

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

- A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

- A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.»

- α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(Μονάδα 1)

- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.

(Μονάδες 3)

Μονάδες 4

- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

- β)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

Μονάδες 8

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad x \in [-1, +\infty)$, τότε:

B3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

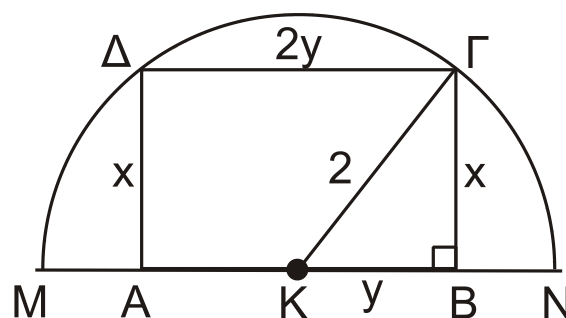
Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}, \quad \text{όπου } (f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Γ**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $MN = 4$ cm. Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις x cm και $2y$ cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$.

Μονάδες 6

- Γ2.** Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

- Γ3.** Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (E(x) - 2\sqrt{3})e^x, \quad x \in (0, 2)$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$x \cdot f(x) = \sin x - 1.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 3

- Δ2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Μονάδες 4

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2020 \cdot \sin x - x = 2020$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$F(0) = \rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος

(Δ4). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\pi \cdot |F(x)| \leq 2 \cdot |x|.$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ