1) = \sqrt{27 - 18\sqrt{2}} - 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1, \gamma + 1)$ όπου γ η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης $\langle 1 \rangle$.

Δ) Για $\alpha = 3\sqrt{2} - 3$ και $\beta = -3$:

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να σχολιάσετε αν αποτελεί ευθεία γραμμή.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΛΕΥΤΕΡΗΣ