

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

Μονάδες 12

B3. Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad x \in [-1, +\infty)$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{και}$$

$$g(x) = e \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty).$$

Η ευθεία $(\varepsilon): y = ex$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$xf(x) = \sin x - 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$x \cos x + \sin x \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2020 \sin x - x = 2020$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ