Συναρτήσεις — Μαθήματα 1-6

Όλες οι διαφάνειες για τις συναρτήσεις

Μάρκος Βασίλης — aftermathsgr.wordpress.com

29 Αυγούστου 2020

Περιεχόμενα

1 Μάθημα 1°

2 Μάθημα 2°

3 Μάθημα 3°

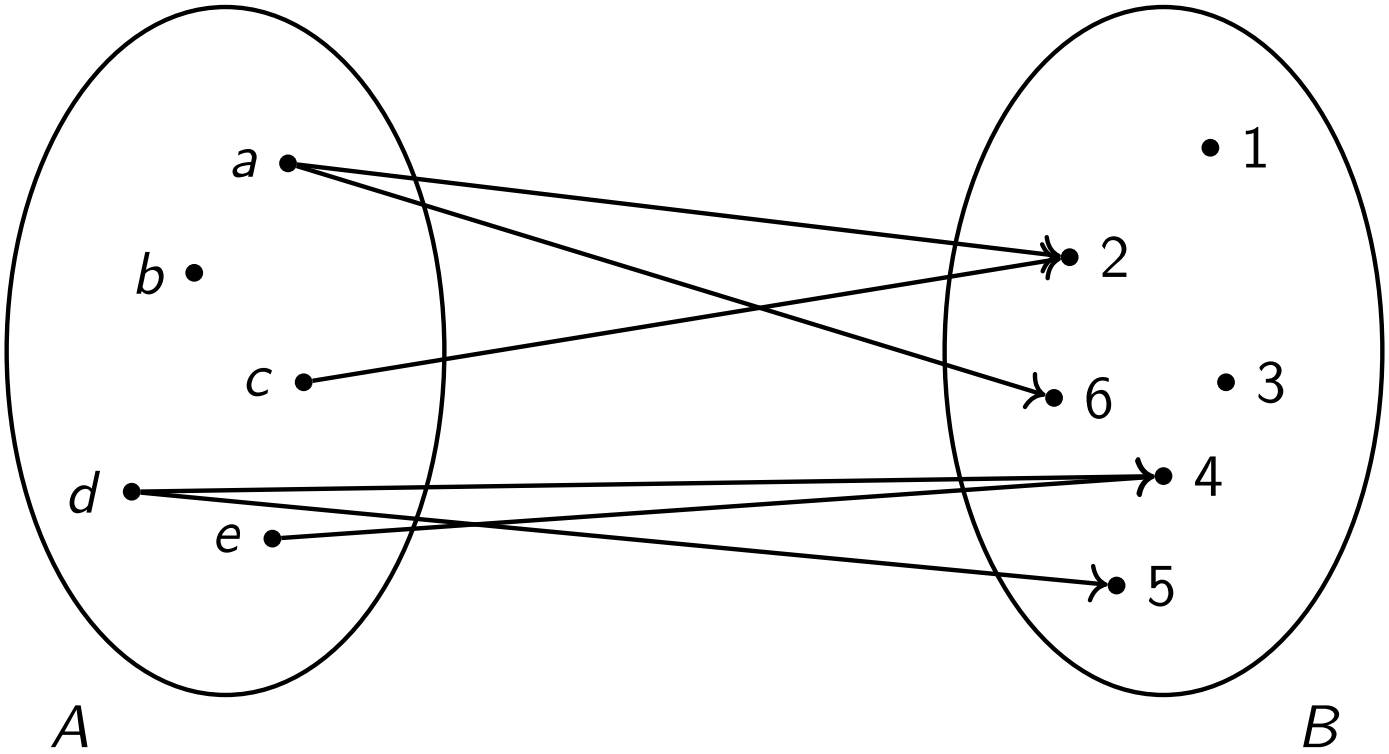
4 Μάθημα 4°

5 Μάθημα 5°

6 Μάθημα 6°

Τι είναι μια αντιστοίχιση;

Γενικά, ως αντιστοίχιση $f : A \to B$ ορίζουμε μία οποιαδήποτε συσχέτιση (f) στοιχείων ενός συνόλου A με ένα άλλο σύνολο B.



Παρατηρήσεις/Σχόλια

- Δε χρειάζεται όλα τα στοιχεία του συνόλου A να αντιστοιχίζονται σε κάποιο στοιχείο του συνόλου B (π.χ. το b δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B).
- Ανάλογα, δε χρειάζεται ούτε όλα τα στοιχεία του συνόλου B να «προέρχονται» από κάποιο στοιχείο του συνόλου A (π.χ. τα 1 και 3 δεν έχουν βέλη να καταλήγουν σε αυτά).
- Μπορεί ένα στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε πάνω από ένα στοιχεία του B (π.χ. το a αντιστοιχίζεται στα 2 και 6).
- Μπορεί ένα στοιχείο του B να «προέρχεται» από πάνω από ένα στοιχεία του A (π.χ. το 4 από τα d και e).

Ο ορισμός της συνάρτησης

Ορισμός (Συνάρτηση)

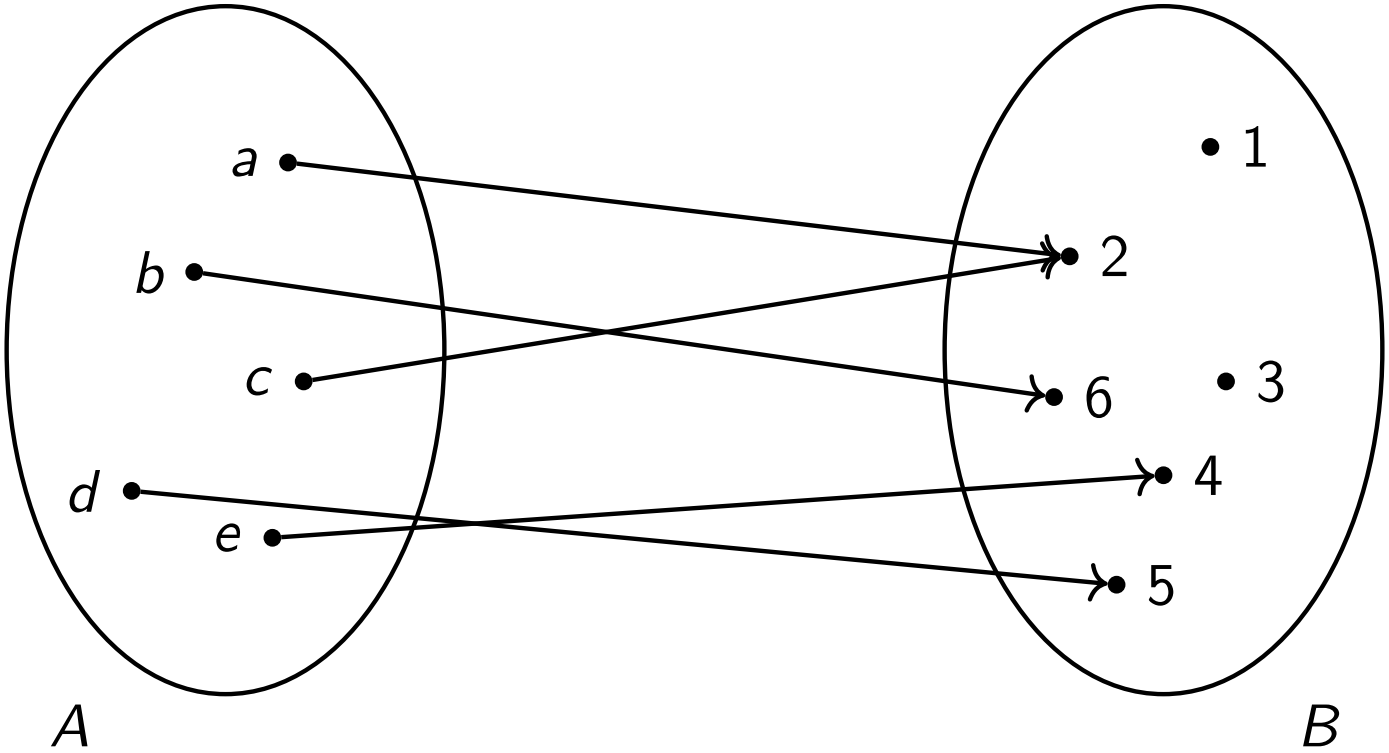
Μία αντιστοίχιση $f : A \to B$ ονομάζεται συνάρτηση αν αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο $a \in A$ σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο $b \in B$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο το συμβολίζουμε με $f(a)$ και το καλούμε **τιμή** της συνάρτησης f στο a. Επίσης, το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με D_f, ενώ το σύνολο B **πεδίο τιμών** ή **σύνολο αφίξεως** της f.

Έτσι, η αντιστοίχιση που είδαμε προηγουμένως δεν είναι συνάρτηση, αφού:

- Το b δεν αντιστοιχίζεται σε κάνένα στοιχείο του B.
- Τα a και d αντιστοιχίζονται σε δύο στοιχεία του B.

Παραδείγματα

Η παρακάτω αντιστοίχιση είναι συνάρτηση (εξηγήστε γιατί).



Παραδείγματα

Οι παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις:

- Η αντιστοίχιση κάθε Α.Φ.Μ. στον κάτοχό του.
- Η αντιστοίχιση κάθε παιδιού στη μητέρα του.
- Η αντιστοίχιση κάθε αριθμού στο τετράγωνό του.

Οι παρακάτω, όμως, δεν είναι:

- Η αντιστοίχιση κάθε κλειδαριάς στα κλειδιά που την ξεκλειδώνουν.
- Η αντιστοίχιση κάθε ενήλικα στα παιδιά του.
- Η αντιστοίχιση κάθε αριθμού a στους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει ότι $x^2 = a$.

Συμβολισμός

Εκτός από το να περιγράψουμε λεκτικά μία συνάρτηση, χρησιμοποιούμε και διάφορους συμβολισμούς. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μιλήσουμε για τη συνάρτηση f, που αντιστοιχίζει κάθε πραγματικό αριθμό στο τετράγωνό του, μπορούμε να γράψουμε:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$,
- $f(x) = x^2$ με $x \in \mathbb{R}$,
- $x \overset{f}{\mapsto} x^2$, $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Προσοχή!

Χρησιμοποιούμε σαν σύμβολο ένα βέλος με ίσια ουρά ($\mapsto$) και όχι ένα απλό βέλος ($\to$) όταν μιλάμε για συναρτήσεις!

Πεδίο τιμών

Παρατηρήστε ότι στους παραπάνω συμβολισμούς δε φαίνεται πουθενά ποιο είναι το πεδίο τιμών της f (το σύνολο B, όπως είναι γραμμένο στον ορισμό). Αυτό γίνεται διότι, τις περισσότερες φορές, είναι αυτονόητο ποιο είναι αυτό το σύνολο (π.χ. αν αντιστοιχίζουμε κλειδαριές σε κλειδιά, είναι σαφές ότι το πεδίο τιμών είναι το σύνολο των κλειδιών αυτού του πλανήτη).

Στα πλαίσια της ύλης μας, θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, οπότε, όλες **οι συναρτήσεις μας θα έχουν ως πεδίο τιμών το** $\mathbb{R}$, συνεπώς, δε θα γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε αυτό και θα θεωρούμε πάντα ότι είναι όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$.

Εξαρτήσεις...

Στην έκφραση $y = f(x)$ εμφανίζονται δύο μεταβλητές, οι x και y. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι δεν έχουν και οι δυο τους το ίδιο «status» μέσα στη σχέση. Αναλυτικότερα:

- Η x παίρνει ελεύθερα οποιαδήποτε τιμή στο D_f θέλουμε. Γι' αυτόν το λόγο θα την καλούμε **ανεξάρτητη μεταβλητή**.
- Η y παίρνει όποια τιμή της «πει» η x, μέσω της f, επομένως, δεν κινείται ελεύθερα, αλλά εξαρτάται από ην x. Γι' αυτόν τον λόγο, θα την καλούμε **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Ερώτηση

Αν πάρουμε π.χ. τη συνάρτηση $y = x^2$ (δηλαδή $f(x) = x^2$ σε αυτήν την περίπτωση), τότε, αν κάποιος μας δώσει μία τιμή της y, π.χ. $y = 4$, τότε η x μπορεί να είναι ± 2, επομένως εξαρτάται, κατά κάποιον τρόπο, από την y. Γιατί, λοιπόν, δεν λέμε ότι και οι δύο είναι εξαρτημένες;

Παραδείγματα εξαρτήσεων

- Στην παρακάτω σχέση:

$$x^2 + 2y^2 = 4,$$

καμμία από τις δύο μεταβλητές δεν μπορεί να περιγραφεί σαν συνάρτηση της άλλης (γιατί;).

- Στην παρακάτω σχέση:

$$2x + 4y^2 = 1,$$

η y δεν μπορεί να περιγραφεί σαν συνάρτηση της x, ωστόσο, η x μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση της y. Πράγματι, λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς x, έχουμε:

$$2x + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - 4y^2}{2},$$

επομένως, $x = f(y) = \dfrac{1 - 4y^2}{2}$.

Ισότητα συναρτήσεων

Ορισμός (Ισότητα συναρτήσεων)

Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι ίσες και θα γράφουμε $f = g$, αν:

- $A = B$ (έχουν ίδιο πεδίο ορισμού) και,
- $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ (κάνουν το ίδιο πράγμα).

Επομένως, δύο συναρτήσεις είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο «τύπο» — μπακάλικα, ο τύπος είναι μία έκφραση με μεταβλητές και γνωστές συναρτήσεις (ημ, συν, ln κ.λπ.).

Παραδείγματα

- Οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 3$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2x + 3$ με $x \in [-4, 6]$ **δεν είναι ίσες**, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ με $x \in (2, +\infty)$ και $g(x) = x + 2$ με $x \in (2, +\infty)$ είναι ίσες αφού έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και, για κάθε $x \in (2, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x + 2 = g(x).$$

- Οι συναρτήσεις $f(x) = |x|$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι ίσες (γιατί;).

Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Πολλές φορές, όταν δε μας απασχολεί κάποιο συγκεκριμένο φαινόμενο αλλά μελετάμε μία συνάρτηση γενικά, προτιμούμε να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης **το ευρύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο αυτή έχει νόημα**.

Έτσι, αν η συνάρτηση $v(t) = 5t^2$ εκφράζει την ταχύτητα ενός αντικειμένου που πέφτει ελεύθερα στο βαρυτικό πεδίο, θα επιλέξουμε σαν πεδίο ορισμού της f το διάστημα $[0, +\infty)$. Αν όμως μας απασχολεί γενικά η πολυωνυμική συνάρτηση $v(t) = 5t^2$, χωρίς κάποιο (φυσικό) πλαίσιο, τότε θα επιλέξουμε σαν πεδίο ορισμού της όλο το $\mathbb{R}$.

Από εδώ και στο εξής, όποτε μία συνάρτηση δίνεται μόνο μέσω του «τύπου» της, θα εννοείται ότι έχει ως πεδίο ορισμού το **ευρύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα**.

Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε όλους τους περιορισμούς που πρέπει να λαμβάνουμε υπ' όψιν όταν αναζητούμε το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης που μας δίνεται μόνο μέσω του τύπου της.

Τύπος	**Περιορισμός**
$\frac{1}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\ln g(x)$	$g(x) > 0$
$g(x)^{h(x)}$	$g(x) > 0$

Προσοχή!

Όταν χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψιν δύο ή περισσότερους περιορισμούς, τότε συναληθεύουμε τις λύσεις που προκύπτουν.

Παραδείγματα

- Για το το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ έχουμε τον περιορισμό:

$$x^2 - x - 2 \neq 0.$$

Έχουμε:

$$x^2 - x - 2 = 0 \overset{\Delta=9}{\Longleftrightarrow} x = -1 \text{ ή } x = 2,$$

επομένως, έχουμε $x \neq -1$ και $x \neq 2$, οπότε:

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty).$$

- Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^2 - \text{ημ}\, x$ είναι το $D_f = \mathbb{R}$, αφού δεν έχουμε καμμία από τις παραστάσεις που δίνουν περιορισμούς.

Παραδείγματα

- Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln(x^2-1)$ έχουμε τους εξής περιορισμούς:
  - $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$,
  - $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$, οπότε

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Συναληθεύοντας τους δύο περιορισμούς έχουμε ότι:

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, 2].$$

Παραδείγματα

- Για το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{(3-x)^{\ln x}}{x-2}$, έχουμε τους εξής περιορισμούς:
  - $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$,
  - $x > 0$,
  - $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

  Συναληθεύοντας τους περιορισμούς έχουμε ότι:

$$D_f = (0, 2) \cup (2, 3).$$

Τι είναι το σύνολο τιμών;

Ορισμός (Σύνολο τιμών)

Αν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση τότε ορίζουμε ως **σύνολο τιμών της** f και συμβολίζουμε με $f(A)$ το σύνολο όλων των $y \in B$ τα οποία «προέρχονται» από κάποιο $x \in A$ μέσω της f, δηλαδή:

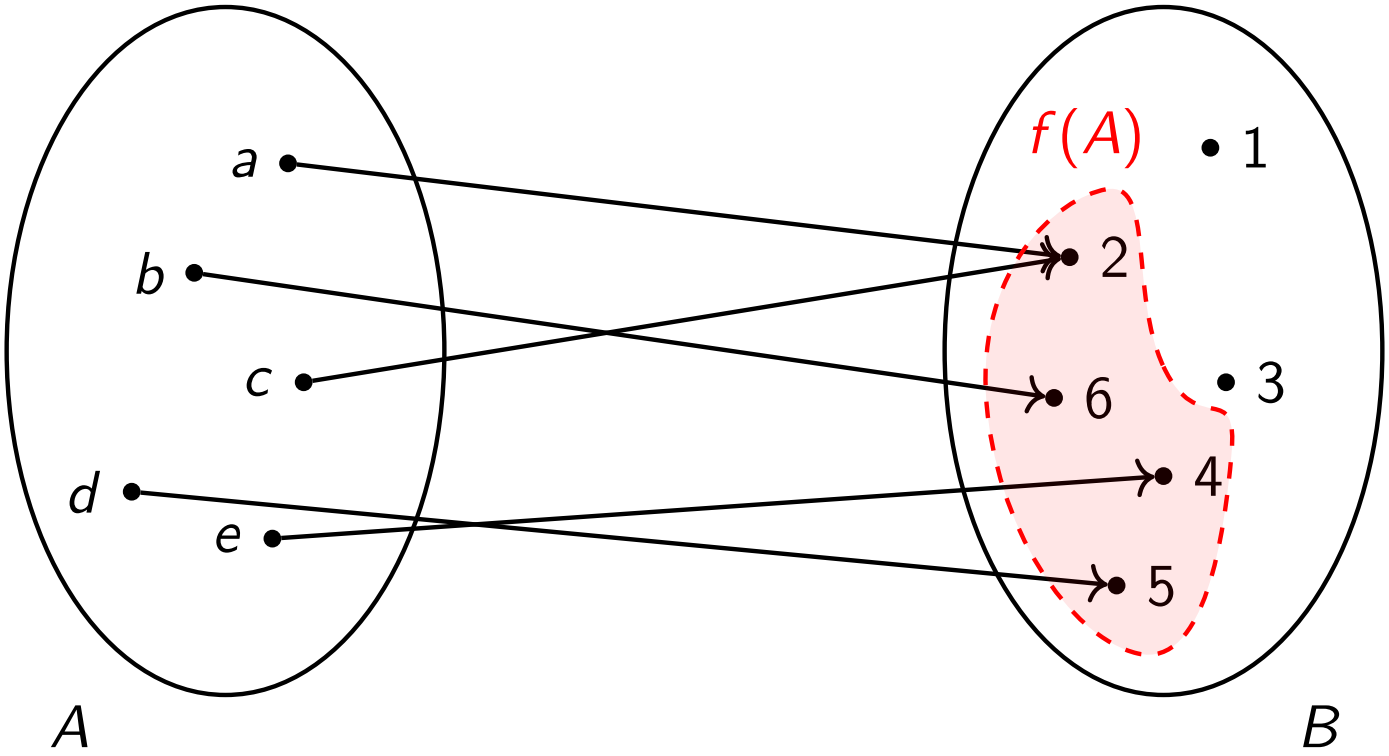
$$f(A) = \{y \in B \mid \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y\}.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$ (γιατί;) ενώ η συνάρτηση $g(x) = x^2$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει ως σύνολο τιμών το διάστημα $[0, +\infty)$, αφού κάθε μη αρνητικός αριθμός είναι το τετράγωνο κάποιου αριθμού (ενώ κανένας αρνητικός αριθμός δεν είναι το τετράγωνο κάποιου αριθμού).

Σύνολο τιμών ≠ Πεδίο τιμών

Προσοχή!

Το σύνολο τιμών αποτελείται **ακριβώς** από τις τιμές της f ενώ το πεδίο τιμών μπορεί να περιέχει και άλλα στοιχεία πέρα από αυτές!



Εύρεση συνόλου τιμών

Δυστυχώς, δεν υπάρχει κάποιος αρκετά απλός τρόπος για να βρίσκουμε το σύνολο τιμών οποιασδήποτε συνάρτησης, επομένως, τουλάχιστον προς το παρόν, θα χρειαστεί να περιοριστούμε σε κάποιες απλές συναρτήσεις με «εύκολα» πεδία ορισμού. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2x + 4$, με $x \in [-2, 3]$, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f ξεκινάμε από τη σχέση $-2 \leq x \leq 3$ και «χτίζουμε» τον τύπο της f:

$$-2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 2x + 4 \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 10,$$

επομένως:

$$f([-2, 3]) = [0, 10].$$

Παραδείγματα

- Για το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 4x^2 + 3$, $x \in (1, 3)$ έχουμε:

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 9 \Leftrightarrow 4 < 4x^2 < 36 \Leftrightarrow 7 < 4x^2 + 3 < 39,$$

δηλαδή $7 < f(x) < 39$. Επομένως:

$$f((1, 3)) = (7, 39).$$

Προσοχή!

Για να υψώσουμε μία ανιστότητα στο τετράγωνο πρέπει όλα τα μέλη της **να έχουν το ίδιο πρόσημο!** Αν είναι όλα θετικά τότε δεν αλλάζουμε φορά, ενώ, αν είναι όλα αρνητικά, αλλάζουμε φορά. Το ίδιο ισχύει επίσης και για τις άλλες άρτιες δυνάμεις $(4, 6, \ldots)$.

Παραδείγματα

- Για το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x$ με $x \in [-2, 1]$ έχουμε:

$$-2 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -8 \leq x^3 \leq 1 \quad (1)$$

$$-2 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), παίρνουμε $-10 \leq x^3 + x \leq 2$, επομένως, $f([-2, 1]) = [-10, 2]$.

Προσοχή!

Για να υψώσουμε μία ανισότητα στον κύβο ή σε κάποια άλλη περιττή δύναμη $(5, 7, \ldots)$ δε χρειάζεται να έχουν όλα τα μέλης το ίδιο πρόσημο, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση.

Ένα «κακό» παράδειγμα...

Στο προηγούμενο παράδειγμα, «χτίσαμε» τον τύπο της f προσθέτοντας κατά μέλη δύο απλούστερες ανισότητες. Αν όμως εργαστούμε παρόμοια για την $f(x) = x + \sqrt{1-x}$, $x \in [0,1]$, έχουμε:

$$0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -1 \Leftrightarrow 1 \geq 1 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1 \tag{4}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4), παίρνουμε ότι $0 \leq f(x) \leq 2$, επομένως, θα έλεγε κανείς ότι $f([0,1]) = [0,2]$. Παρατηρούμε, όμως, ότι δεν υπάρχει $x \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$ (γιατί;), επομένως δεν μπορεί να είναι αυτό το σύνολο τιμών της f. Συνεπώς, ο παραπάνω τρόπος δεν μας δίνει πάντοτε ορθά αποτελέσματα (μπορείτε να εξηγήσετε γιατί εδώ δεν πήραμε το ζητούμενο, ενώ στην προηγούμενη περίπτωση το πήραμε;).

Τι είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Ορισμός (Γραφική παράσταση)

Αν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, τότε η **γραφική παράσταση**, C_f, της f είναι το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, f(x))$, με $x \in A$, δηλαδή:

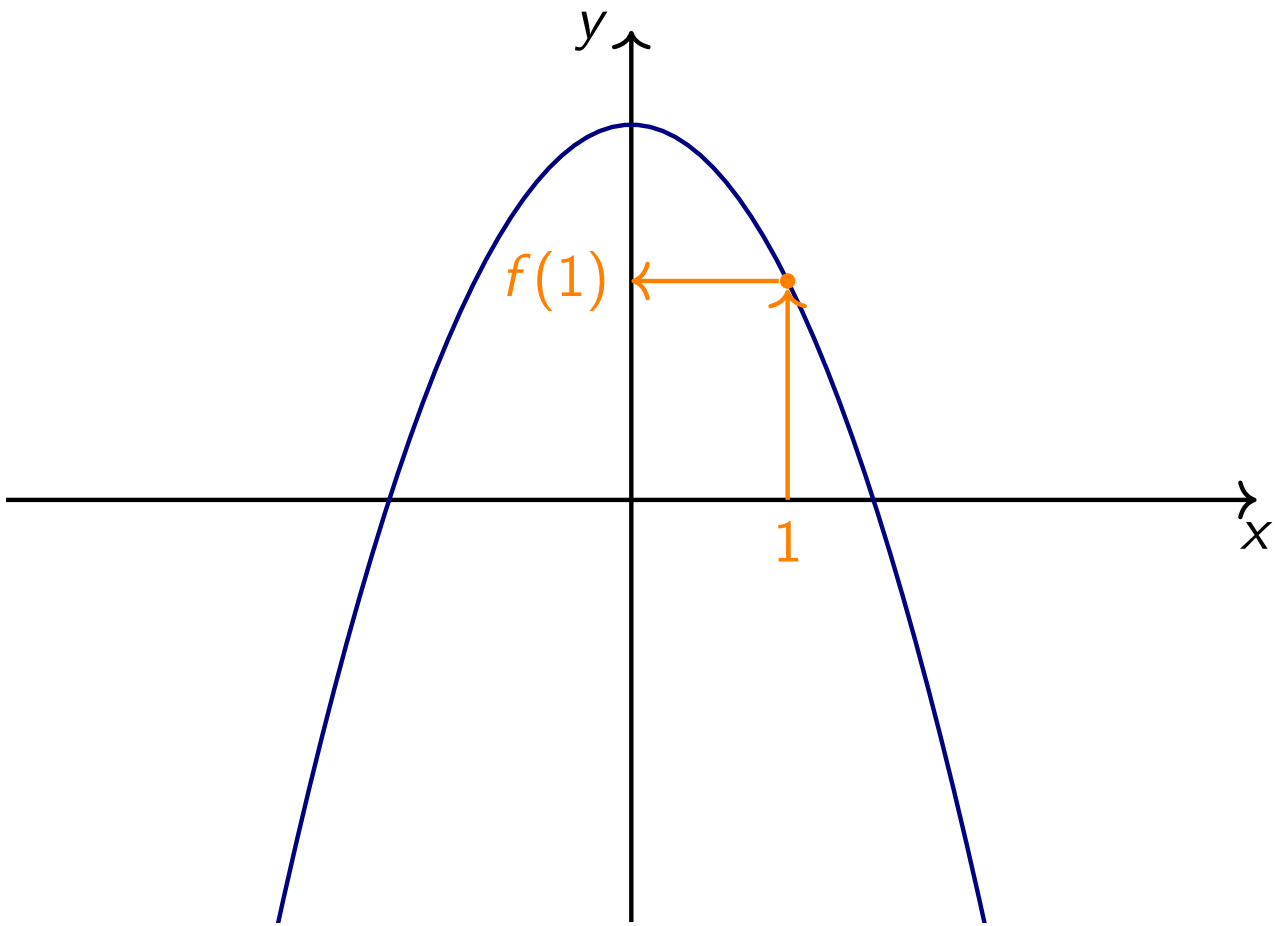
$$C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Για παράδειγμα, αν έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3 - x^2$, τότε:

- Για να βρούμε ένα σημείο της γραφικής της παράστασης, επιλέγουμε ένα $x \in D_f = \mathbb{R}$, π.χ. το 2, και υπολογίζουμε το $f(x) = f(2) = 3 - 2^2 = -1$. Επομένως, το σημείο $A(2, -1) \in C_f$.
- Για να ελέγξουμε αν το σημείο $B(-1, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, υπολογίζουμε το $f(-1) = 3 - (-1)^2 = 3 - 1 = 2$ και εξετάζουμε αν είναι ίσο με το 3. Εφ' όσον $f(-1) = 2 \neq 3$, το σημείο B **δεν** ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

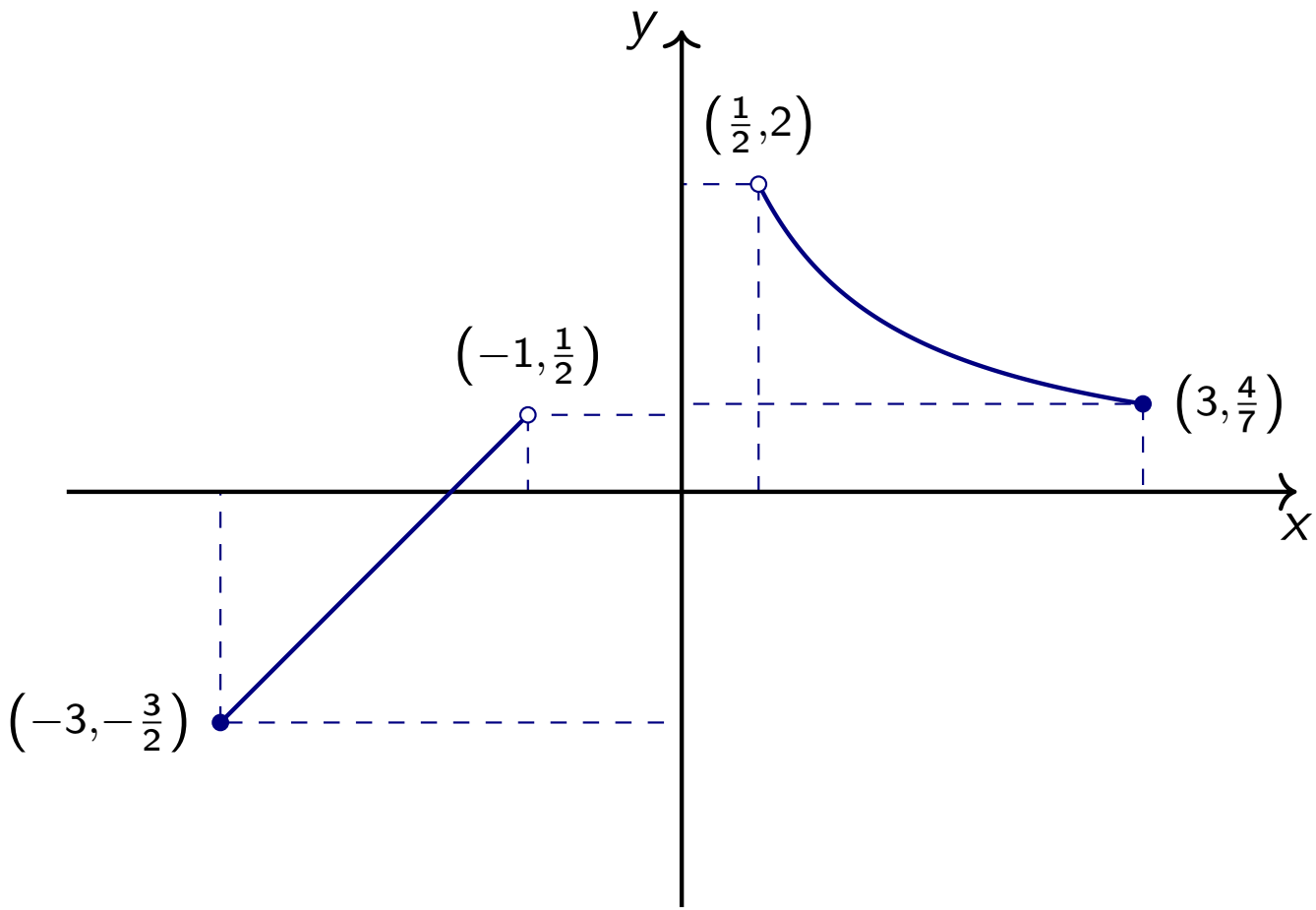
Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - x^2$

Παίρνοντας πολλά σημεία της μορφής $(x, f(x))$, με $x \in \mathbb{R}$, σχηματίζεται η γραφική παράσταση της f:



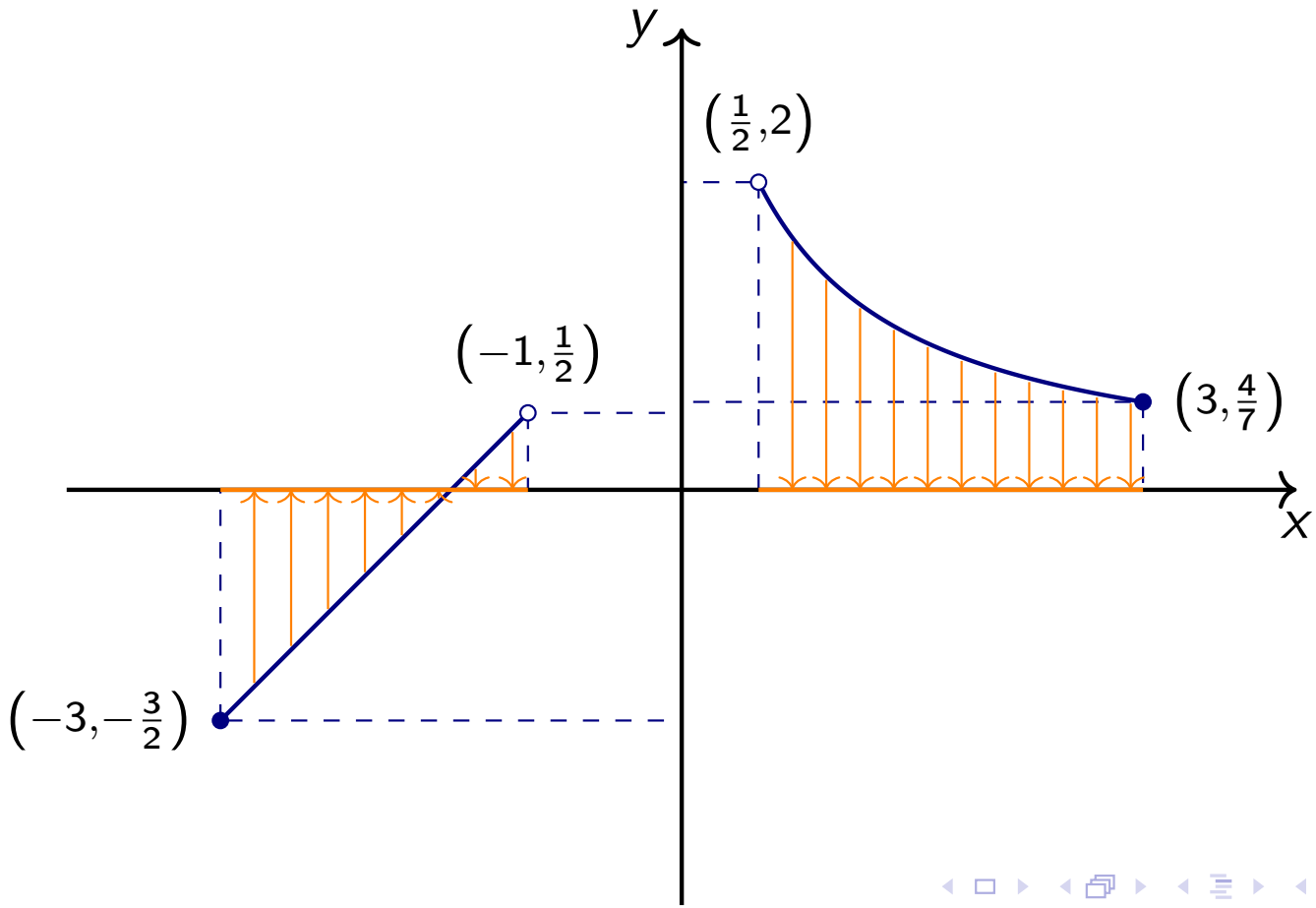
Βρίσκοντας το πεδίο ορισμού μέσω της C_f

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση f με την παρακάτω γραφική παράσταση:



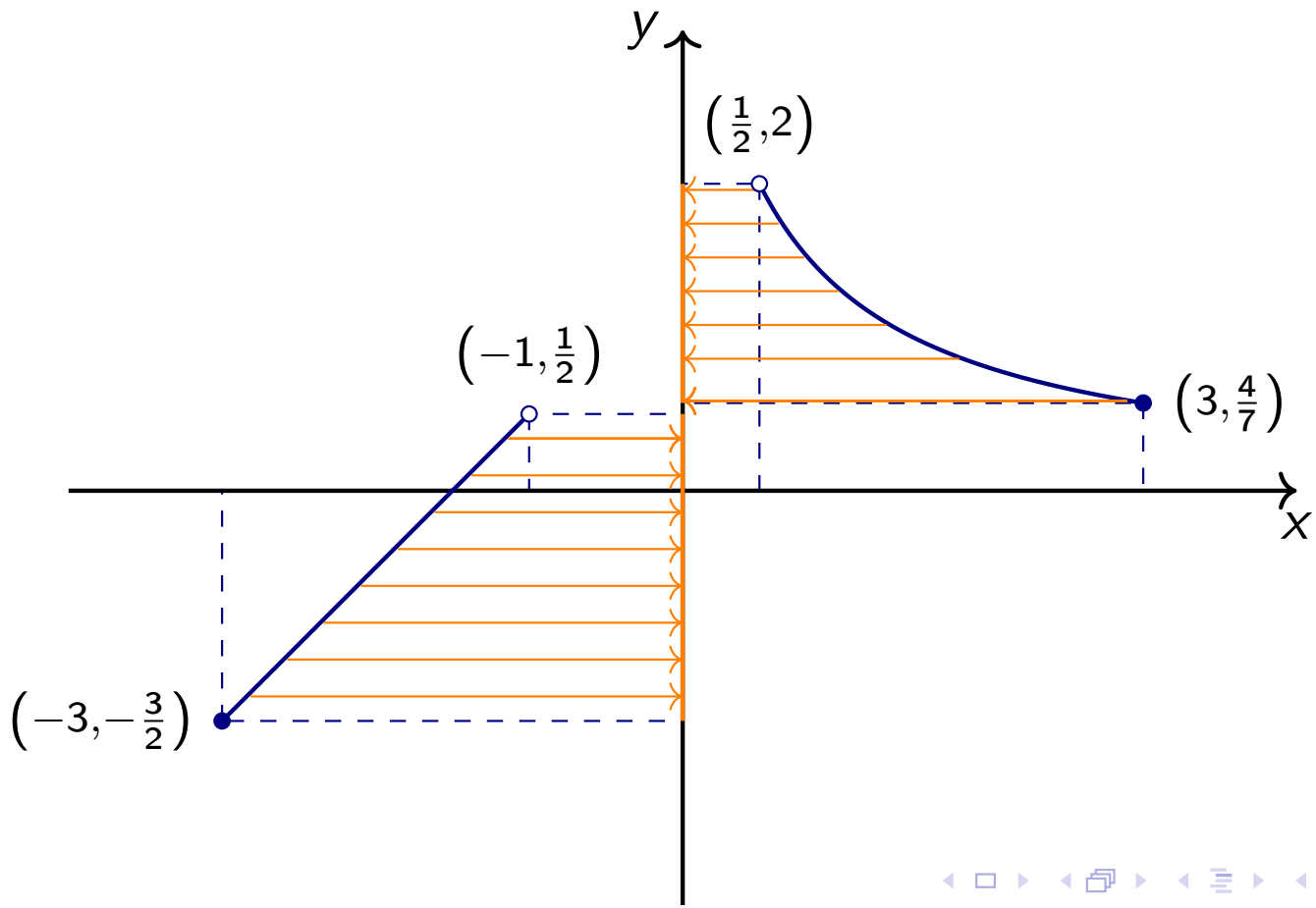
Βρίσκοντας το πεδίο ορισμού μέσω της C_f

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της, αρκεί να προβάλουμε τη γραφική της παράσταση πάνω στον άξονα $x'x$, όποτε βλέπουμε ότι $D_f = [-3, -1) \cup (1/2, 3]$.



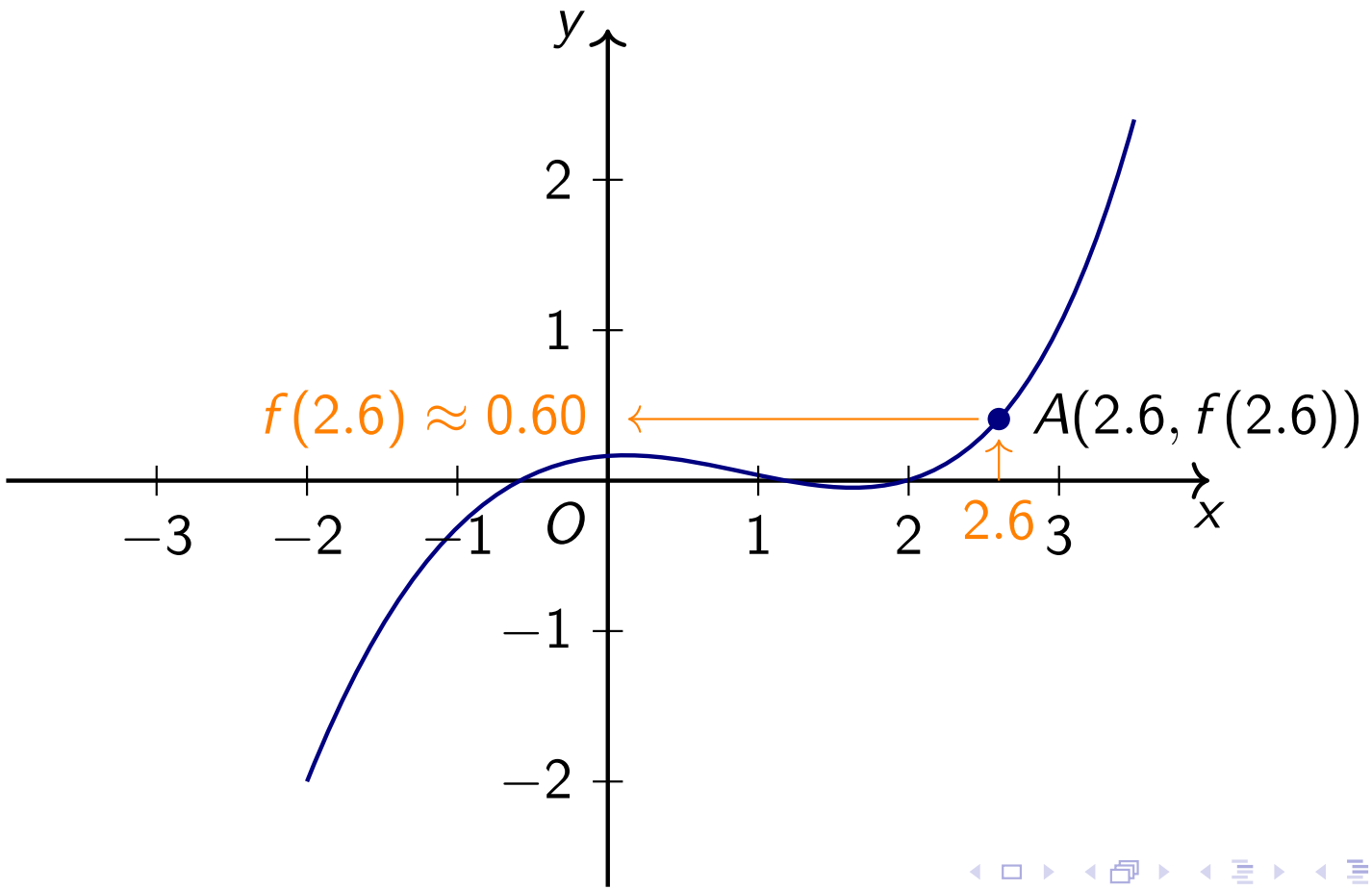
Βρίσκοντας το σύνολο τιμών μέσω της C_f

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης, αρκεί να προβάλουμε τη γραφική της παράσταση στον άξονα $y'y$. Επομένως, στο παράδειγμά μας, $f(D_f) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{7}, 2\right]$.



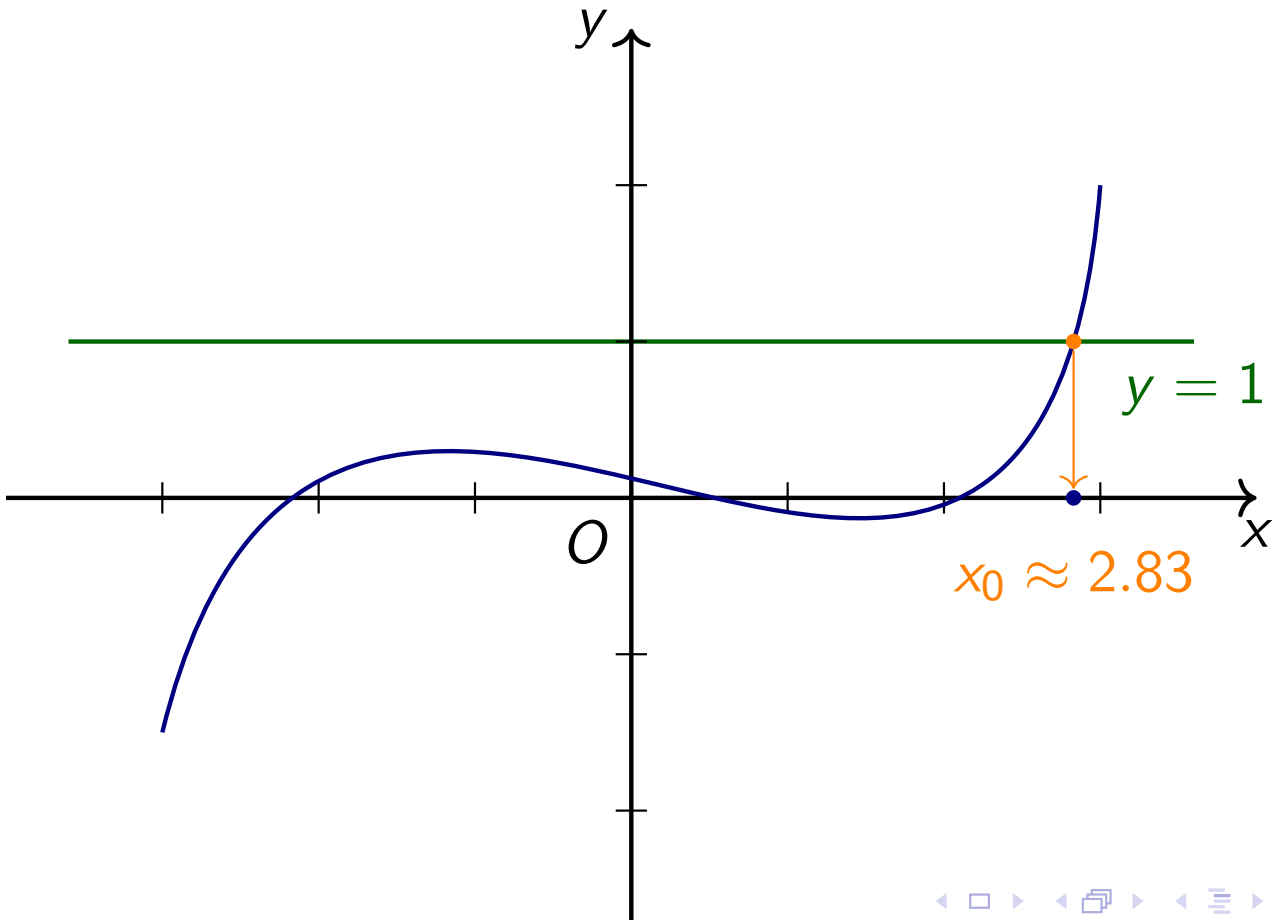
Βρίσκοντας τιμές της f μέσω της C_f

Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε, έστω και προσεγγιστικά, τιμές μίας συνάρτησης γνωρίζοντας μόνο τη γραφική της παράσταση, όπως φαίνεται παρακάτω:



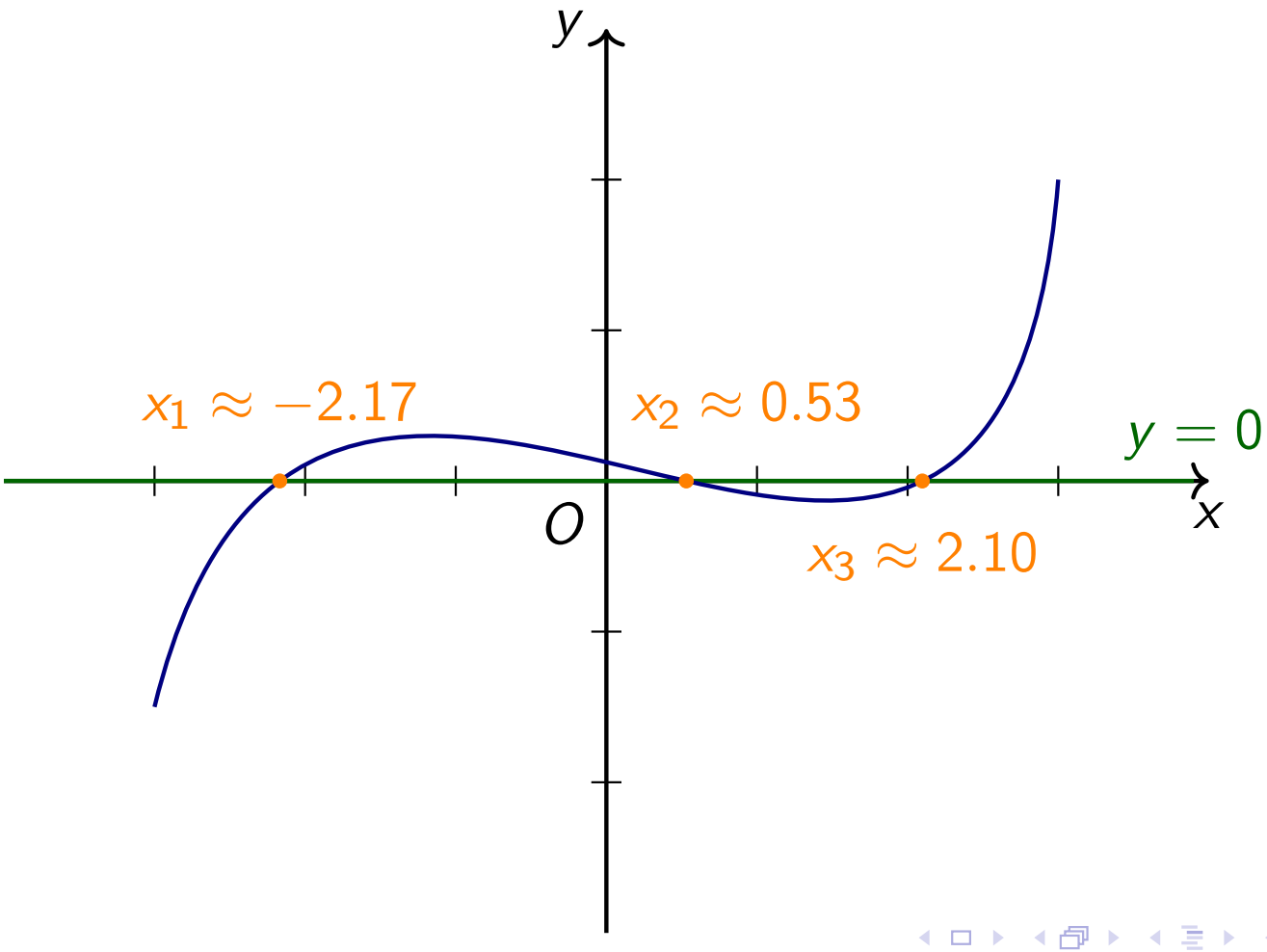
Βρίσκοντας το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = c$

Τέλος, μέσω της γραφική παράστασης μίας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε **πόσες** ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = c$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ (παρακάτω έχουμε $c = 1$).



Ειδική περίπτωση: Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Για $c = 0$, μπορούμε να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, δηλαδή, τα σημεία τομής της f με τον άξονα $x'x$:



Εποπτική ερμηνεία του ορισμού της συνάρτησης

Ας ξαναθυμηθούμε τον ορισμό της συνάρτησης:

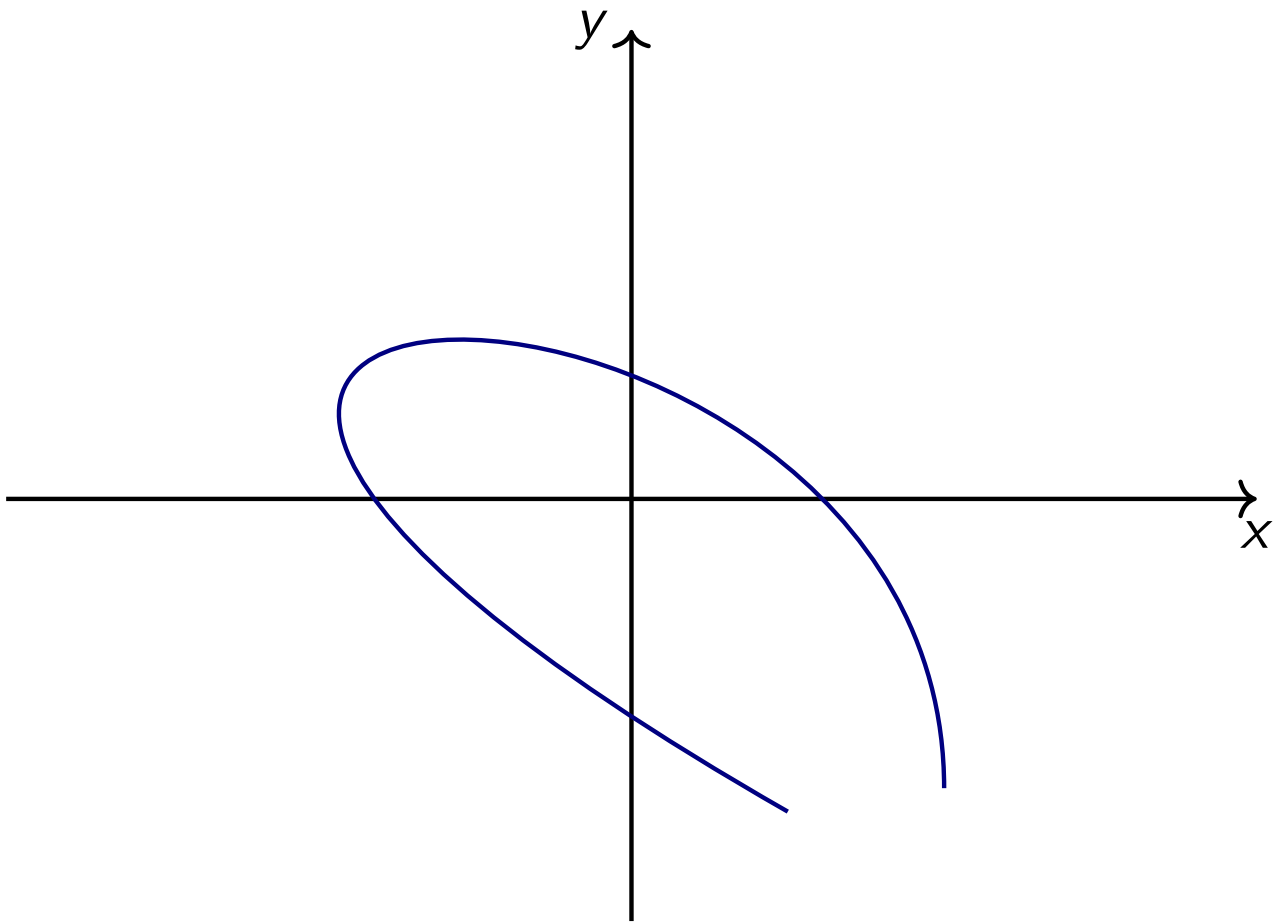
Ορισμός (Συνάρτηση)

Μία αντιστοίχιση $f : A \to B$ ονομάζεται συνάρτηση αν αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο $a \in A$ σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο $b \in B$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο το συμβολίζουμε με $f(a)$ και το καλούμε **τιμή** της συνάρτησης f στο a. Επίσης, το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με D_f, ενώ το σύνολο B **πεδίο τιμών** ή **σύνολο αφίξεως** της f.

Πώς επηρεάζει αυτό τη μορφή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης; Αν παρατηρήσουμε τον ορισμό, θα δούμε ότι για κάθε $x_0 \in D_f$, μπορούμε να βρούμε ακριβώς ένα $y_0 \in f(D_f)$ έτσι ώστε $y_0 = f(x_0)$. Επομένως, αν σχεδιάσουμε την ευθεία $x = x_0$, αυτή θα τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο, το $A(x_0, f(x_0))$.

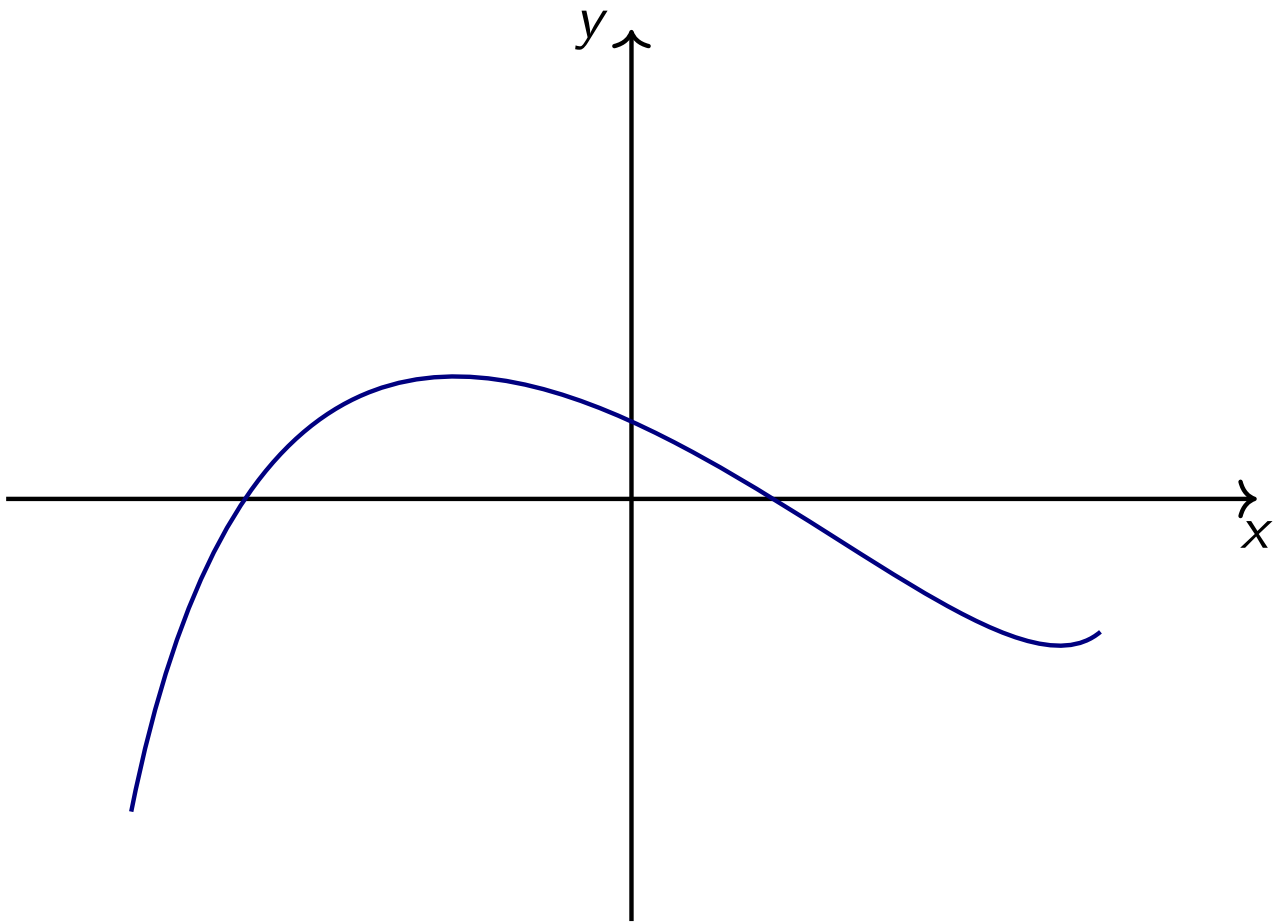
Παραδείγματα

- Η παρακάτω γραφική παράσταση δεν ανήκει σε κάποια συνάρτηση (γιατί;):



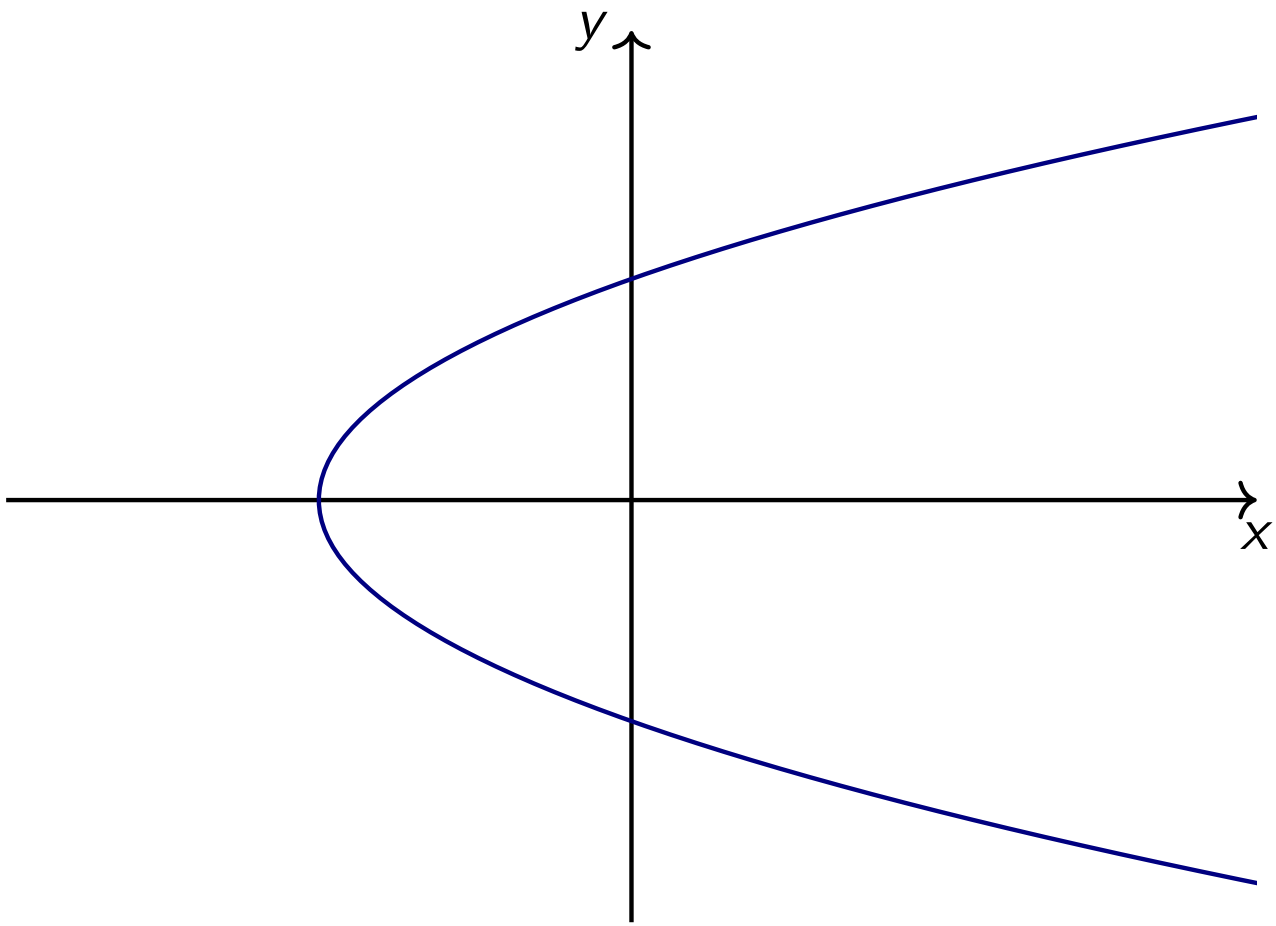
Παραδείγματα

- Η παρακάτω γραφική παράσταση, αντιθέτως, ανήκει σε κάποια συνάρτηση (γιατί;):



Παραδείγματα

- Τι έχετε να πείτε γι' αυτή:



Γενικό συμπέρασμα

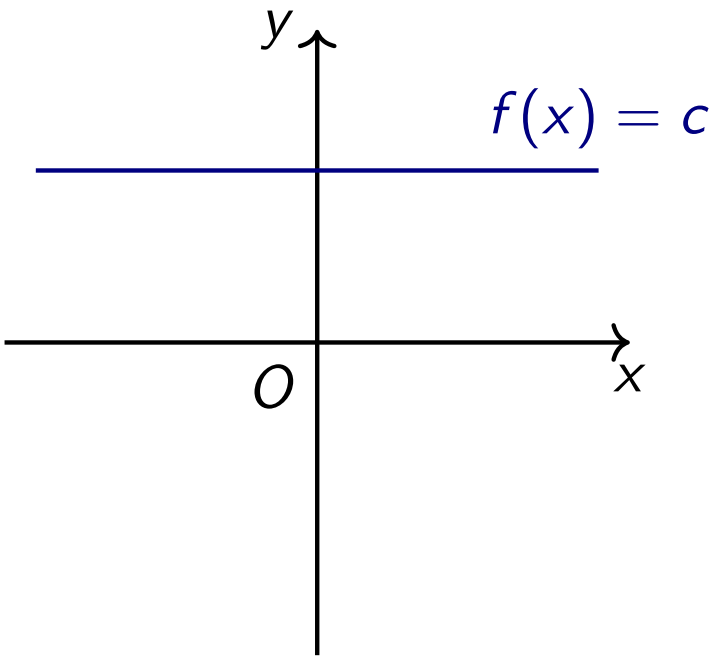
Εν γένει, αν $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι ένας αριθμός και $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, τότε η (κατακόρυφη) ευθεία $x = x_0$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f, C_f, **το πολύ σε ένα σημείο**.

Ερώτηση

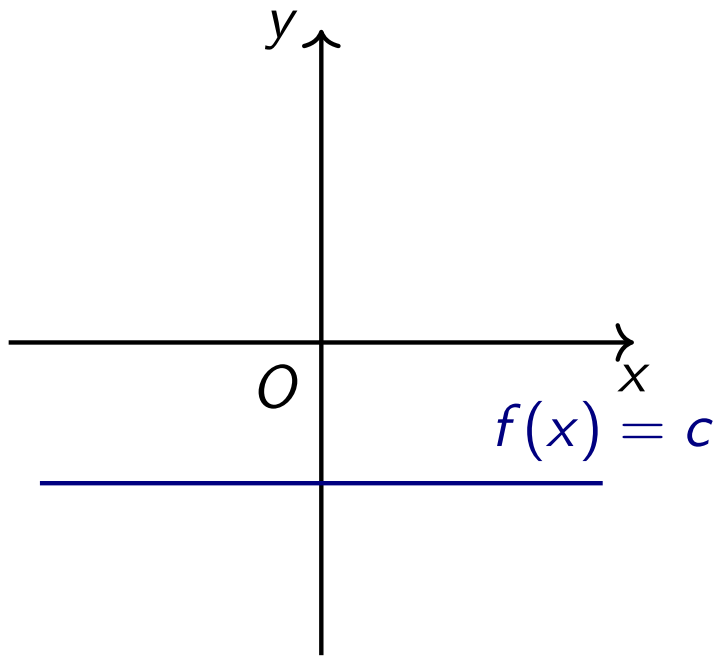
Γιατί λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f **το πολύ σε ένα** σημείο και όχι **ακριβώς** σε ένα σημείο;

Η συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $f(x) = c$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



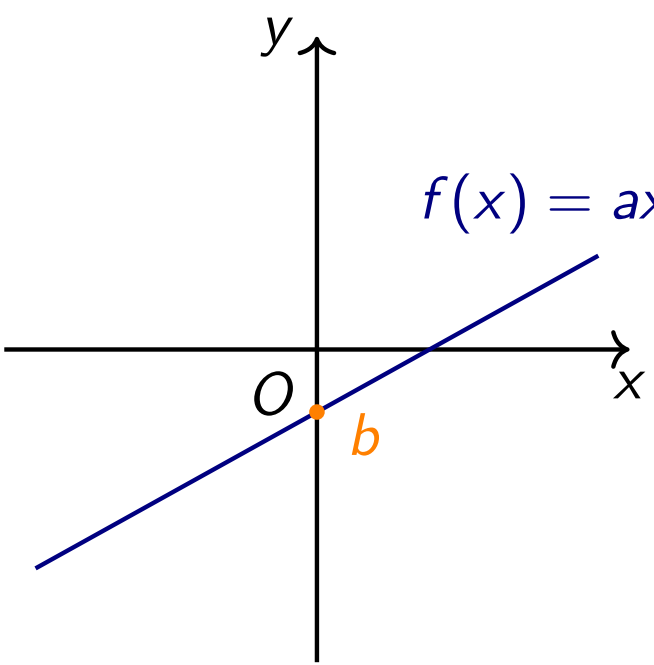
(α') $c > 0$



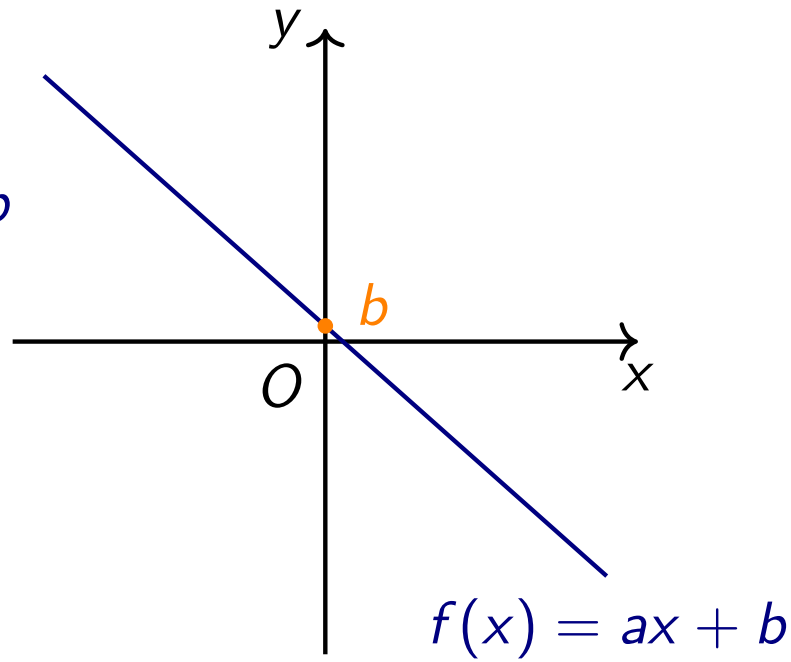
(β') $c < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



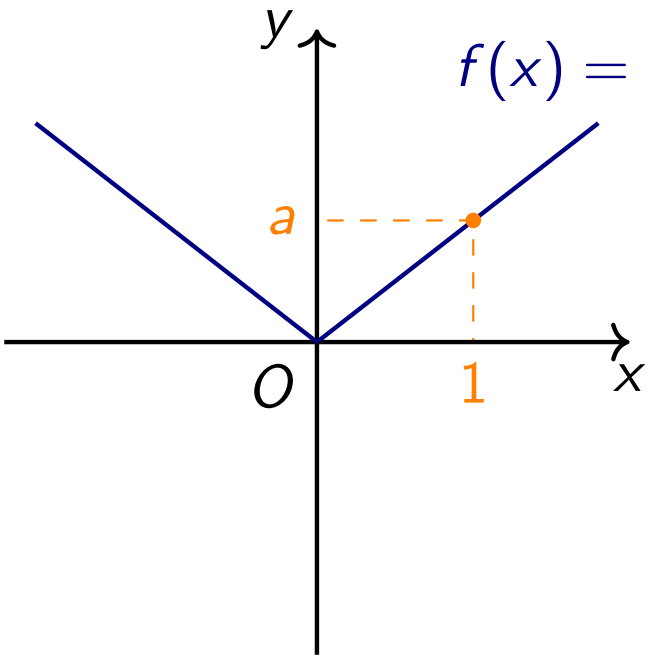
(α') $a > 0$



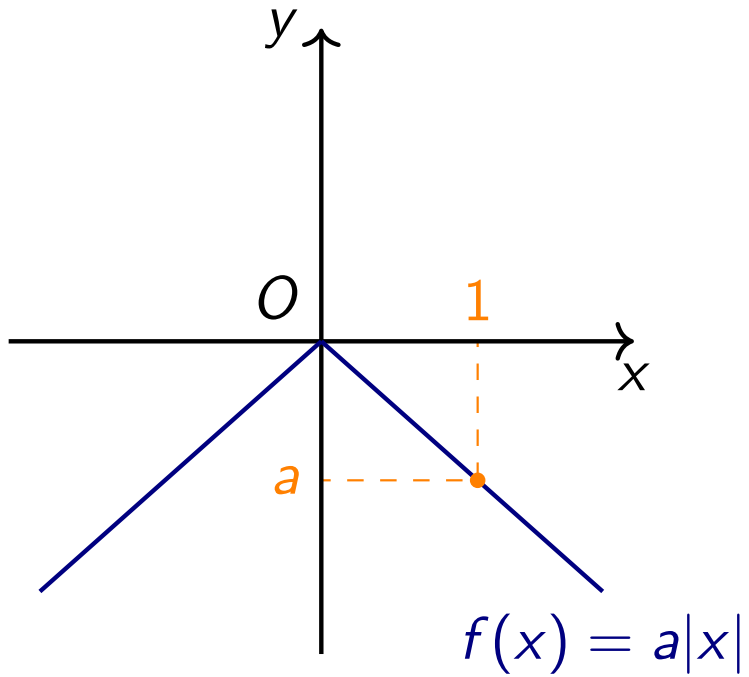
(β') $a < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = a|x|$, $a \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = a|x|$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



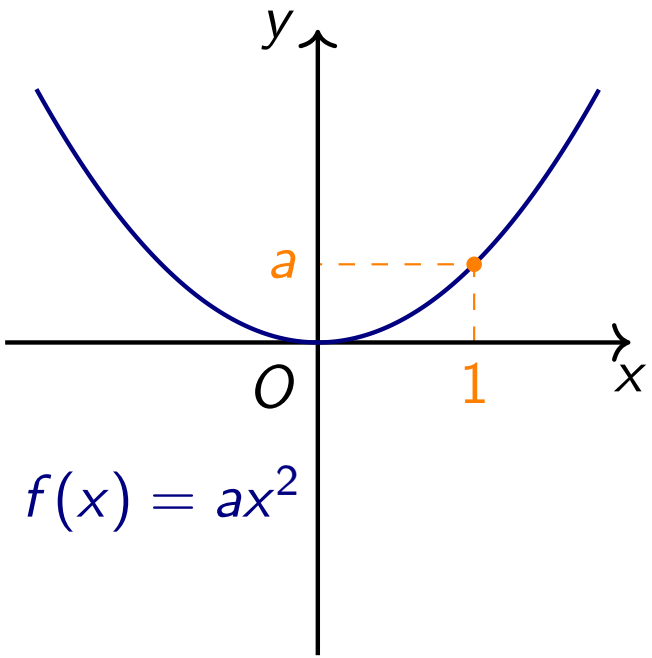
(α′) $a > 0$



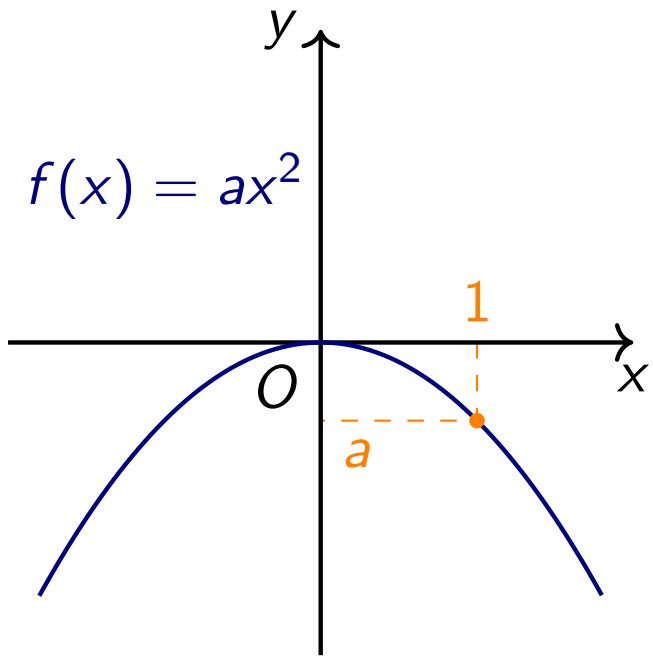
(β′) $a < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



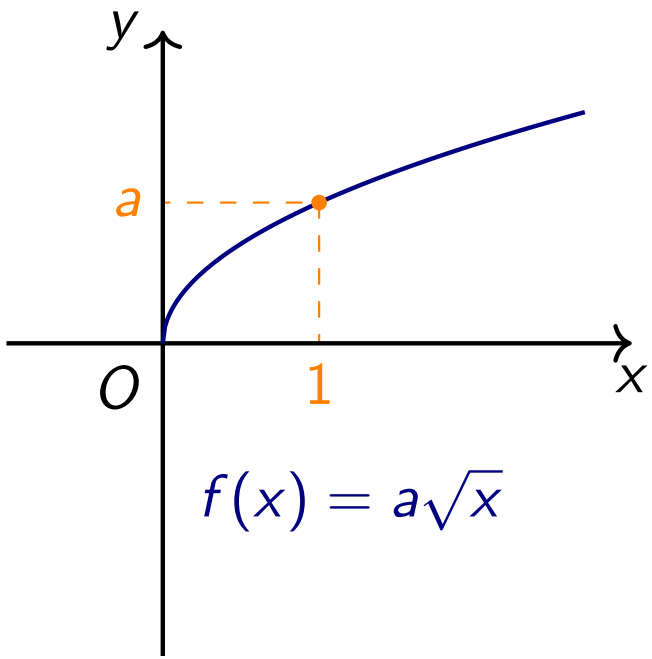
(α′) $a > 0$



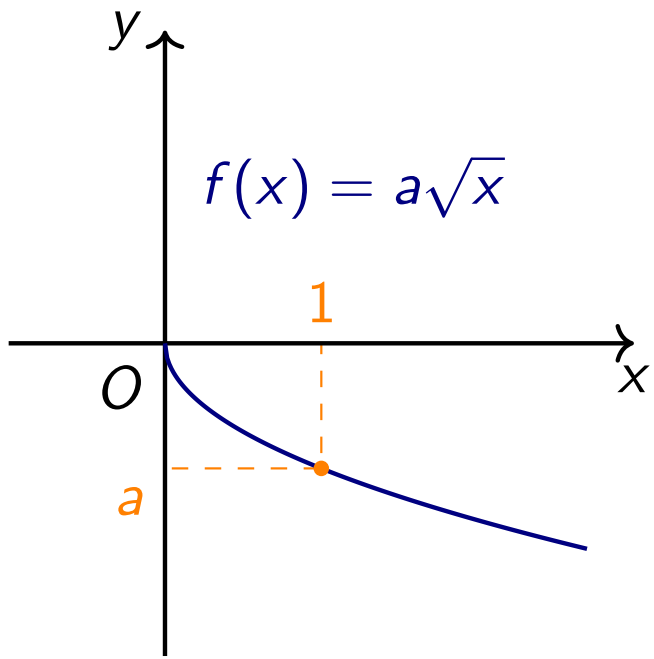
(β′) $a < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$, $a \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



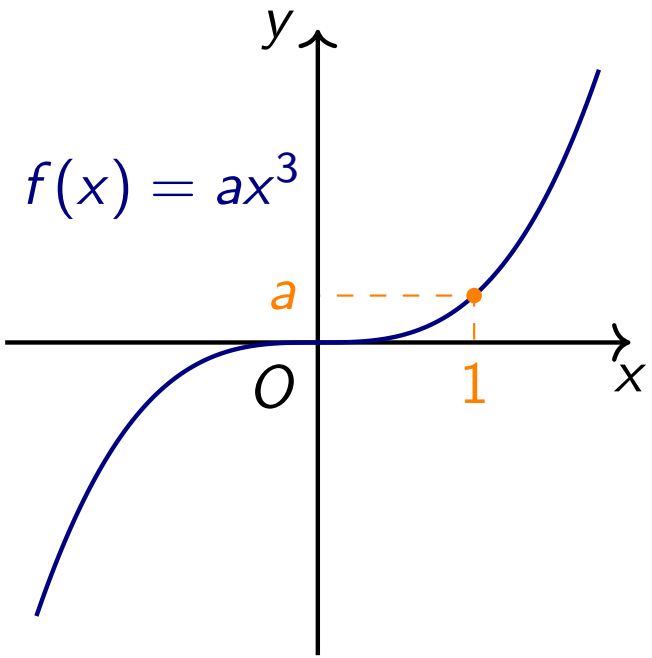
(α′) $a > 0$



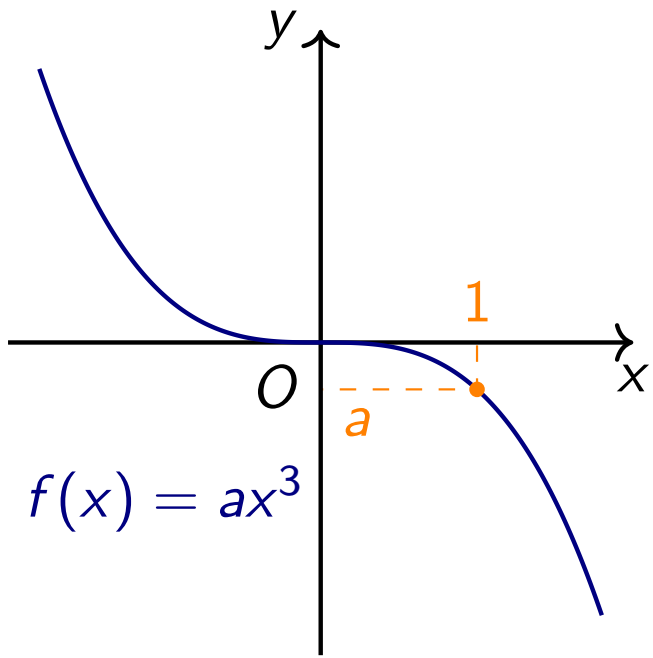
(β′) $a < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



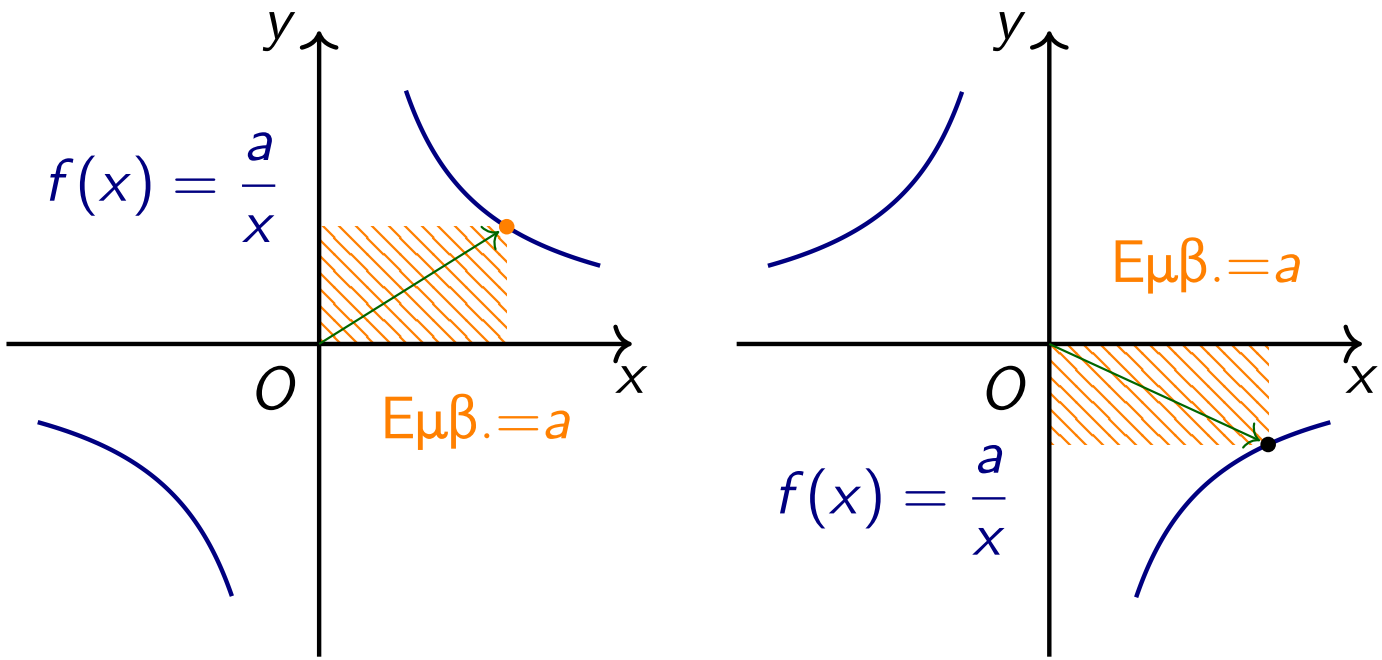
(α′) $a > 0$



(β′) $a < 0$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$

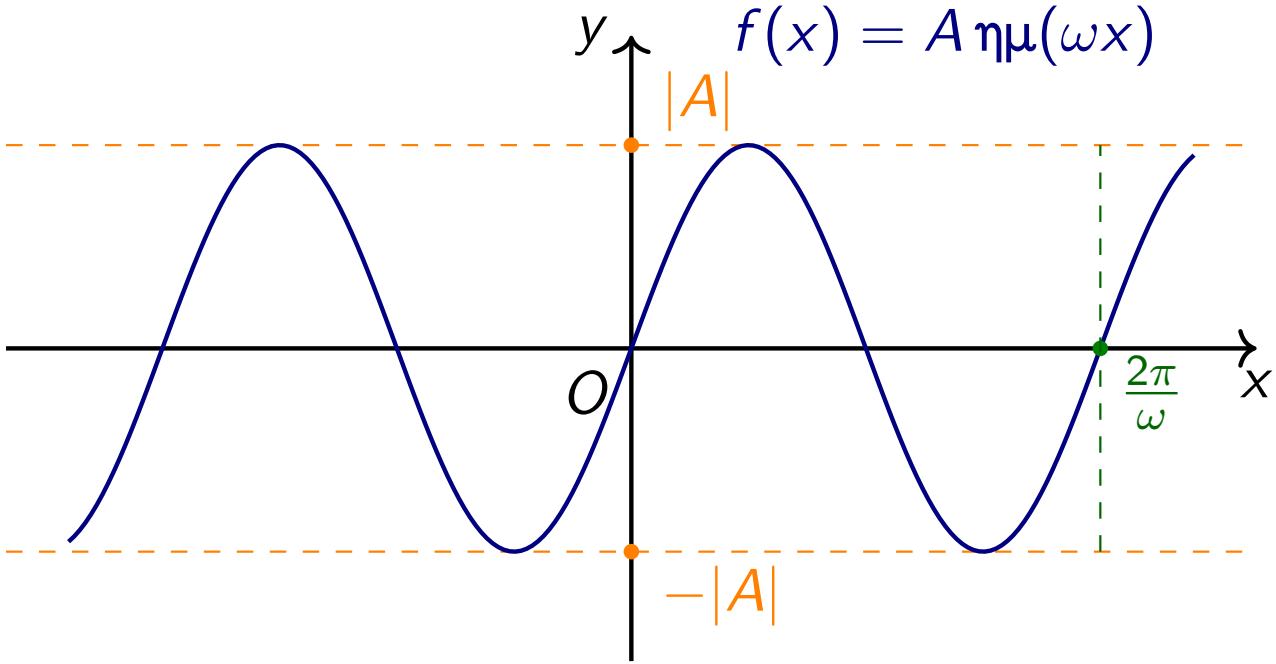
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

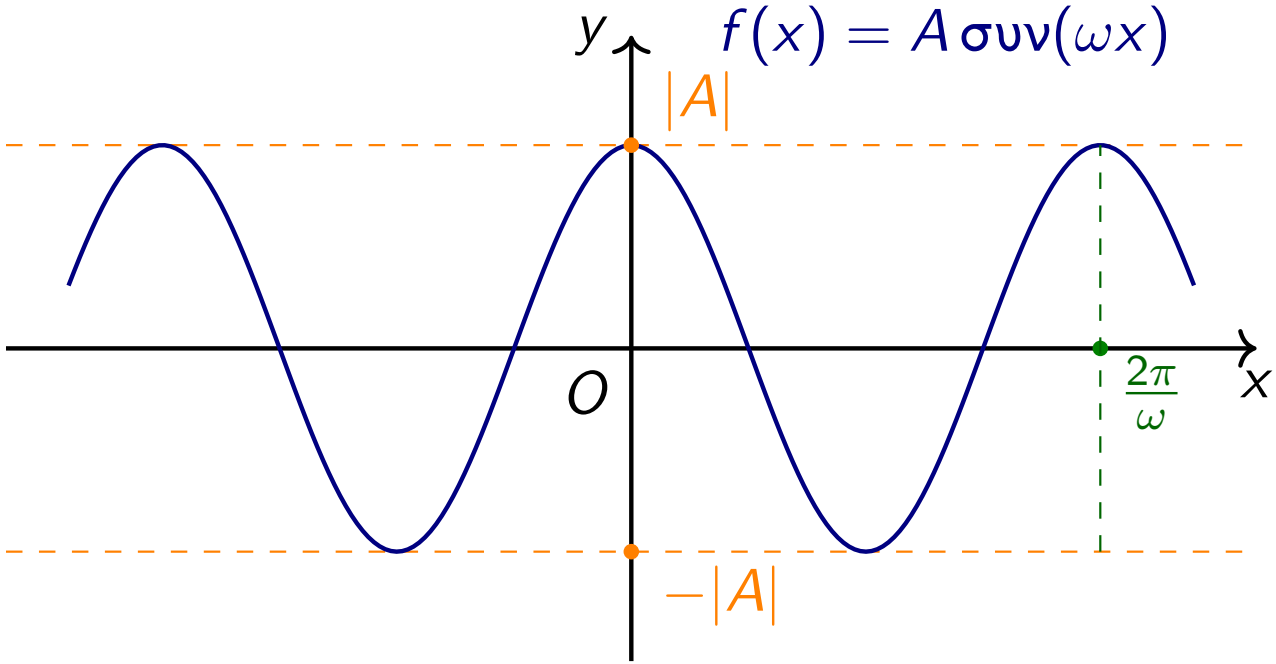
Η συνάρτηση $f(x) = A\,\eta\mu(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = A\,\eta\mu(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



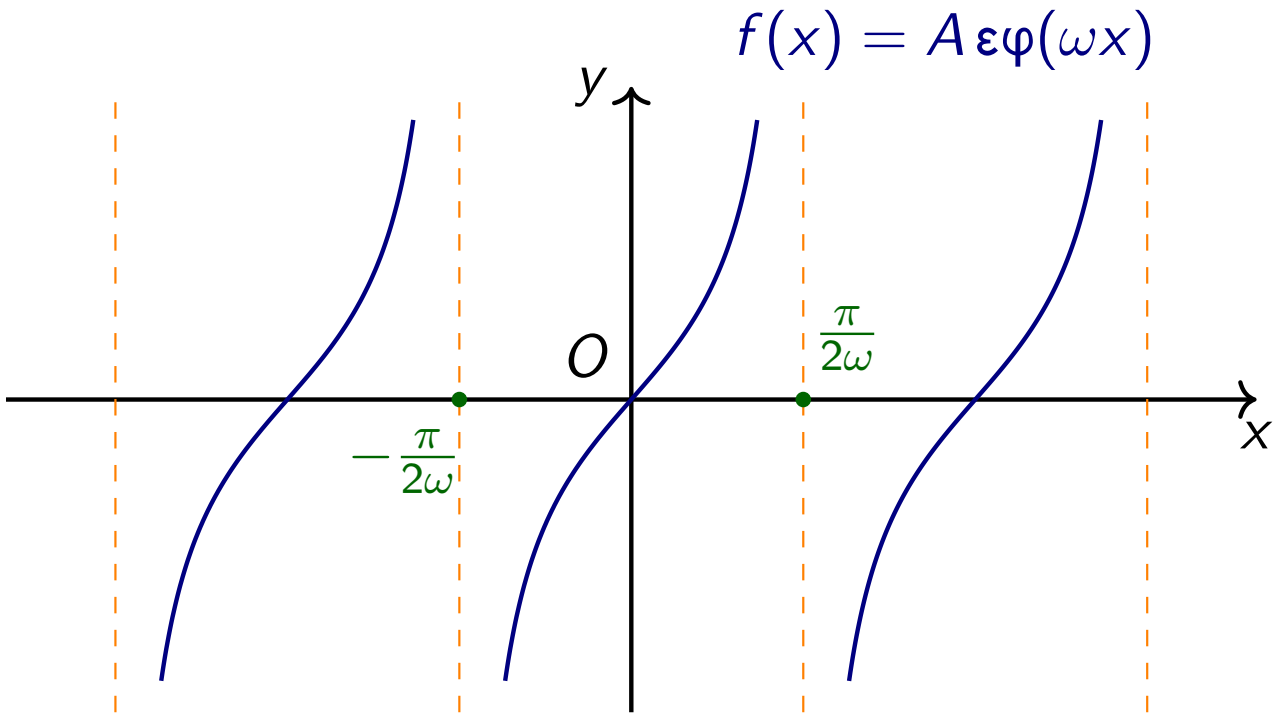
Η συνάρτηση $f(x) = A\,\text{συν}(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = A\,\text{συν}(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



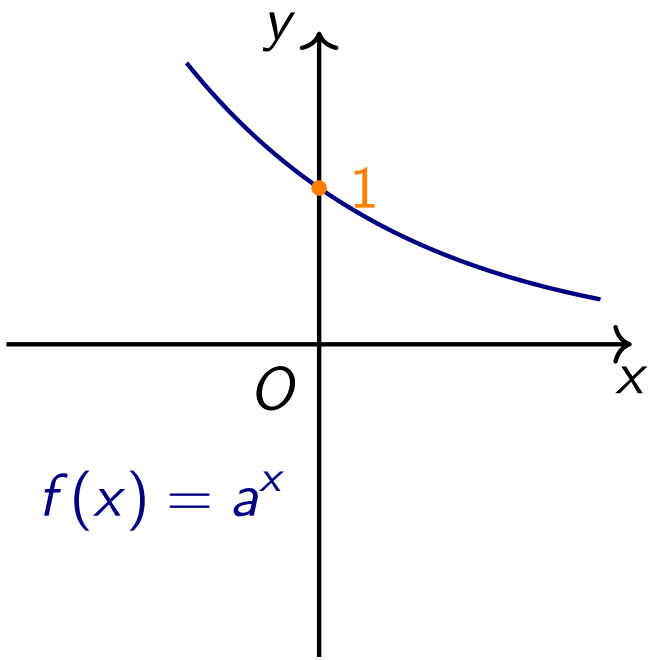
Η συνάρτηση $f(x) = A\,\varepsilon\varphi(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$

Η συνάρτηση $f(x) = A\,\varepsilon\varphi(\omega x)$, $A, \omega \neq 0$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:

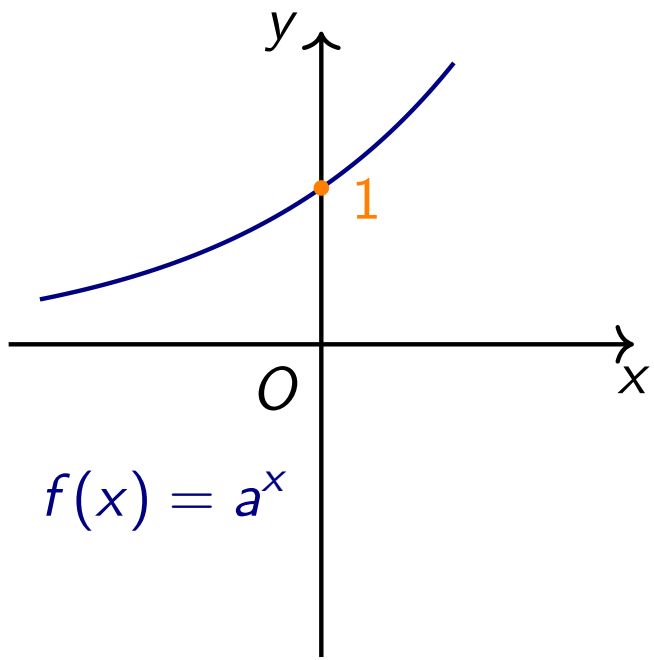


Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



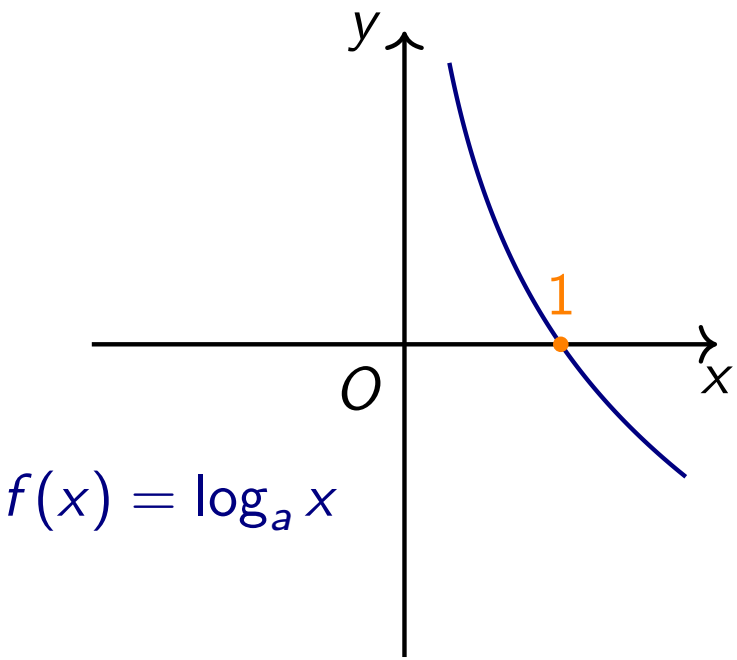
(α') $0 < a < 1$



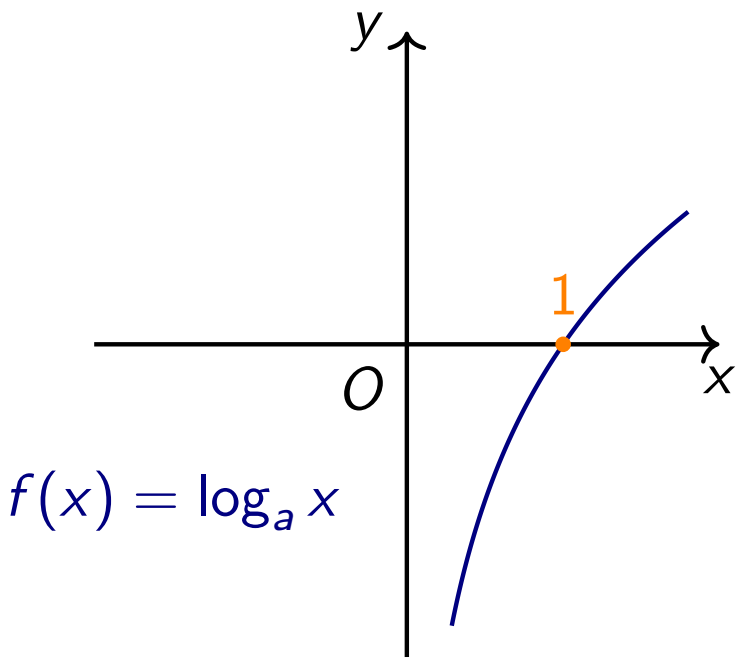
(β') $a > 1$

Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$

Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



(α') $0 < a < 1$



(β') $a > 1$

Οι συνήθεις πράξεις της άλγεβρας

Όπως ξέρουμε, έχουμε τέσσερις πράξεις μεταξύ των αριθμών (πρακτικά είναι δύο, αλλά ας μείνουμε στις τέσσερις):

- Πρόσθεση ($+$),
- Αφαίρεση ($-$),
- Πολλαπλασιασμός ($\cdot$),
- Διαίρεση ($\div$).

Ερώτηση

Σκεφτείτε ότι μία πράξη, για παράδειγμα η πρόσθεση, είναι μία αντιστοίχιση που παίρνει **ένα ζεύγος** αριθμών και το αντιστοιχίζει σε έναν άλλο αριθμό. Είναι μία τέτοια αντιστοίχιση συνάρτηση;

Ορίζοντας την πρόσθεση μεταξύ συναρτήσεων

Ας πάρουμε δύο συναρτήσεις, $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ και ας πάρουμε κι ένα $x \in A \cap B$. Τότε, μπορούμε να κάνουμε λόγο και για το $f(x)$ και για το $g(x)$, επομένως, θα είχε νόημα να μιλήσουμε και για το άθροισμά τους, $f(x) + g(x)$. Έτσι, όμως, παίρνουμε μία νέα αντιστοίχιση που αντιστοιχίζει κάθε $x \in A \cap B$ στον αριθμό $f(x) + g(x)$. Μάλιστα, αν παρατηρήσουμε ότι:

- το $f(x)$ είναι μοναδικό (γιατί;),
- το $g(x)$ είναι μοναδικό (γιατί;),

τότε συμπεραίνουμε ότι και το $f(x) + g(x)$ είναι μοναδικό, άρα η παραπάνω αντιστοίχιση είναι μία **συνάρτηση**. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η αντιστοίχιση:

$$x \mapsto f(x) + g(x),$$

με $x \in A \cap B$ είναι μία συνάρτηση, την οποία θα συμβολίζουμε με $f + g$.

Οι υπόλοιπες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Ανάλογα με τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε και τις υπόλοιπες πράξεις. Συνολικά, έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς για δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$,
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$,
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$.

Προσοχή!

Στην περίπτωση της διαίρεσης, δε μας αρκεί να έχουν νόημα τα $f(x)$ και $g(x)$, αλλά θέλουμε, επιπλέον, το $g(x) \neq 0$ έτσι ώστε να μπορούμε να διαιρέσουμε.

Παραδείγματα

Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \ln x$, οπότε $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (0, +\infty)$, τότε:

- $(f + g)(x) = x^2 + \ln x$ με $D_{f+g} = (0, +\infty)$,
- $(f - g)(x) = x^2 - \ln x$ με $D_{f-g} = (0, +\infty)$,
- $(f \cdot g)(x) = x^2 \ln x$ με $D_{f \cdot g} = (0, +\infty)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ με $D_{f/g} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, αφού $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$,
- $(g^2 + f \cdot g)(x) = (\ln x)^2 + x^2 \ln x$ με $D_{g^2+f \cdot g} = (0, +\infty)$.

Προσοχή!

Ως f^2 ορίζουμε τη συνάρτηση $f \cdot f$ και, γενικότερα, ως f^ν ορίζουμε τη συνάρτηση $\underbrace{f \cdot f \cdot \ldots \cdot f}_{\nu \text{ φορές}}$.

Ο πολλαπλασιασμός συνάρτησης με αριθμό

Μία ειδική περίπτωση του πολλαπλασιασμού συναρτήσεων είναι η εξής: Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και πάρουμε και τη συνάρτηση $g(x) = \lambda$, όπου λ κάποιος (σταθερός) αριθμός, τότε η συνάρτηση $g \cdot f$ είναι η:

$$(g \cdot f)(x) = g(x)f(x) = \lambda f(x),$$

δηλαδή το γινόμενο της f με τον αριθμό λ. Τίποτα το σπουδαίο ως τώρα, είναι η αλήθεια. Ωστόσο, στην πορεία της ύλης, θα συναντήσουμε αρκετές περιπτώσεις στις οποίες, ο πολλαπλασιασμός της συνάρτησης με έναν αριθμό θα έχει διαφορετικό «status» από ότι ο πολλαπλασιασμός της με μία άλλη (μη σταθερή) συνάρτηση. Μέχρι τότε, μπορείτε να αγνοήσετε αυτήν την παρατήρηση.

Μια άλλη πρόσθεση...

Ας πάρουμε λίγο την έκφραση του ορισμού της πρόσθεσης:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Το (αριστερό) $+$ και το (δεξί) $+$ δεν είναι το ίδιο σύμβολο! Το $+$ υποδηλώνει την πρόσθεση μεταξύ **συναρτήσεων** ενώ το $+$ υποδηλώνει την πρόσθεση μεταξύ **αριθμών**. Έτσι, η $f+g$ είναι μία νέα **συνάρτηση** ενώ το $f(x)+g(x)$ είναι ένας νέος **αριθμός**, ο οποίος ισούται με την τιμή της **συνάρτησης** $f+g$ στο σημείο x.

Ανάλογα, και τα σύμβολα $-, \cdot, \div$ έχουν διαφορετικό νόημα όταν βρίσκονται μεταξύ συναρτήσεων και διαφορετικό όταν βρίσκονται μεταξύ αριθμών.

Σύνθεση

Ας πάρουμε τις ακόλουθες δύο συναρτήσεις:

- $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$,
- $g(x) = \eta\mu\, x$, $x \in [0, \pi]$.

Επιπρόσθετα, αν πάρουμε και τον αριθμό $x = \dfrac{\pi}{6}$, τότε έχουμε:

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\dfrac{1}{2} \in D_f$, μπορούμε να μιλήσουμε και για το:

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Σύνθεση

Η διαδικασία που κάναμε προηγουμένως μπορεί να αναπαρασταθεί και από το εξής σχήμα:

$$\frac{\pi}{6} \overset{g}{\longmapsto} g\left(\frac{\pi}{6}\right) \overset{f}{\mapsto} f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Πήραμε, δηλαδή, το $\frac{\pi}{6}$, το «δώσαμε» στην g, μας έδωσε το $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ και μετά δώσαμε αυτό που βρήκαμε στην f, η οποία μας έδωσε το:

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

Αυτή η διαδικασία κατά την οποία παίρνουμε έναν αριθμό x, υπολογίζουμε το $g(x)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f(g(x))$ λέγεται **σύνθεση** της g με την f και συμβολίζεται με $f \circ g$

Πεδίο ορισμού σύνθετης συνάρτησης

Ας πάρουμε τις εξής δύο συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{2-x}$,
- $g(x) = x^2 + 3$.

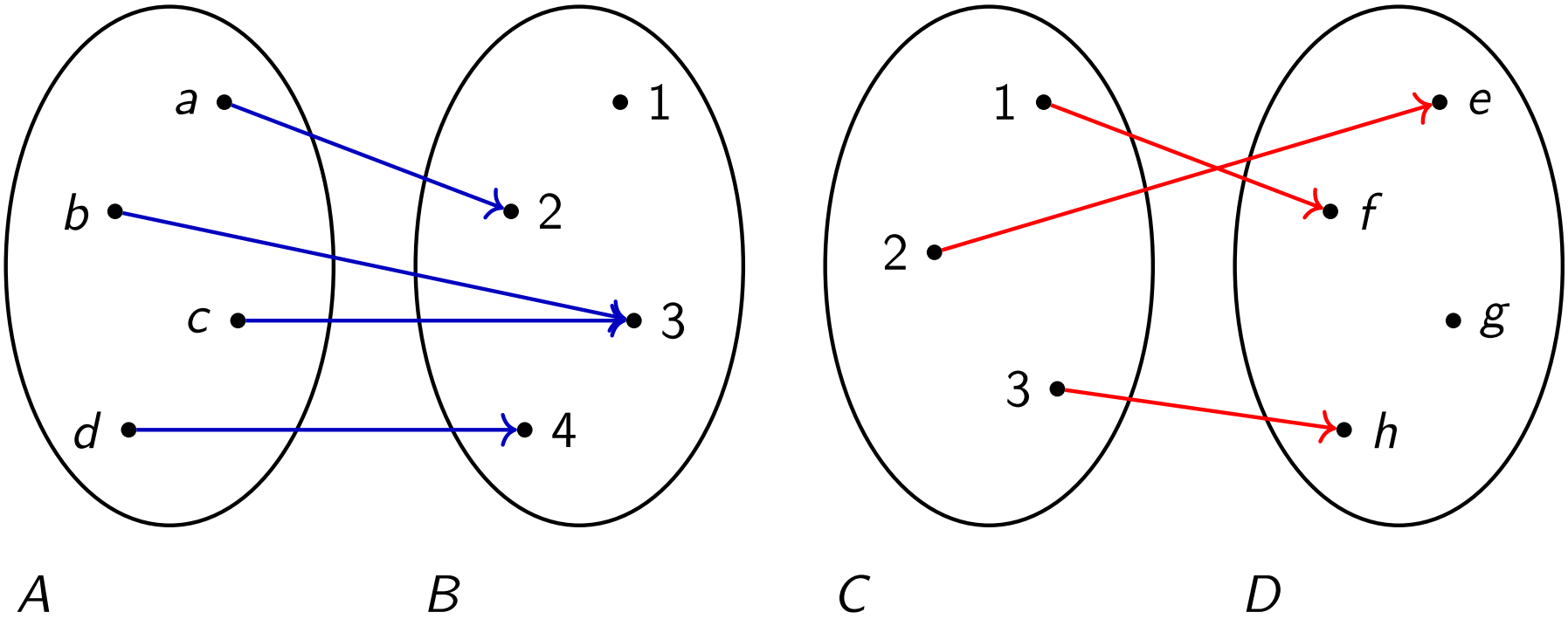
Τότε, αν πάρουμε τη σύνθεση της g με την f, αυτή θα έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2 - (x^2 + 3)}.$$

Ας σταθούμε εδώ να παρατηρήσουμε κάτι: το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 2]$, ενώ, για την g εύκολα παρατηρούμε ότι $g(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κανένα $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει νόημα η έκφραση $f(g(x))$, αφού η f «δέχεται» αριθμούς ≤ 2, ενώ $g(x) \geq 3$.

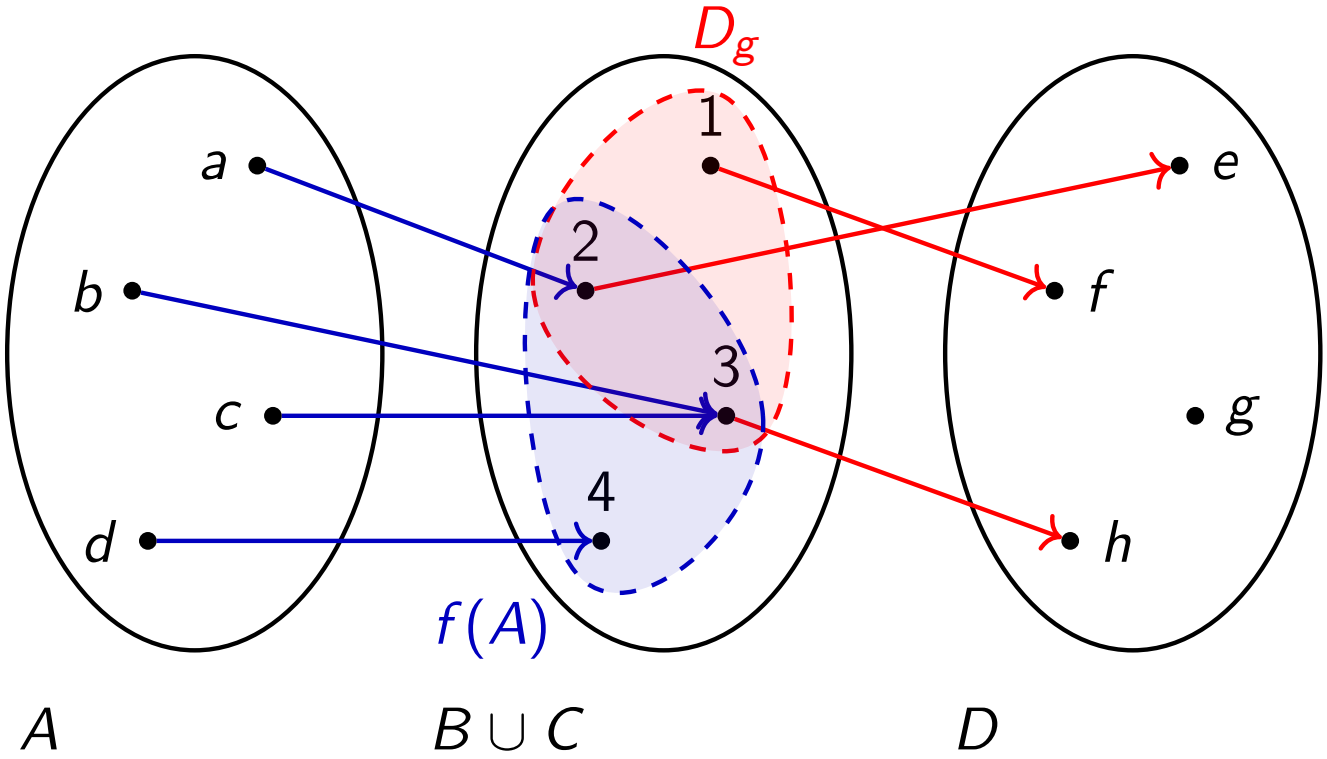
Πεδίο ορισμού σύνθετης συνάρτησης

Όπως είδαμε, η σύνθεση δύο συναρτήσεων δεν έχει πάντα νόημα. Για να μελετήσουμε το ζήτημα λίγο καλύτερα, ας πάρουμε δύο συναρτήσεις f και g όπως αυτές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



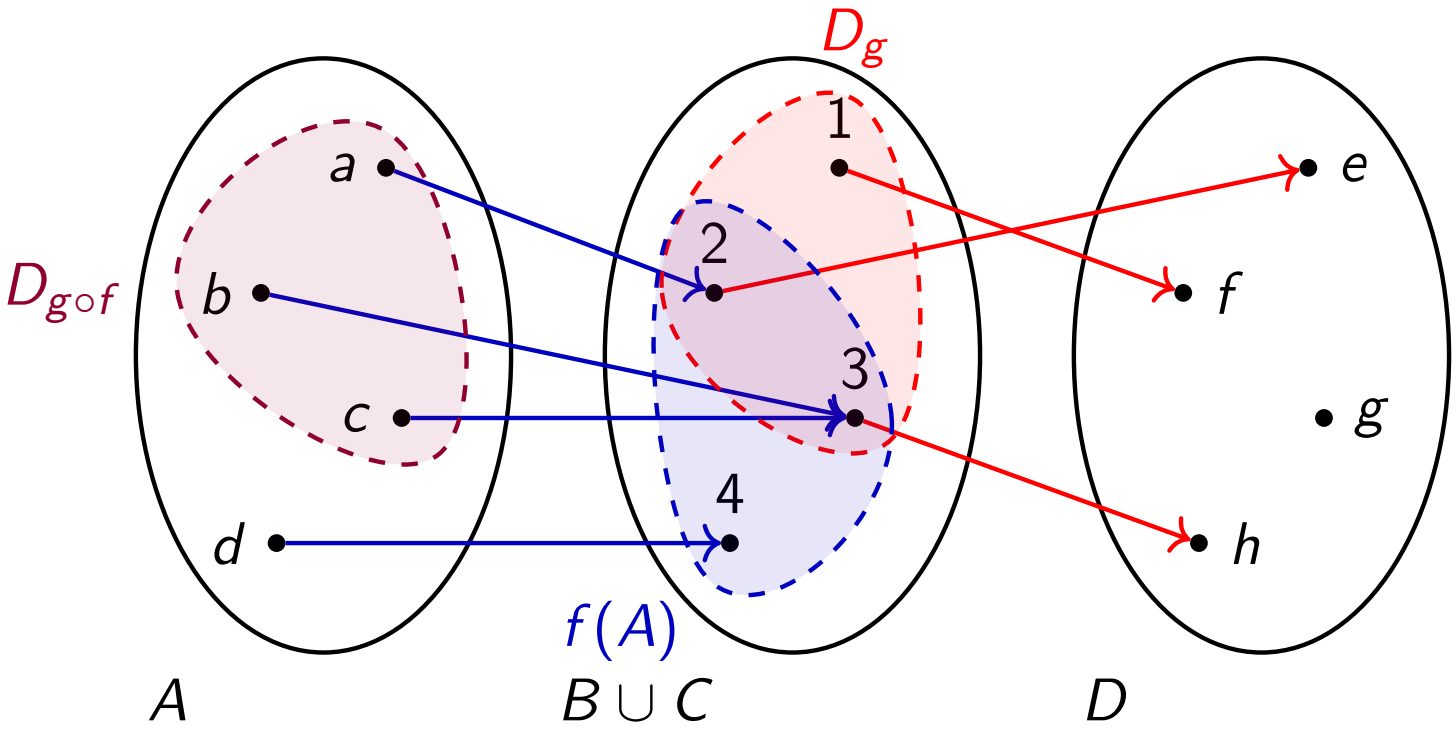
Πεδίο ορισμού σύνθετης συνάρτησης

Αν πάρουμε τώρα και τη σύνθεση της f με τη g, δηλαδή την $g \circ f$, έχουμε ένα σχήμα σαν το ακόλουθο τα σύνολα B και C έχουν «ανακατευτεί» για λόγους που θα φανούν στην πορεία):



Πεδίο ορισμού σύνθετης συνάρτησης

Όπως φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα, για να μιλήσουμε για το $g(f(x))$ πρέπει το $f(x)$ να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της g, έτσι ώστε η έκφραση $g(f(x))$ **να έχει νόημα**. Επομένως, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το $g(f(d))$, αφού $f(d) = 4$ και το $4 \notin D_g$. Αυτό μπορεί να φανεί και στο παρακάτω σχήμα:



Πεδίο ορισμού σύνθετης συνάρτησης

Συνοψίζουντας, για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ θέλουμε:

- $x \in D_f$ έτσι ώστε να έχει νόημα η έκφραση $f(x)$ και,
- $f(x) \in D_g$ έτσι ώστε να έχει νόημα η έκφραση $g(f(x))$.

Όλα αυτά φαίνονται στον τυπικό ορισμό της σύνθεσης:

Ορισμός (Σύνθεση)

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(A) \cup B \neq \varnothing$, τότε η **σύνθεση** της f με την g είναι μία νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού:

$$D_{g \circ f} = \{x \in A \mid f(x) \in B\},$$

η οποία αντιστοιχίζει κάθε x στο $g(f(x))$ και συμβολίζεται με $g \circ f$, δηλαδή:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Παράδειγμα

Αν $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$, τότε, για τις $g \circ f$ και $f \circ g$ έχουμε:

- $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f \mid \sqrt{x+1} \in D_g\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$D_f = [-1, +\infty) \text{ και } D_g = (1, +\infty),$$

επομένως:

$$D_{g\circ f} = \{x \in [-1, +\infty) \mid \sqrt{x+1} \in (1, \infty)\}.$$

Λύνουμε την ανισότητα (για $x \in [-1, +\infty)$):

$$\sqrt{x+1} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}^2 > 1 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως:

$$D_{g\circ f} = \{x \in [-1, +\infty) \mid x > 0\} = (0, +\infty).$$

Παράδειγμα

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (1, +\infty) \mid \ln(x-1) \in D_f\}$.
  Αφού $D_f = [-1, +\infty)$, έχουμε:

$$\ln(x-1) \geq -1 \Leftrightarrow x - 1 \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq 1 + e^{-1}.$$

  Επομένως, $D_{f\circ g} = [1 + e^{-1}, +\infty)$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\ln(x-1) + 1}$.

Προσοχή!

Γενικά, **δεν** ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$! Αντιθέτως, στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $f \circ g \neq g \circ f$.

Κάποιες απορίες...

Ερώτηση

Προηγουμένως, γράψαμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\sqrt{x+1} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}^2 > 1.$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι δεν ισχύει γενικά η ισοδυναμία:

$$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a > b^2,$$

αλλά μόνο η συνεπαγωγή:

$$\sqrt{a} > b \Leftarrow a > b^2.$$

Μήπως, λοιπόν, κάναμε λάθος;

Διάταξη μεταξύ συναρτήσεων

Εφ' όσον οι συναρτήσεις αντιστοιχίζουν αριθμούς σε αριθμούς, είναι φυσιολογικό να διατηρούν, κατά κάποιον τρόπο, και την ιδιότητα της διάταξής τους. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός

Διάταξη Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τότε θα λέμε ότι $f < g$ αν:

- $A = B$ (ίδιο πεδίο ορισμού) και,
- $f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in A$.

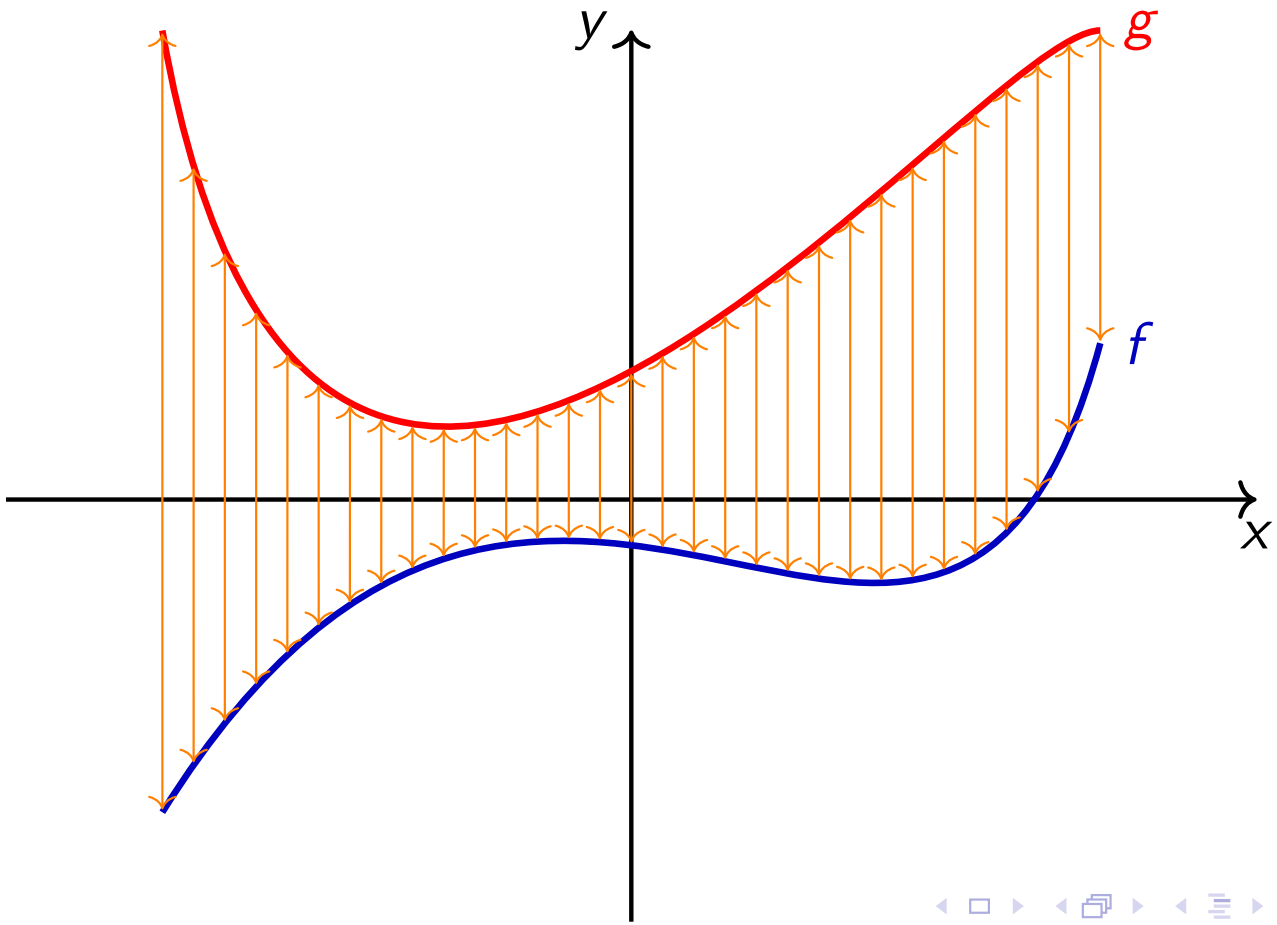
Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2x - 2$ και $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f < g$, διότι:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 2x - 2 < x^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x + 2,$$

που ισχύει, αφού $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Εποπτική ερμηνεία της διάταξης

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f < g$, τότε, εποπτικά, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από αυτήν της g, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Ολική διάταξη

Ερώτηση

Είναι οι συναρτήσεις **ολικά** διατεταγμένες; Ώπα, κάτσε, για αρχή, τι πάει να πει «ολικά διατεταγμένες»; Ένα σύνολο λέμε ότι είναι ολικά διατεταγμένο όταν για κάθε δύο στοιχεία του μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ίσα ή κάποιο από τα δύο είναι μεγαλύτερο. Για παράδειγμα, οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) είναι ολικά διατεταγμένοι αφού, αν μας δοθούν δύο αριθμοί a, b μπορούμε να συμπεράνουμε ποιος από τους δύο είναι μεγαλύτερος ή αν είναι ίσοι. Συμβαίνει όμως το ίδιο και με τις συναρτήσεις; Αν μας δώσει ένας «κακός» άνθρωπος δύο συναρτήσεις, f, g, μπορούμε πάντα να αποφασίσουμε αν είναι ίσες ή κάποια από τις δύο είναι μεγαλύτερη;

Άρτιες συναρτήσεις

Ορισμός (Άρτια συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται άρτια αν:

- για κάθε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και,
- $f(-x) = f(x)$.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια αφού:

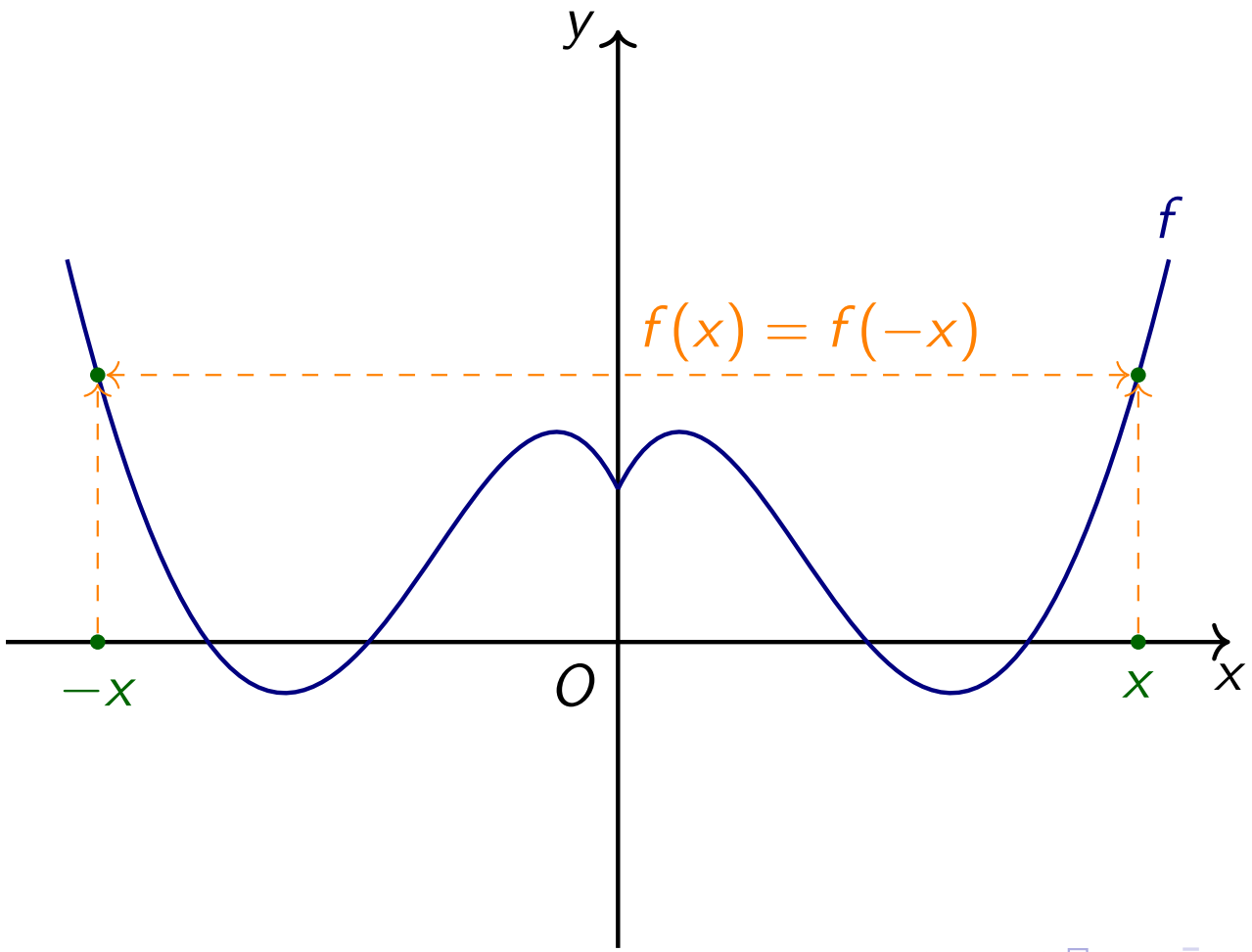
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Ανάλογα, η συνάρτηση $g(x) = \text{συν}\, x$ είναι άρτια, αφού:

$$g(-x) = \text{συν}(-x) = \text{συν}\, x = g(x).$$

Γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Περιττές συναρτήσεις

Ορισμός (Περιττή συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται περιττή αν:

- για κάθε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και,
- $f(-x) = -f(x)$.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή αφού:

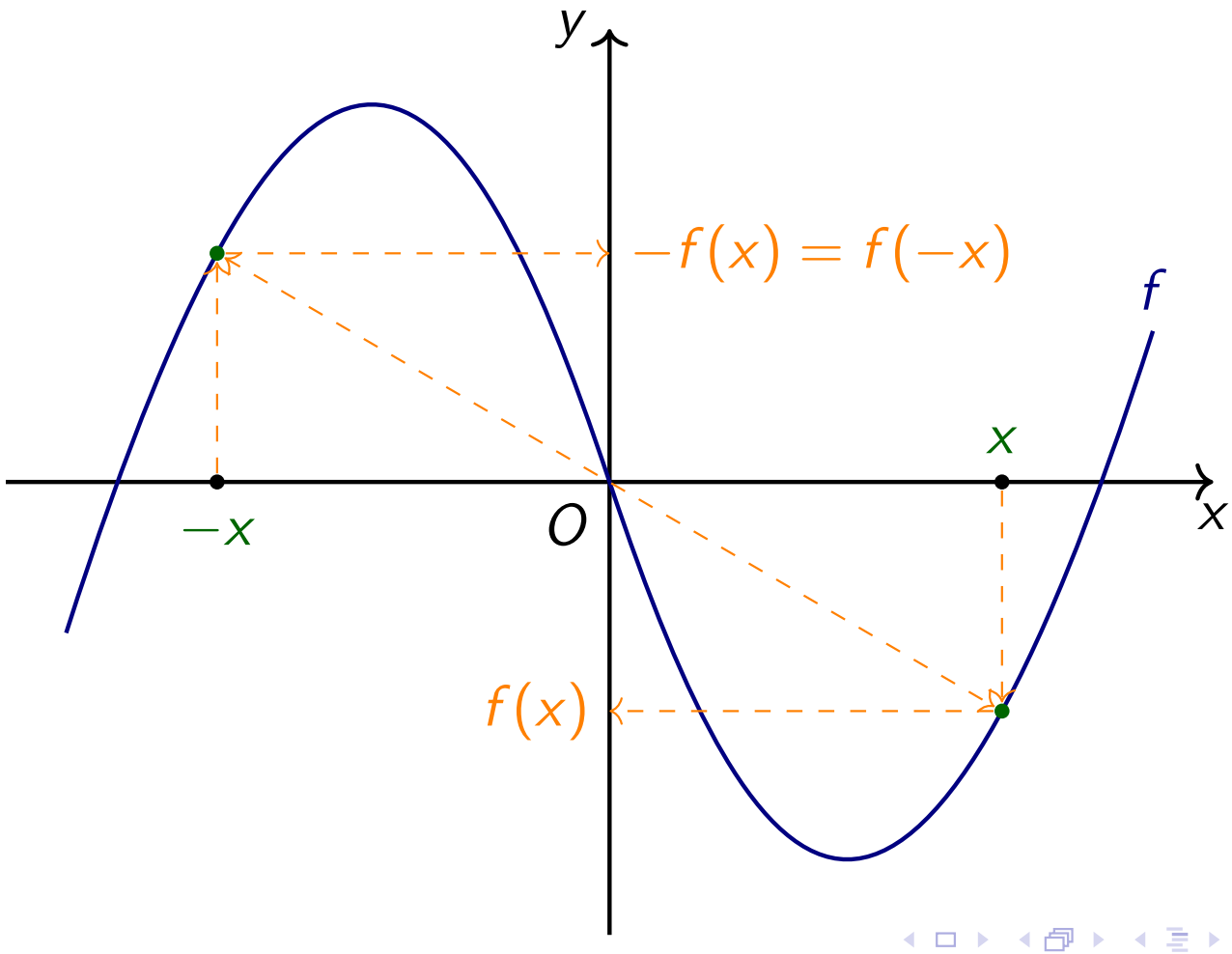
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Ανάλογα, η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu\, x$ είναι περιττή, αφού:

$$g(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu\, x = -g(x).$$

Γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Περιοδικές συναρτήσεις

Ορισμός (Περιοδική συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται περιοδική αν υπάρχει ένας αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε:

- για κάθε $x \in A$ έχουμε $x + T \in A$ και,
- $f(x + T) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κάθε τέτοιος αριθμός T λέγεται **περίοδος** της f.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}\, x$ είναι περιοδική με περόδο $T = 2\pi$, αφού:

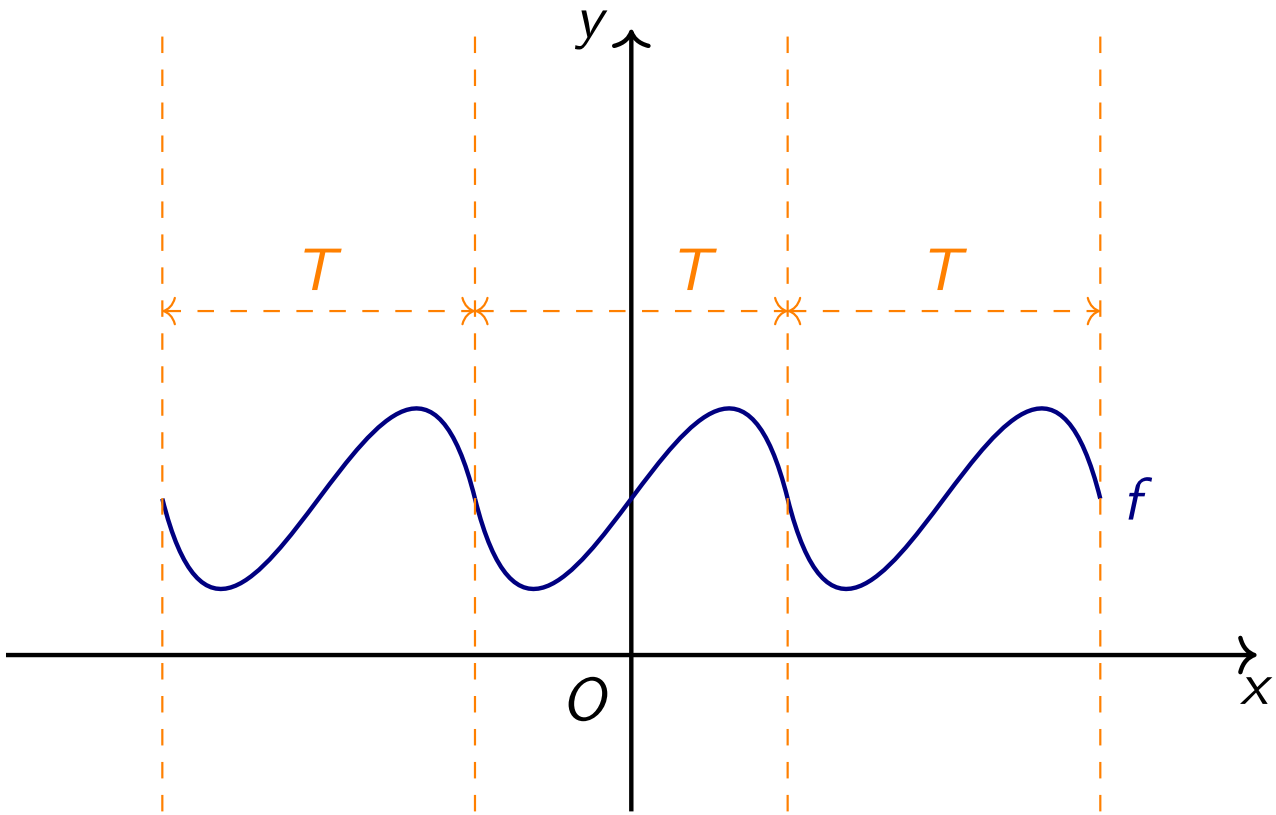
$$f(x + 2\pi) = \text{συν}(x + 2\pi) = \text{συν}\, x = f(x).$$

Ανάλογα, η συνάρτηση $g(x) = \text{εφ}\, x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$, αφού:

$$g(x + \pi) = \text{εφ}(x + \pi) = \text{εφ}\, x = g(x).$$

Γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης φαίνεται να «επαναλαμβάνεται» διαρκώς, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



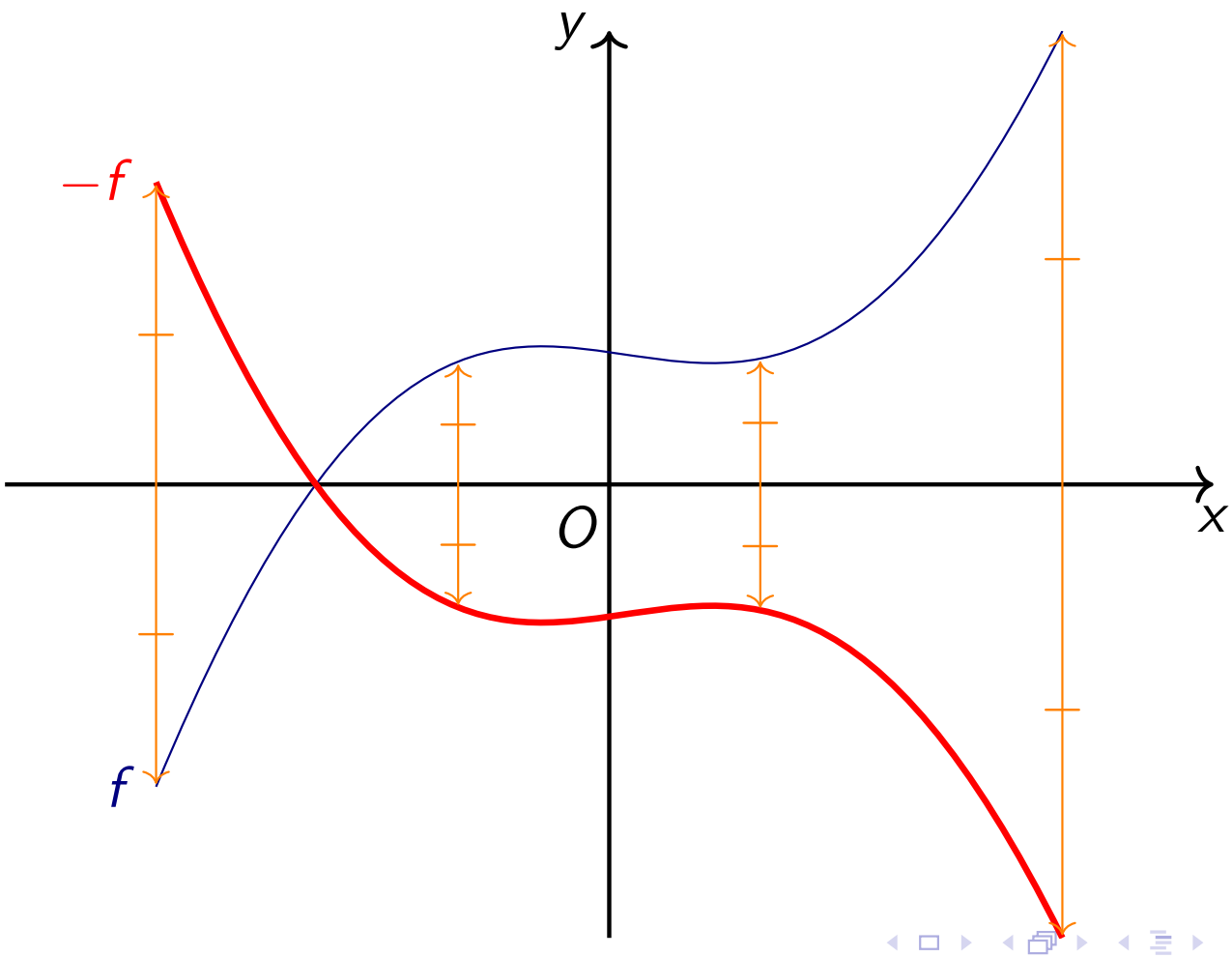
Η σχέση της σύνθεσης με τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης

Εν γένει, δεν είδαμε έως τώρα κάποια σαφή συσχέτιση ανάμεσα στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και στον τρόπο που η σύνθεση με κάποια άλλη συνάρτηση επιδρά σε αυτήν. Από μία άποψη, αυτό είναι και λογικό, μιας και τα πιθανά σενάρια είναι πάρα πολλά (π.χ. σκεφτείτε με πόσες συναρτήσεις μπορείτε να συνθέσετε την $\ln x$). Ωστόσο, κάποιες περιπτώσεις είναι πιο απλές, όπως:

- η σύνθεση μίας συνάρτησης f με την $x+4$, δηλαδή η $f(x)+4$, μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω κατά 4,
- η σύνθεση της $x-2$ με μία συνάρτηση f, δηλαδή η $f(x-2)$, μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της f προς τα δεξιά κατά 2,
- η σύνθεση μίας συνάρτησης f με την $-x$, δηλαδή η $-f(x)$, δίνει τη συμμετρική της f ως προς τον άξονα $x'x$.

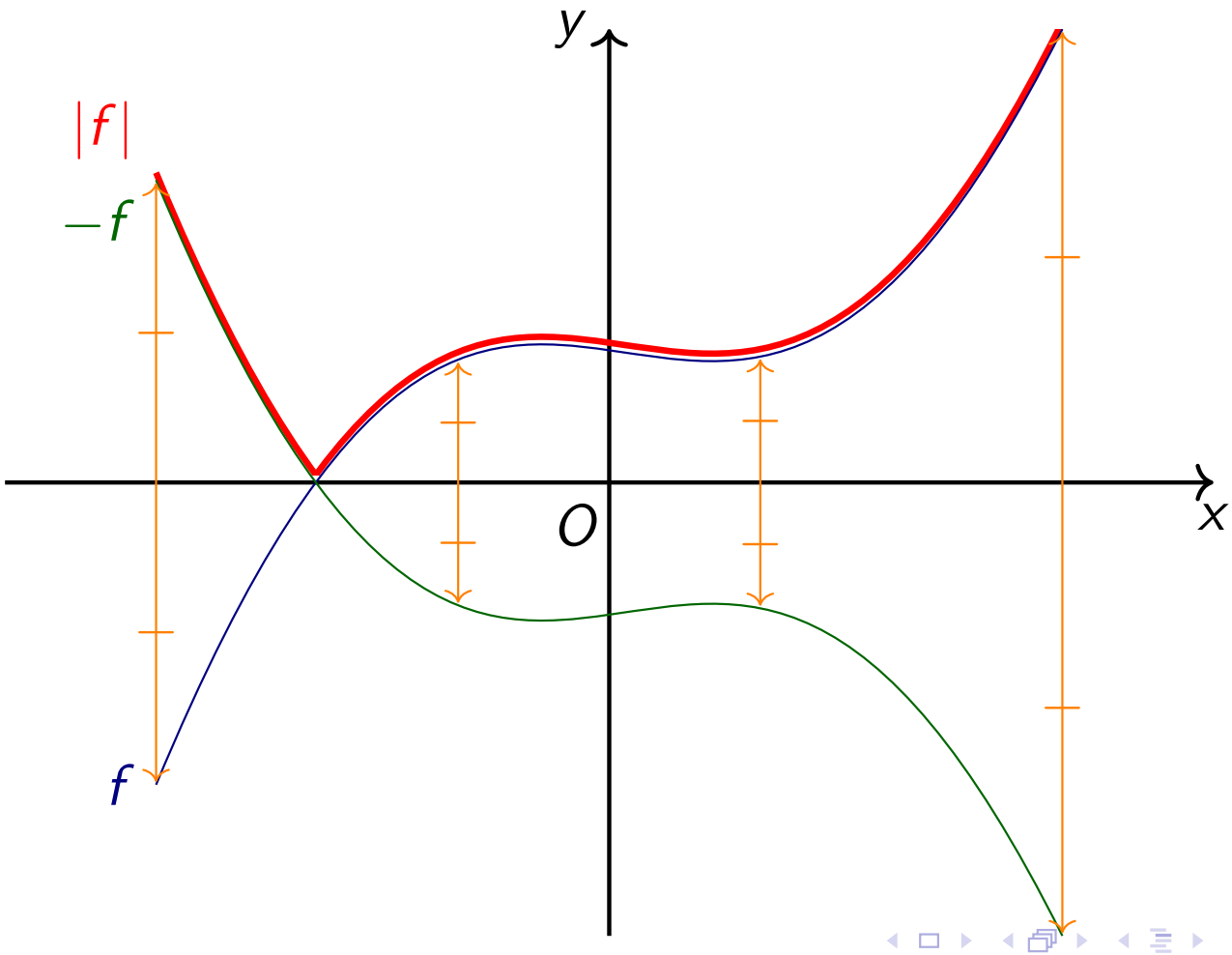
Η γραφική παράσταση της $-f$

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η γραφική παράσταση της $-f$ είναι η συμμετρική της f ως προς τον άξονα $x'x$.



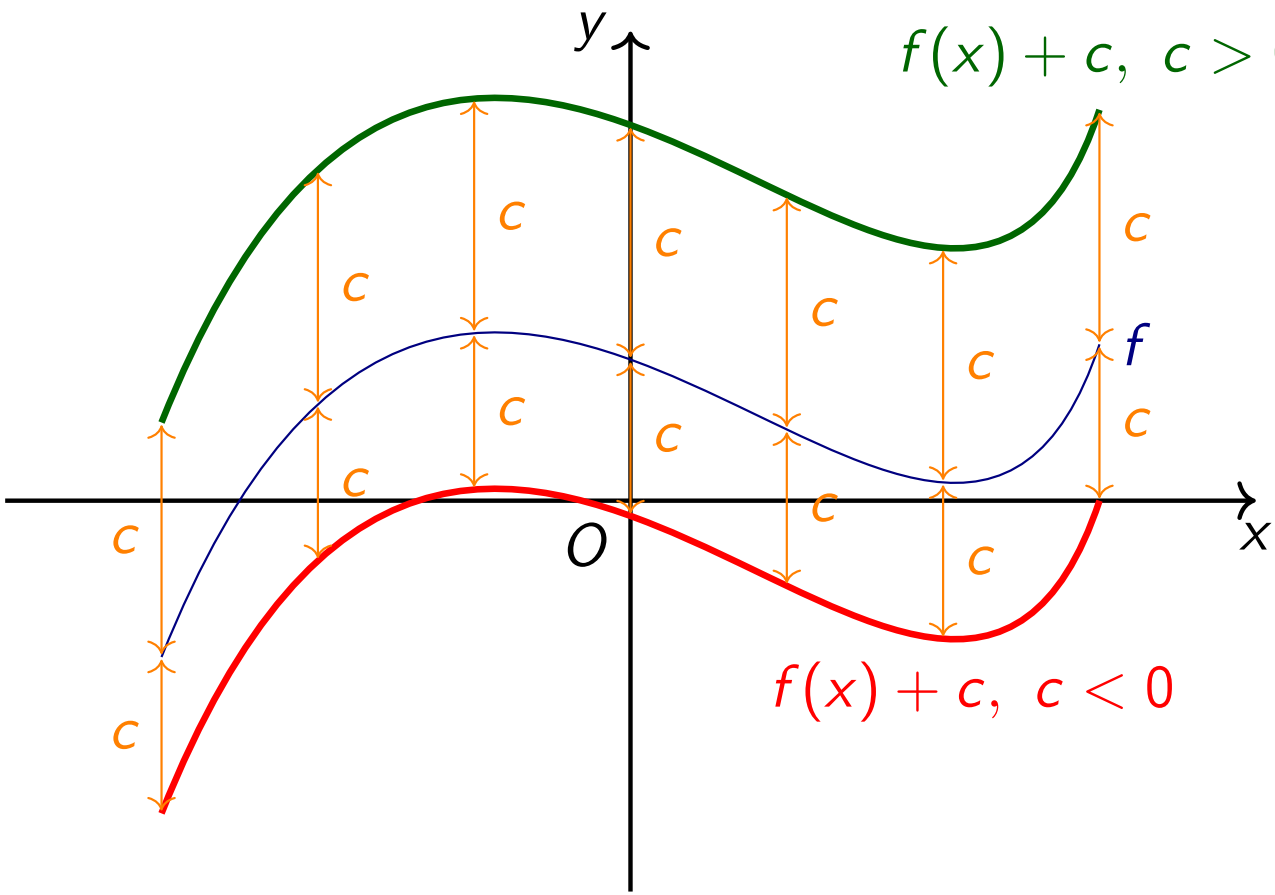
Η γραφική παράσταση της $|f|$

Η γραφική παράσταση της $|f|$ προκύπτει από αυτές των f και $-f$ κρατώντας μόνο τα τμήματά τους που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$.



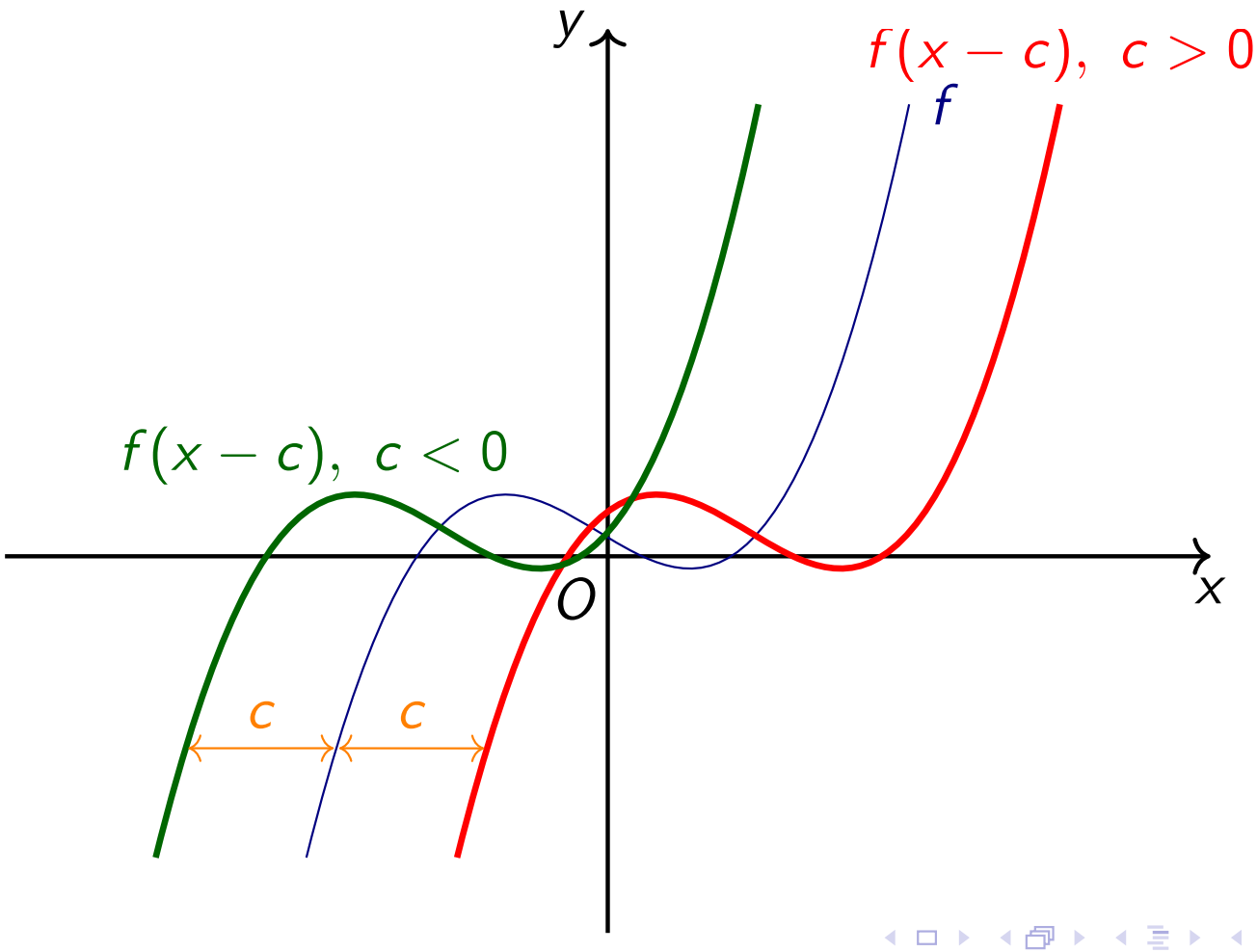
Η γραφική παράσταση της $f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της $f(x)+c$ προκύπτει μετατοπίζοντας τη C_f κατακόρυφα κατά c.



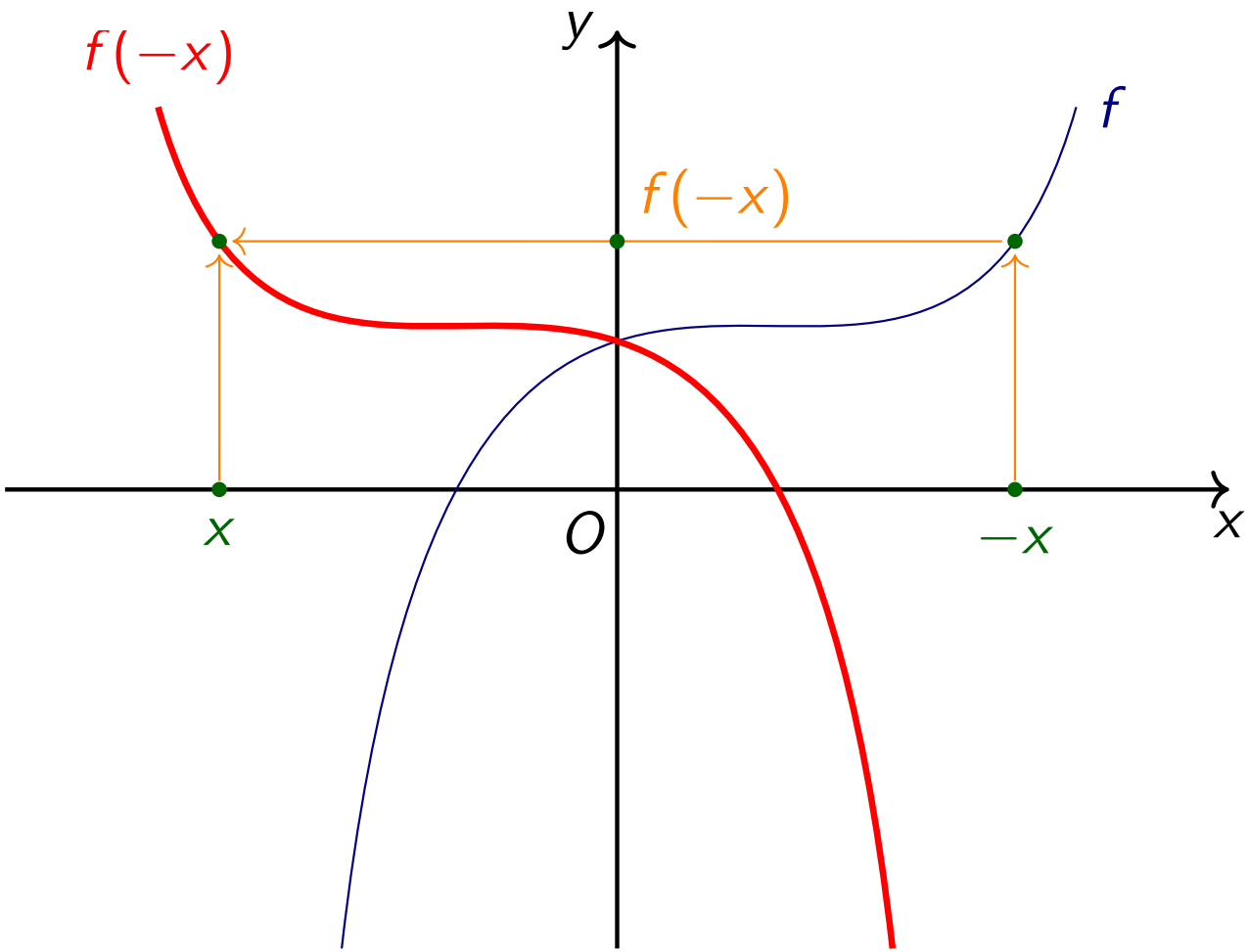
Η γραφική παράσταση της $f(x-c),\ c \in \mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της $f(x-c)$ προκύπτει μετατοπίζοντας τη C_f οριζόντια κατά c.



Η γραφική παράσταση της $f(-x)$

Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς $y'y$.



Η γραφική παράσταση της $f(|x|)$

Η γραφική παράσταση της $f(|x|)$ είναι μία λίγο πιο περίπλοκη υπόθεση. Δεδομένου ότι:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases},$$

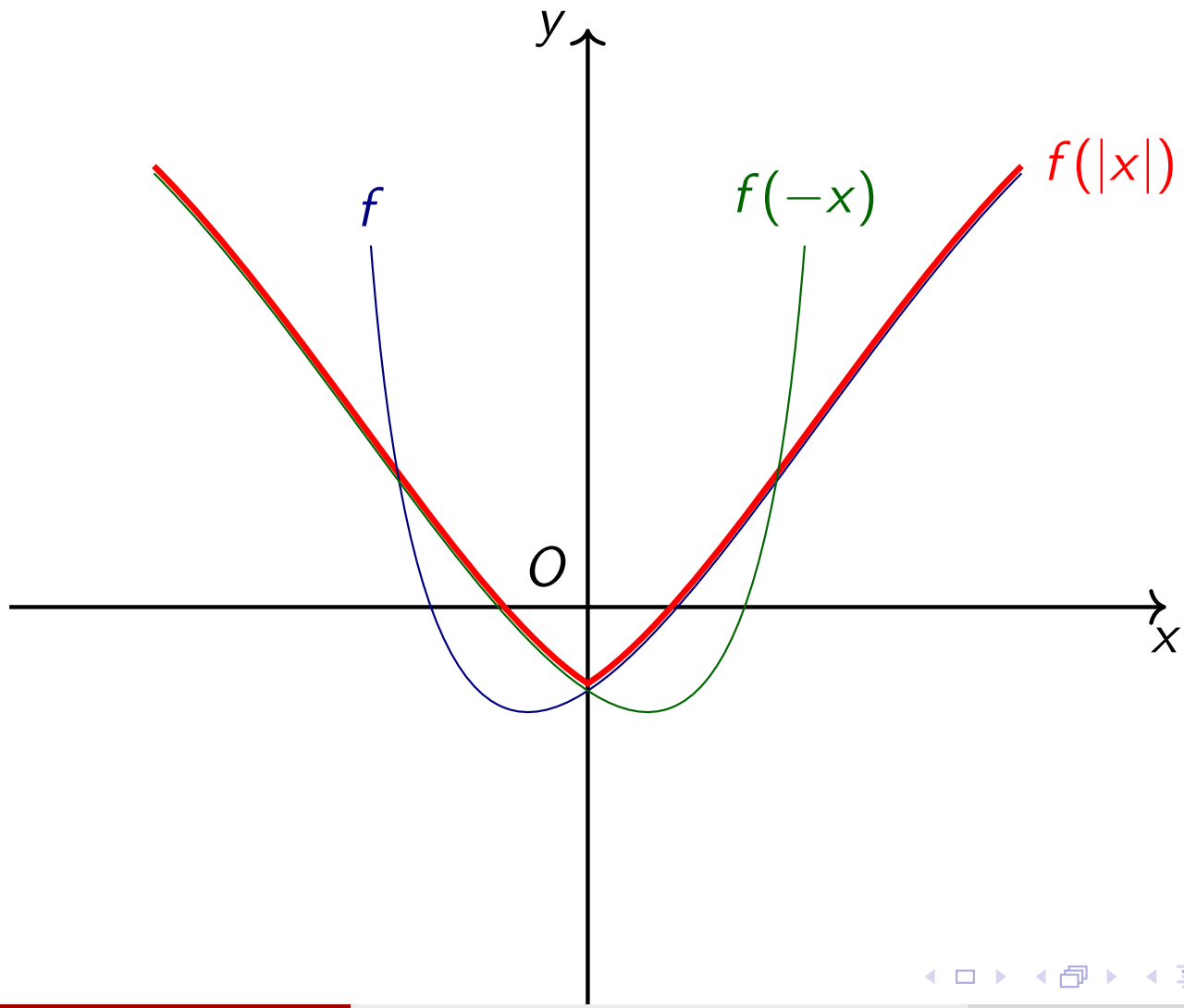
έπεται ότι η $f(|x|)$ θα έχει τύπο:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f θα συμπίπτει με αυτήν της f δεξιά του $y'y$ (δηλαδή, για $x \geq 0$), ενώ θα συμπίπτει με αυτήν της $f(-x)$ αριστερά του $y'y$ (δηλαδη, για $x < 0$).

Η γραφική παράσταση της $f(|x|)$

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



Απορίες...

Ερώτηση

Ωραία όλα αυτά, αλλά πότε έχουν νόημα; Για παράδειγμα, μπορούμε πάντα να μεταφέρουμε μία γραφική παράσταση προς τα πάνω ή προς τα κάτω ή προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά; Με άλλα λόγια, έχουν πάντα νόημα οι παραπάνω συνθέσεις; Ειδικότερα, η συνάρτηση $f(|x|)$ είναι πάντα καλά ορισμένη ή υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούμε να συνθέσουμε την $f(x)$ με την $|x|$; Αν αυτό είναι πάντα εφικτό, γιατί συμβαίνει αυτό; Αν δεν είναι, βρείτε μία συνάρτηση f για την οποία η $f(|x|)$ δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα

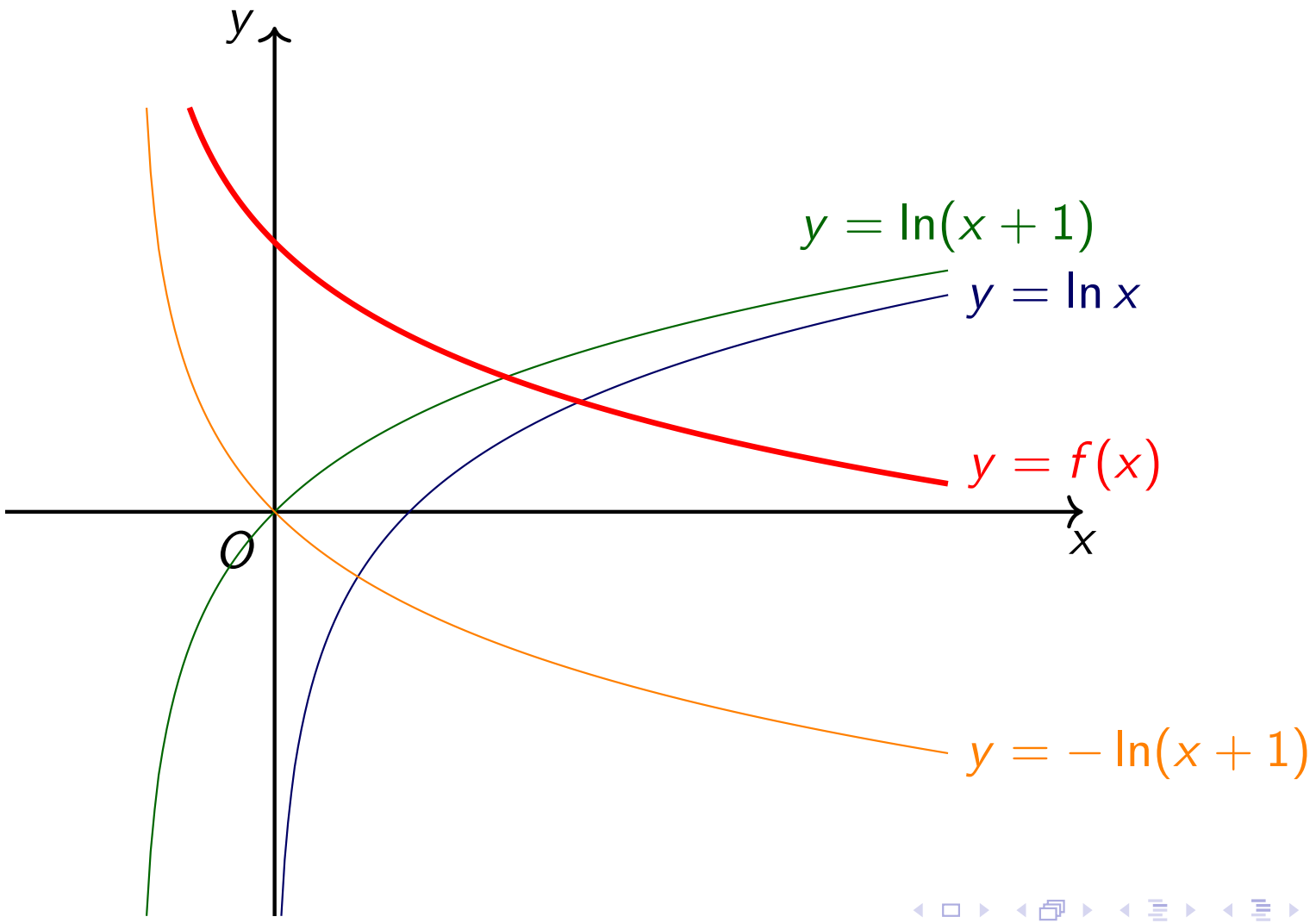
Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να σχεδιάσουμε μία πληθώρα γραφικών παραστάσεων (εντάξει, δεν είναι, δα, και πάρα πολλές, αλλά είναι ένα βήμα παρακάτω). Για παράδειγμα, θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \ln(x+1)$. Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εντοπίσουμε ποιες συνθέσεις είναι αυτές που δίνουν τη ζητούμενη συνάρτηση. Στην προκειμένη, έχουμε την εξής πορεία:

$$\ln x \to \ln(x+1) \to -\ln(x+1) \to 2 - \ln(x+1).$$

Επομένως, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$, έπειτα τη μετατοπίζουμε **αριστερά** κατά 1, έπειτα παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ και τέλος τη μεταφέρουμε **προς τα πάνω** κατά 2.

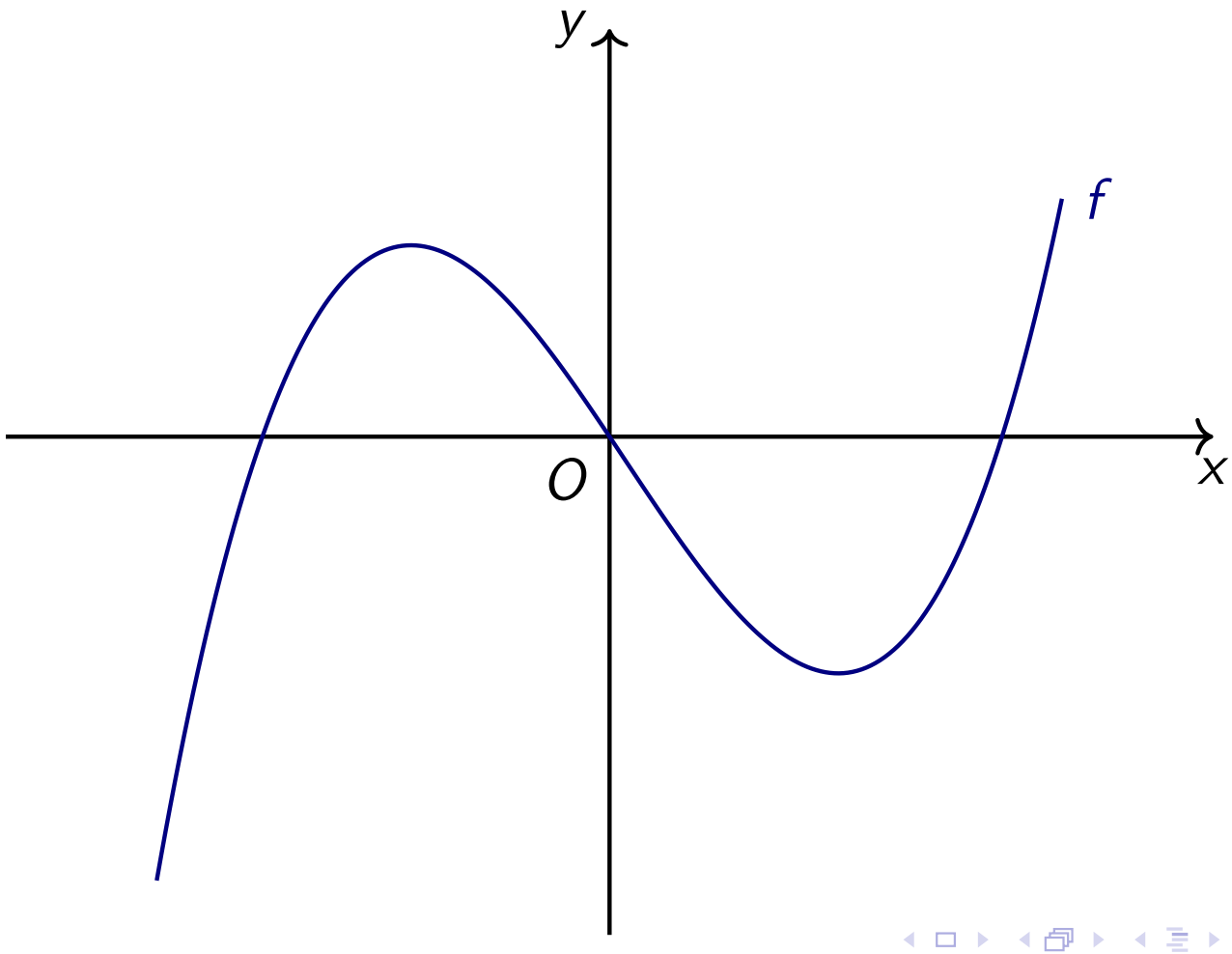
Παράδειγμα

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο παρακάτω σχήμα:



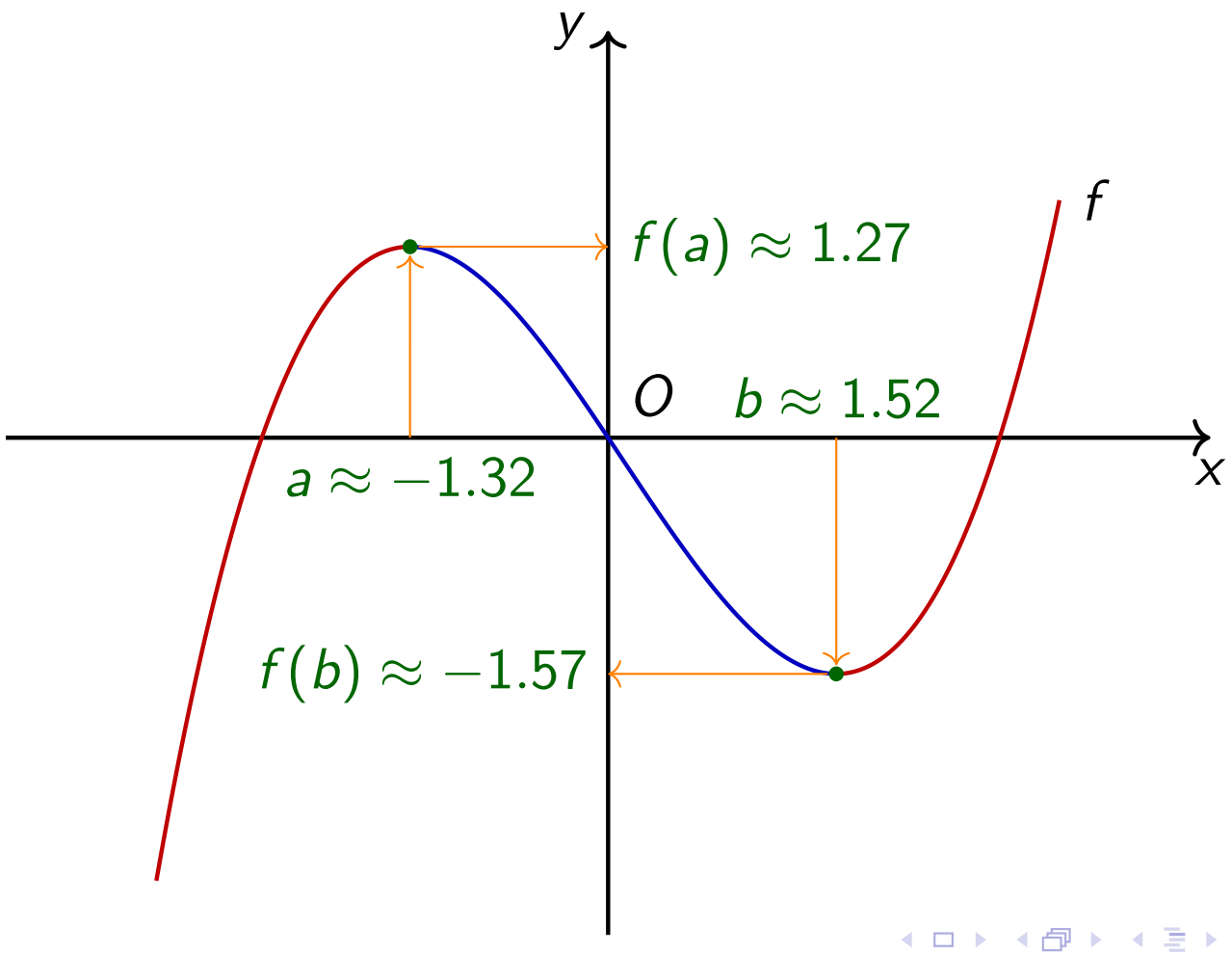
Στα πάνω και στα κάτω...

Ας παρατηρήσουμε λίγο τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του παρακάτω σχήματος:



Στα πάνω και στα κάτω...

Όπως φαίνεται, υπάρχουν διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση «ανεβαίνει» και άλλα στα οποία «κατεβαίνει»:



«Ανεβαίνει»; «Κατεβαίνει»;

Τι εννοούμε όμως με τα «ανεβαίνει» και «κατεβαίνει»; Δηλαδή, πώς θα το εκφράζαμε στα μαθηματικένια; Αν κοιτάξουμε το προηγούμενο σχήμα, τότε, αυτό το «ανεβαίνει», με λίγο πιο προσεκτικά λόγια, θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Απόπειρα ορισμού — Part 1

Καθώς το x κινείται προς τα δεξιά, το $f(x)$ κινείται προς τα πάνω.

Αλλά, τι πάει να πει «κινείται»; Κουνιούνται οι αριθμοί από τη θέση τους; Μάλλον όχι! Είναι όμως το x αριθμός; Το $f(x)$; Όπως έχουμε πει, τα x και $f(x)$ είναι **μεταβλητές**, που παίρνουν διάφορες τιμές.

Ανεβοκατεβαίνοντας...

Επομένως, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον «ορισμό» ως εξής:

Απόπειρα ορισμού — Part 2

Καθώς η x παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, η $f(x)$ παίρνει επίσης όλο και μεγαλύτερες τιμές.

Τι είναι όμως η μεταβλητή, αν δεν είναι αριθμός; Επίσης, ξεφορτωθήκαμε την «κίνηση» των αριθμών; Μάλλον όχι, αφού εκεί στον ορισμό υπάρχει ένα «καθώς» και μία γενικότερη έκφραση που υποδηλώνει «κίνηση». Για παράδειγμα, η έκφραση «όλο και μεγαλύτερες τιμές» αφ' ενός υποδηλώνει μία κίνηση, αφ' ετέρου δεν είναι και αρκετά αυστηρή για να είναι έκφραση στα μαθηματικένια.

Αλτ!

Ωστόσο, μπορούμε να εκφράσουμε τα ίδια πράγματα και πιο στατικά, υπό το εξής σκεπτικό:

- η έκφραση «καθώς η x παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές» μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «για κάθε δύο τιμές x_1, x_2 με $x_1 < x_2$»,
- η έκφραση «η $f(x)$ παίρνει επίσης όλο και μεγαλύτερες τιμές» μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$».

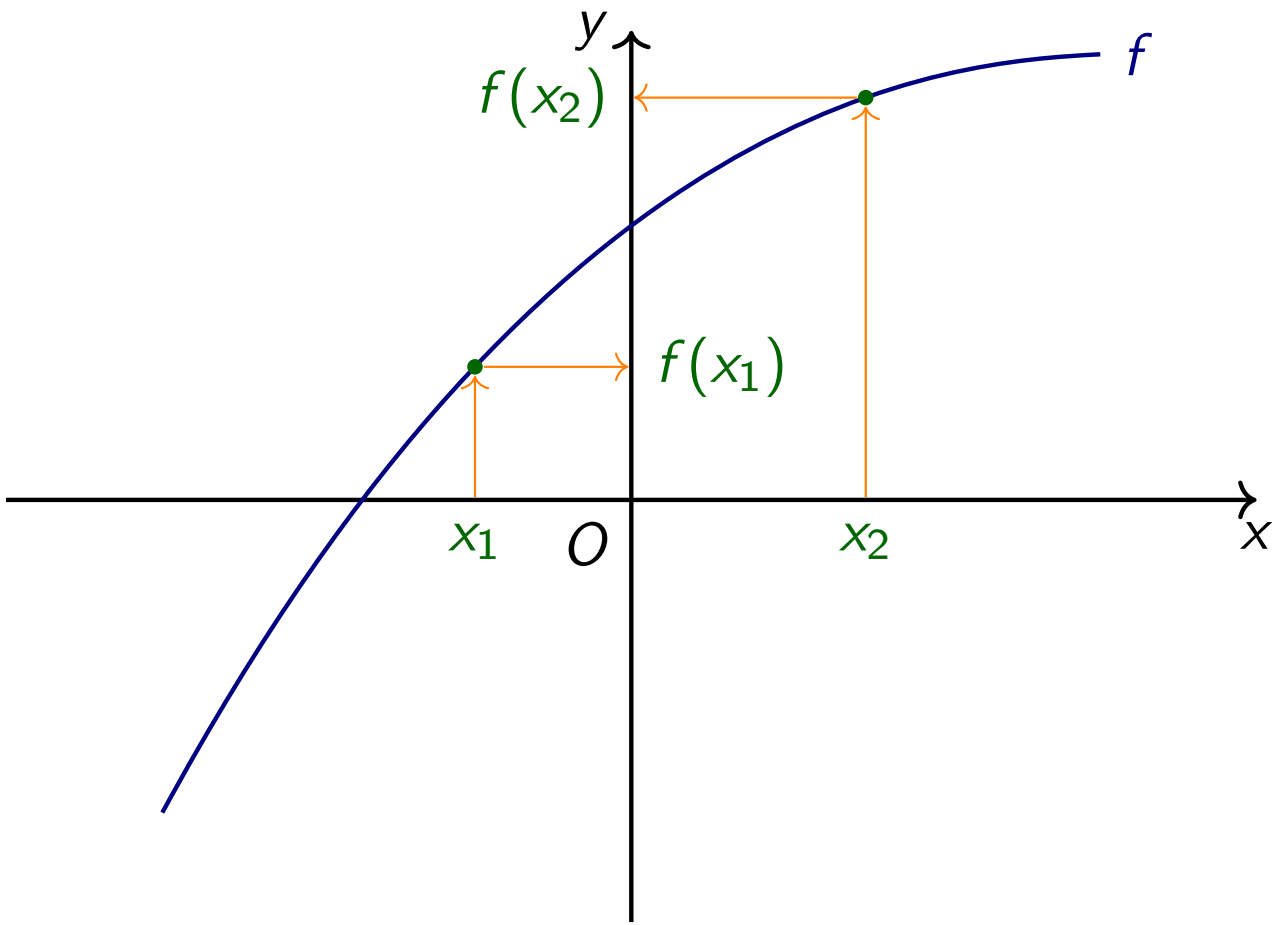
Αυτή η σκέψη οδηγεί στον ακόλουθο τυπικό ορισμό:

Ορισμός (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$.

Εποπτική ερμηνεία

Για να δούμε τώρα γιατί ο ορισμός ανταποκρίνεται στην αρχική μας εικόνα, μπορούμε να ρίξουμε μια ματιά στο παρακάτω σχήμα:



Γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις

Ανάλογα με τα παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε και τον ορισμό του «κατεβαίνειν»:

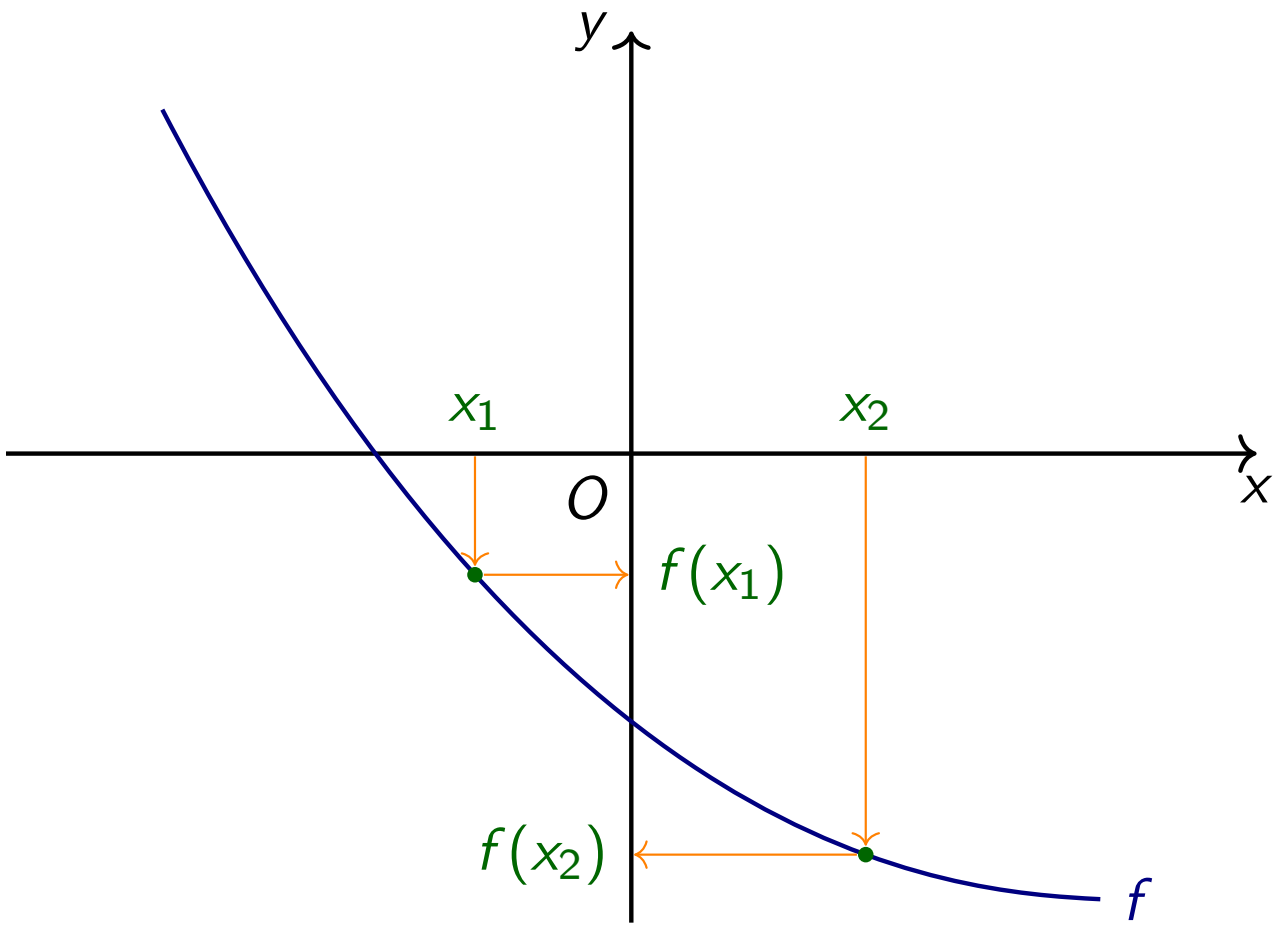
Ορισμός (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$.

Παρατηρήστε ότι η μόνη ουσιαστική διαφορά είναι ότι ο εδώ, όσο παίρνουμε μεγαλύτερες τιμές για την x $(x_1 < x_2)$ η $f(x)$ παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές $(f(x_1) > f(x_2))$.

Εποπτική ερμηνεία

Ανάλογα με την άλλη περίπτωση, η εποπτική ερμηνεία του ορισμού φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Παραδείγματα

- Η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 4$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 + 4 < 2x_2^3 + 4,$$

δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Προσοχή!

Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, πρέπει να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2)),$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$. Ο συνηθέστερος τρόπος είναι να «χτίζουμε» τη δεξιά ανισότητα ξεκινώντας από την αριστερή.

Παραδείγματα

- Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \tag{5}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2. \tag{6}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις, παίρνουμε:

$$e^{-x_1} - 2x_1 > e^{-x_2} - 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα

- Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) + 3 = x,$$

τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, έστω, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, θα υπάρχουν δύο $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$ αλλά $f(x_1) \geq f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) + 3 \geq f(x_2) + 1 \tag{7}$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) \geq f^3(x_2). \tag{8}$$

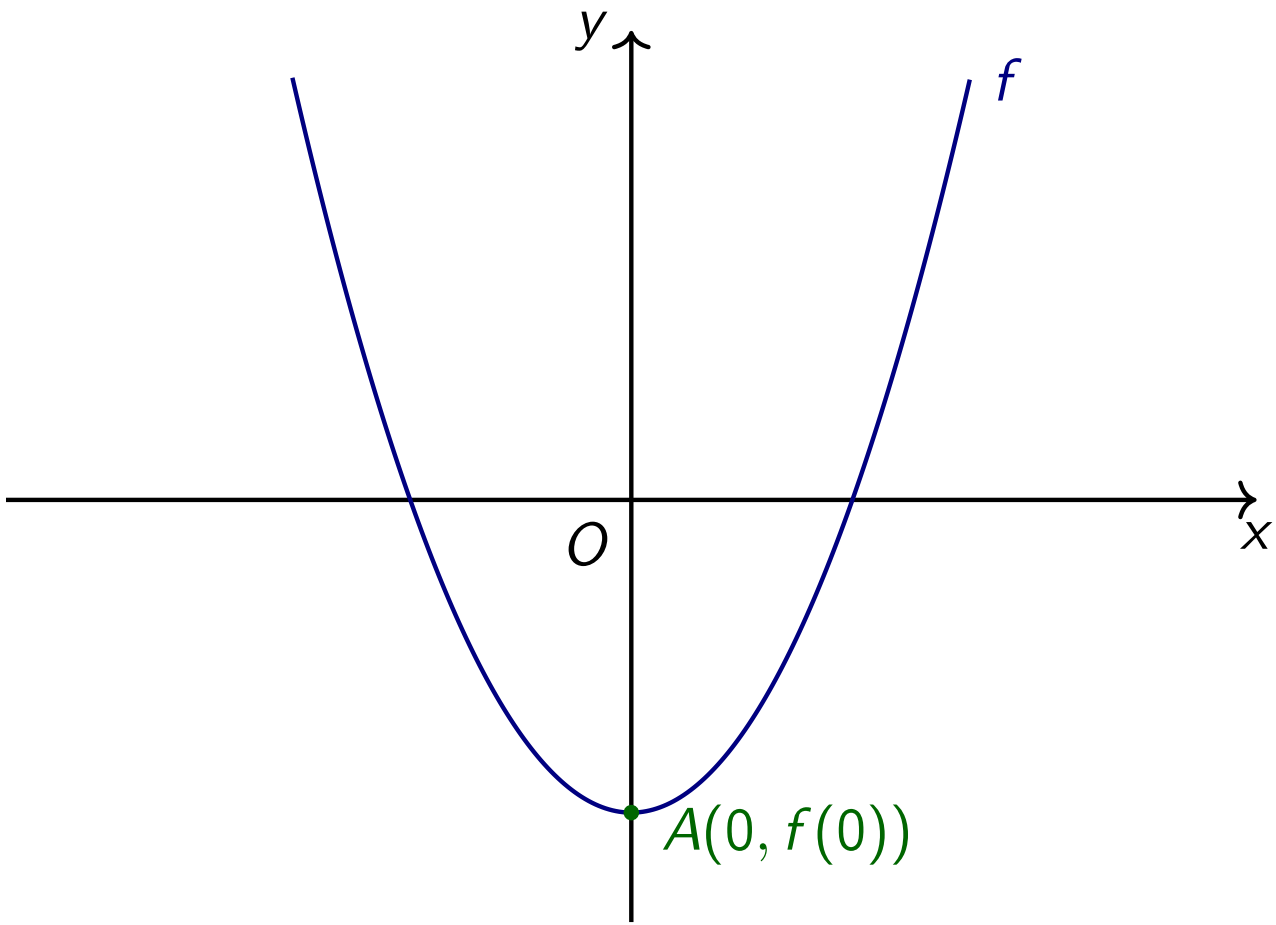
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις έπεται ότι:

$$f^3(x_1) + f(x_1) + 3 \geq f^3(x_2) + f(x_2) + 3 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

άτοπο, αφού $x_1 < x_2$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ολικά ακρότατα

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



Ολικό ελάχιστο

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα σημείο, το $A(0,-2)$ το οποίο έχει την ιδιότητα να είναι το «χαμηλότερο» σημείο της C_f. Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται όλη πάνω από την ευθεία $y=-2$, ή, με ακόμα διαφορετικότερα λόγια, $f(x)\geq -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σε αυτό το σημείο θα λέμε ότι η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο**. Επίσημα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός (Ολικό ελάχιστο)

Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in A$ το $f(x_0)$ αν για κάθε $x\in A$ ισχύει ότι:

$$f(x)\geq f(x_0).$$

Ολικό μέγιστο

Εντελώς ανάλογα έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός (Ολικό μέγιστο)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2 - x^4$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 2$ αφού:

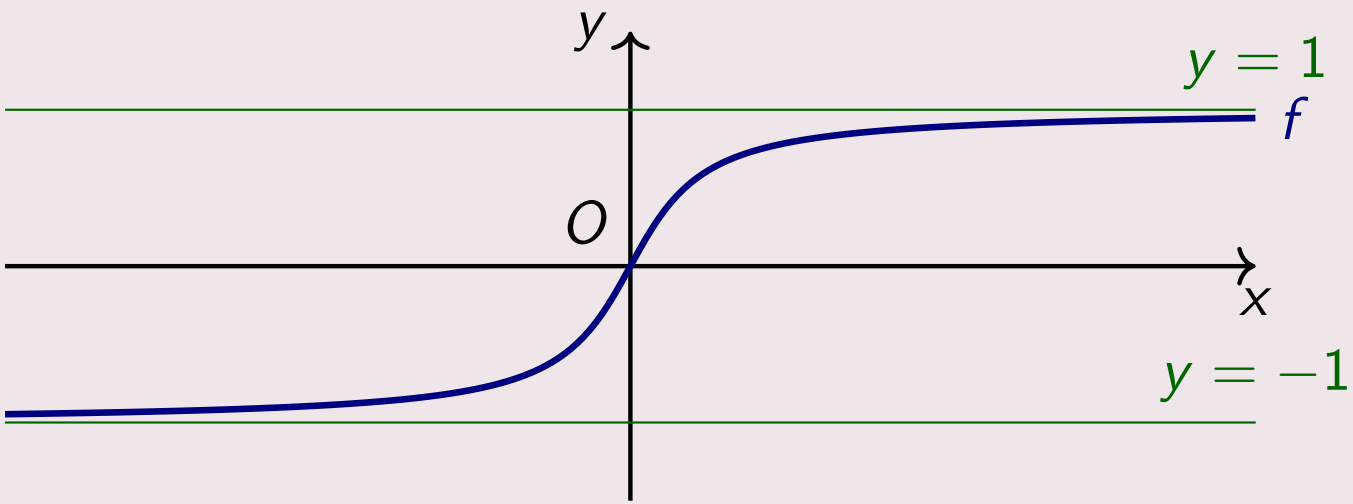
$$x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -x^4 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - x^4 \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0).$$

Επίσης, η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}\, x$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάθε $x_k = 2k\pi + \pi$ το $f(x_k) = -1$ και ολικό μέγιστο σε κάθε $y_k = 2k\pi$ το $f(y_k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απορία

Ερώτηση

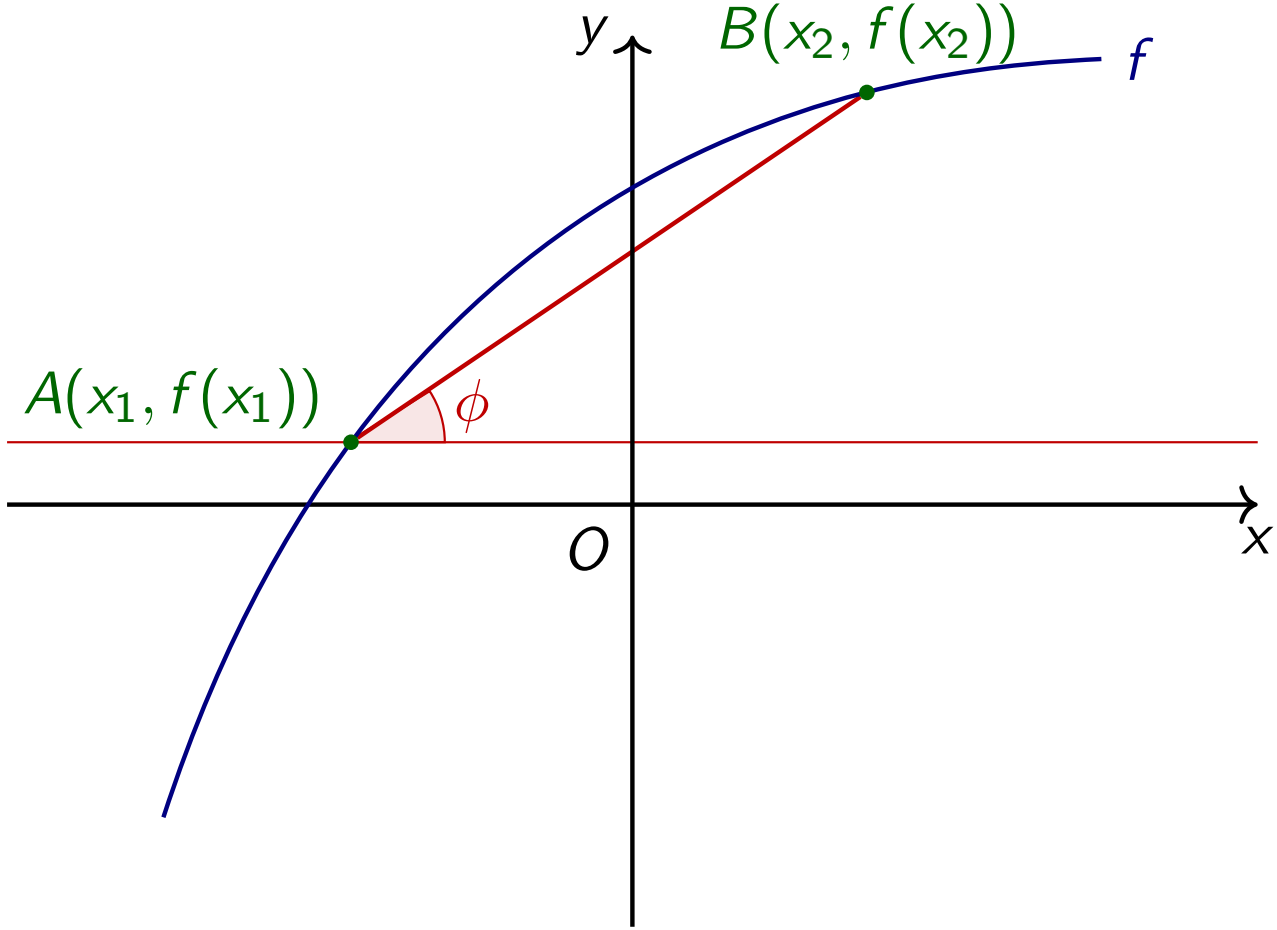
Ας πάρουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με γραφική αυτή που φαίνεται παρακάτω:



Είναι εμφανές ότι $-1 \leq f(x) \leq 1$, ωστόσο, παρουσιάζει η f ολικό μέγιστο/ελάχιστο; Εξηγήστε κατάλληλα την απάντησή σας.

Μια άλλη ματιά για την μονοτονία

Ας πάρουμε τη γραφική παράσταση μίας γνησίως αύξουσας συνάρτησης και μία χορδή AB, όπως παρακάτω:



Κλίση και μονοτονία

Η κλίση λ της χορδής AB, με άλλα λόγια ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι ίσος με:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\,\phi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Να παρατηρήσουμε τώρα ότι, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η γωνία ϕ θα είναι πάντα οξεία (αλλιώς θα έπρεπε το B να πέφτει χαμηλότερα από το A). Όμως, μία οξεία γωνία έχει πάντοτε θετική εφαπτομένη, επομένως:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\,\phi > 0 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0.$$

Έχουμε επιλέξει το $x_2 > x_1$, επομένως ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος είναι θετικός, άρα, αφού είναι όλο το κλάσμα θετικό, πρέπει να έχουμε και:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Μονοτονία revisited

Αυτό που βρήκαμε παραπάνω είναι ότι, αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε, αν $x_1 < x_2$ άμεσα έπεται και ότι $f(x_1) < f(x_2)$ που είναι ακριβώς ο ορισμός που δώσαμε προηγουμένως.

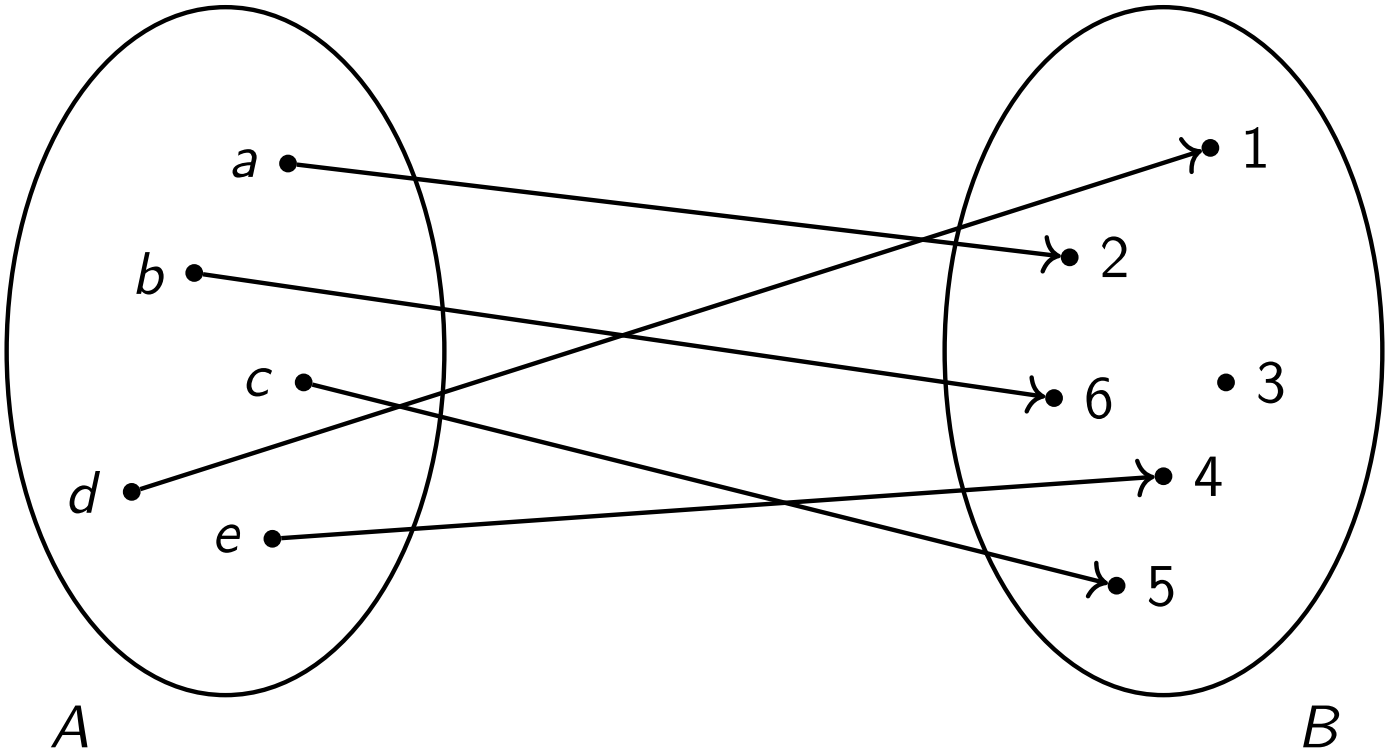
Προσέξτε ότι η ιδέα της κλίσης της χορδής ήταν πολύ χρήσιμο εργαλείο στην παραπάνω ανάλυση, γεγονός που θα φανεί και στο άμεσο μέλλον ιδιαίτερα χρήσιμο.

Ερώτηση

Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία και για μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση; Δηλαδή, μπορείτε χρησιμοποιώντας χορδές και τη γραφική παράσταση μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης να καταλήξετε στον ορισμό που δώσαμε παραπάνω;

'Ενας μ' έναν...

Ας πάρουμε τη συνάρτηση f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



'Ενας μ' έναν...

Η παραπάνω συνάρτηση έχει την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα: αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του συνόλου A σε ένα διαφορετικό στοιχείο του B. Με άλλα λόγια, αν πάρουμε δύο διαφορετικά στοιχεία του A, λ.χ. το a και το c, τότε θα πάρουμε και δύο διαφορετικές τιμές της συνάρτησης — στην περίπτωσή μας τις $f(a) = 2$ και $f(c) = 5$.

Επομένως, η f αντιστοιχίζει τα στοιχεία του A της με αυτά του συνόλου τιμών της **ένα προς ένα** — δηλαδή, κάθε στοιχείο στο σύνολο τιμών της «προέρχεται» από ακριβώς ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού της.

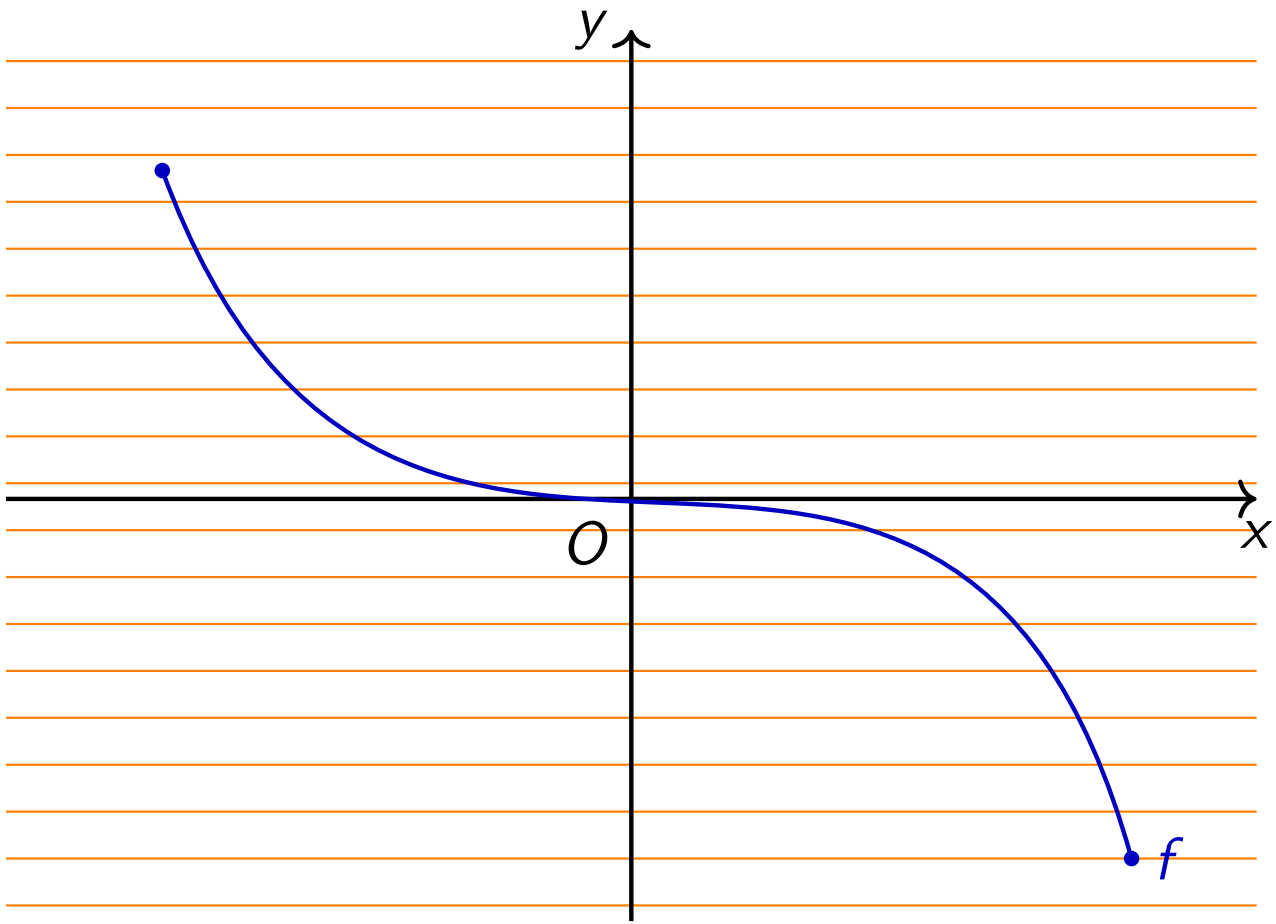
Ορισμός (Συνάρτηση «1-1»)

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται «1-1» (ένα προς ένα) αν για κάθε δύο $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Εποπτική ερμηνειά του «1-1»

Εποπτικά, μία συνάρτηση που είναι «1-1» τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία (της μορφής $y = c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$) **το πολύ σε ένα** σημείο:



Παράδειγμα

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x - 1$ και έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε θα ισχύει και ότι $4x_1 \neq 4x_2$ (πράγματι, αν δεν ίσχυε ότι $4x_1 \neq 4x_2$, τότε θα ίσχυε ότι $4x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, που είναι άτοπο).

Ανάλογα, ισχύει και ότι $4x_1 - 1 \neq 4x_2 - 1$ (πράγματι, αν δεν ίσχυε ότι $4x_1 - 1 \neq 4x_2 - 1$, τότε θα ίσχυε ότι $4x_1 - 1 = 4x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, που είναι άτοπο), επομένως έχουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».

Το παραπάνω παράδειγμα αναδεικνύει και τη δυσκολία του χειρισμού του ορισμού του «1-1», μιας και δεν είναι εύκολο να μεταχειριστούμε το $\neq$ και να φτιάξουμε σχέσεις με αυτό, γι' αυτό και είμαστε συνεχώς αναγκασμένοι να μεταφράζουμε το ζητούμενο σε ισότητα και να το απορρίπτουμε. Αυτό το πρόβλημα θα το λύσουμε χρησιμοποιώντας ένα νέο εργαλείο· την αντιθετοαντιστροφή.

Αντιθετοαντιστροφή

Ας πάρουμε την ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\textbf{Αν } \underbrace{\text{είχα φτερά}}_{A} \textbf{ τότε } \underbrace{\text{θα πετούσα,}}_{B}$$

την οποία, για συντομία θα γράφουμε $A \Rightarrow B$. Σε απλά ελληνικά, η παραπάνω συνεπαγωγή μας λέει ότι το να έχεις φτερά σημαίνει ότι πετάς **χωρίς όμως να μας λέει ότι το να μην έχει φτερά σημαίνει ότι δεν πετάς** (υπάρχουν και τα αεροπλάνα).

Επομένως, δεν είναι αναγκαίο το να έχει κανείς φτερά για να πετάξει, αλλά αν έχει φτερά τότε είναι **ικανός** να πετάξει. Πώς αλλιώς μπορούμε να το πούμε αυτό;

Αντιθετοαντιστροφή

Συνεχίζοντας την κουβέντα για τα πετάγματα, από τα παραπάνω μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι το να **μην πετάς** σημαίνει ότι **δεν έχεις φτερά** (αν είχες, θα πέταγες). Έτσι, το να μην πετάει κανείς είναι ικανή συνθήκη έτσι ώστε να μην έχει φτερά. Ωστόσο, δεν είναι αναγκαίο να μην πετάς για να μην έχεις φτερά (σκεφτείτε τα ελικόπτερα — πετάνε αλλά δεν έχουν φτερά). Έτσι, ένας άλλος τρόπος για να αναφερθούμε στη συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ είναι να πούμε:

$$\textbf{Αν } \underbrace{\text{δεν πετάς}}_{\text{όχι } B} \textbf{ τότε } \underbrace{\text{δεν έχεις φτερά}}_{\text{όχι } A}.$$

Με άλλα λόγια, η συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ είναι λογικά ισοδύναμη με τη συνεπαγωγή $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Αντιθετοαντιστροφή

Μετά τα παραπάνω δίνουμε τον ορισμό της αντιθετοαντιστροφής:

Ορισμός (Αντιθετοαντιστροφή)

Αν $A \Rightarrow B$ είναι μία λογική συνεπαγωγή, τότε η συνεπαγωγή:

$$(\neg B) \Rightarrow (\neg A),$$

λέγεται **αντιθετοαντίστροφη** της $A \Rightarrow B$.

Για παράδειγμα, η αντιθετοαντίστροφη της «Αν βρέξει τότε θα πάρω ομπρέλλα» είναι η «Αν δεν έχω πάρει ομπρέλλα τότε δε θα έχει βρέξει».

Προσοχή!

Η αντιθετοαντίστροφη της αντιθετοαντίστροφης της $A \Rightarrow B$ είναι η ίδια η $A \Rightarrow B$, αφού η $(\neg(\neg A))$ είναι η ίδια η A (για περισσότερα, εδώ.)

Απορίες. . .

Ερώτηση

Μπορείτε να εξηγήσετε πώς προκύπτει ο όρος «αντιθετοαντίστροφη», λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο που από την $A \Rightarrow B$ καταλήγουμε στην $(\neg B) \Rightarrow (\neg B)$;

Ερώτηση

Κατά την αντιθετοαντιστροφή, ξεκινάμε από μία συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ και καταλήγουμε σε μία άλλη, λογικά ισοδύναμη, συνεπαγωγή της μορφής $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. Στην «απαγωγή σε άτοπο», θέλουμε να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ και, για να το πετύχουμε αυτό, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, B, ενώ ισχύει η υπόθεση, A, και καταλήγουμε σε μία αντίφαση (συνήθως ότι δεν ισχύει η υπόθεση A). Μπορείτε να εντοπίσετε κάποιες ομοιότητες και κάποιες διαφορές ανάμεσα στην απαγωγή σε άτοπο και την αντιθετοαντιστροφή;

Αντιθετοαντίστροφο του «1-1»

Έτσι, για το «1-1» έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι «1-1» αν και μόνον αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Προσοχή!

Για μία «1-1» συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει η **ισοδυναμία**:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

για κάθε $x_1, x_2 \in A$. Η ευθεία συνεπαγωγή. $\Rightarrow$, ισχύει γιατί η f είναι συνάρτηση, ενώ η αντίστροφη, $\Leftarrow$, γιατί είναι «1-1».

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x-1} + 3$ και έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow e^{2x_1-1} + 3 = e^{2x_2-1} + 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{2x_1-1} = e^{2x_2-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

επομένως, η f είναι «1-1».

«Κακό» παράδειγμα

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^x$. Αν επίσης επιλέξουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$x_1^3 + e^{x_1} = x_2^3 + e^{x_2} \Leftrightarrow ;$$

Όπως βλέπετε, δεν μπορούμε να πάμε παρακάτω και να καταλήξουμε στο συμπέρασμα $x_1 = x_2$, τουλάχιστον όχι με κάποιον προφανή τρόπο. Γι' αυτό θα χρησιμοποιούμε το εξής:

Λήμμα

Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση, τότε η f είναι και «1-1».

Διαισθητικά, αυτό είναι προφανές αφού μία γνησίως μονότονη συνάρτηση τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα σημείο (δεν μπορεί να «επιστρέψει» στο ίδιο «ύψος»).

Απόδειξη του λήμματος

Απόδειξη.

- Υποθέτουμε, αρχικά, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
  - Υποθέτουμε, προς άτοπο ότι δεν είναι «1-1». Επομένως, υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.
    - Αν $x_1 < x_2$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(x_1) < f(x_2)$, άτοπο!
    - Αν $x_1 > x_2$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(x_1) > f(x_2)$, άτοπο!
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε εργαζόμαστε αναλόγως.

□

Ξορκίζοντας το «κακό»

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x) = x^3 + e^x$ είναι γνησίως μονότονη. Έστω, λοιπόν, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \tag{9}$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}. \tag{10}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), παίρνουμε:

$$x_1^3 + e^{x_1} < x_2^3 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και «1-1».

Κι άλλη απορία...

Ερώτηση

Ας πάρουμε μία συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι «1-1». Ορίζουμε την αντιστοίχιση $g : f(A) \to A$ η οποία αντιστοιχίζει το $f(x)$ «πίσω» στο x από τον οποίο «προέκυψε». Έχουμε δει ότι αυτή η αντιστοίχιση, εν γένει, δεν είναι συνάρτηση. Στην προκειμένη περίπτωση όμως, είναι; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

Γύρνα πίσω!

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ η οποία είναι «1-1» (ως γνησίως αύξουσα). Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$ και ότι η αντιστοίχιση $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με:

$$\sqrt{x} \overset{g}{\mapsto} x,$$

είναι συνάρτηση. Πράγματι, για κάθε τετραγωνική ρίζα $\sqrt{a}$ υπάρχει **ακριβώς ένας** αριθμός x για τον οποίο να ισχύει ότι $\sqrt{x} = \sqrt{a}$ (με άλλα λόγια, η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι «1-1»).

Ποιος είναι, όμως, ο «τύπος» της g; Δηλαδή $g(x) =$; Μετά από λίγη σκέψη βλέπουμε ότι η $g(x) = x^2$, $x \geq 0$, κάνει αυτή τη δουλειά, αφού:

$$g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Γύρνα πίσω! Vol. 2

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ η οποία είναι «1-1» (ως γνησίως αύξουσα). Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$ και ότι η αντιστοίχιση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$e^x \overset{g}{\mapsto} x,$$

είναι συνάρτηση. Πράγματι, για κάθε «εκθετικό» e^a υπάρχει **ακριβώς ένας** αριθμός x για τον οποίο να ισχύει ότι $e^x = e^a$ (με άλλα λόγια, η $f(x) = e^x$ είναι «1-1»).

Ποιος είναι, όμως ο τύπος της g; Δηλαδή $g(x) =$; Κι εδώ, μετά από λίγη σκέψη βλέπουμε ότι η $g(x) = \ln x$, κάνει αυτή τη δουλειά, αφού:

$$g(e^x) = \ln e^x = x.$$

Έφτασε...

Ας πάρουμε τώρα μία συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι «1-1». Τότε, εξ ορισμού, για κάθε $x \in A$ **υπάρχει μοναδικό** $y \in f(A)$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι: **Για κάθε** $y \in f(A)$ **υπάρχει ένα και μοναδικό** $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Ας θυμηθούμε τώρα κι αυτό:

Ορισμός (Συνάρτηση)

Μία αντιστοίχιση $f : A \to B$ ονομάζεται συνάρτηση αν αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο $a \in A$ σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο $b \in B$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο το συμβολίζουμε με $f(a)$ και το καλούμε **τιμή** της συνάρτησης f στο a. Επίσης, το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με D_f, ενώ το σύνολο B **πεδίο τιμών** ή **σύνολο αφίξεως** της f.

Ορισμός της αντίστροφης

Από τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι η αντιστοίχιση g που επιστρέφει το $f(x)$ «πίσω» στο x είναι μία συνάρτηση, δεδομένου ότι η f είναι «1-1». Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός (Αντίστροφη)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία «1-1» συνάρτηση. Η συνάρτηση $g : f(A) \to A$ με:

$$f(x) \overset{g}{\mapsto} x$$

λέγεται **αντίστροφη** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Μία συνάρτηση που είναι «1-1» θα λέγεται και «αντιστρέψιμη».

Ιδιότητες της αντίστροφης

Μία σχέση που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό είναι ότι, για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Επίσης, αν πάρουμε ένα $qx \in f(A)$ τότε ισχύει ότι:

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Προσοχή!

Στις σχέσεις $f(f^{-1}(x)) = x$ και $f^{-1}(f(x)) = x$, το x δεν ανήκει στο ίδιο σύνολο. Στη μία ανήκει στο σύνολο τιμών της f (αφού θέλουμε πρώτα να υπολογίσουμε το $f^{-1}(x)$), ενώ στην άλλη βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f (αφού θέλουμε να υπολογίσουμε πρώτα το $f(x)$).

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3$ είναι «1-1» (άσκηση). Για να βρούμε την αντίστροφή της πρέπει για κάθε $y \in \mathbb{R}$ να βρούμε ένα x τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως, λύνουμε ως προς x την εξίσωση:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}.$$

Έτσι, $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ ή, αλλάζοντας το x με το y:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

«1-1» revisited

Ερώτηση

Έχουμε πει ότι μία συνάρτηση είναι «1-1» αν και μόνον αν κάθε οριζόντια ευθεία της μορφής $y = c$ τέμνει τη γραφική της παράσταση **το πολύ σε ένα σημείο**. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση ως προς x για κάθε $c \in \mathbb{R}$. Έχοντας αυτό κατά νου, συγκρίνετε τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, μέσω της οποία δείξαμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3$ έχει αντίστροφη τη συνάρτηση $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$, με το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού του «1-1». Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές βλέπετε; Αν έχουμε βρει την αντίστροφη μίας συνάρτησης, έχουμε δείξει και ότι αυτή είναι «1-1» ή πρέπει πάντα πρώτα να αποδεικνύουμε ότι μία συνάρτηση είναι «1-1» και μετά να αναζητούμε την αντίστροφή της;

Σύνολο τιμών αντιστρέψιμης συνάρτησης

Είδαμε ότι, εξ ορισμού, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f είναι το **σύνολο τιμών** της f. Έτσι, αν έχουμε μία συνάρτηση «1-1», μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της βρίσκοντας το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, τότε για να βρούμε την αντίστροφή της, έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y}.$$

Επομένως, $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, επομένως και το σύνολο τιμών της f θα είναι το:

$$f(D_f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Άλλο ένα παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$. Για να βρούμε την αντίστροφή της, έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x + 1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 1.$$

Επομένως $f^{-1}(x) = x^2 - 1$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Ε; Πώς γίνεται να είναι το σύνολο τιμών της f όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f(x) = \sqrt{x+1} \geq 0$; Ας παρατηρήσουμε ότι ξεχάσαμε κάτι. Ξεκινώντας να λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$ είχαμε $\sqrt{x+1} = y$, οπότε, έχουμε και τον επιπρόσθετο περιορισμό $y \geq 0$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $[0, +\infty)$, επομένως:

$$f(D_f) = [0, +\infty).$$

Γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης

Αν πάρουμε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, τότε, όπως έχουμε πει, η γραφική της παράσταση είναι το σύνολο:

$$C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

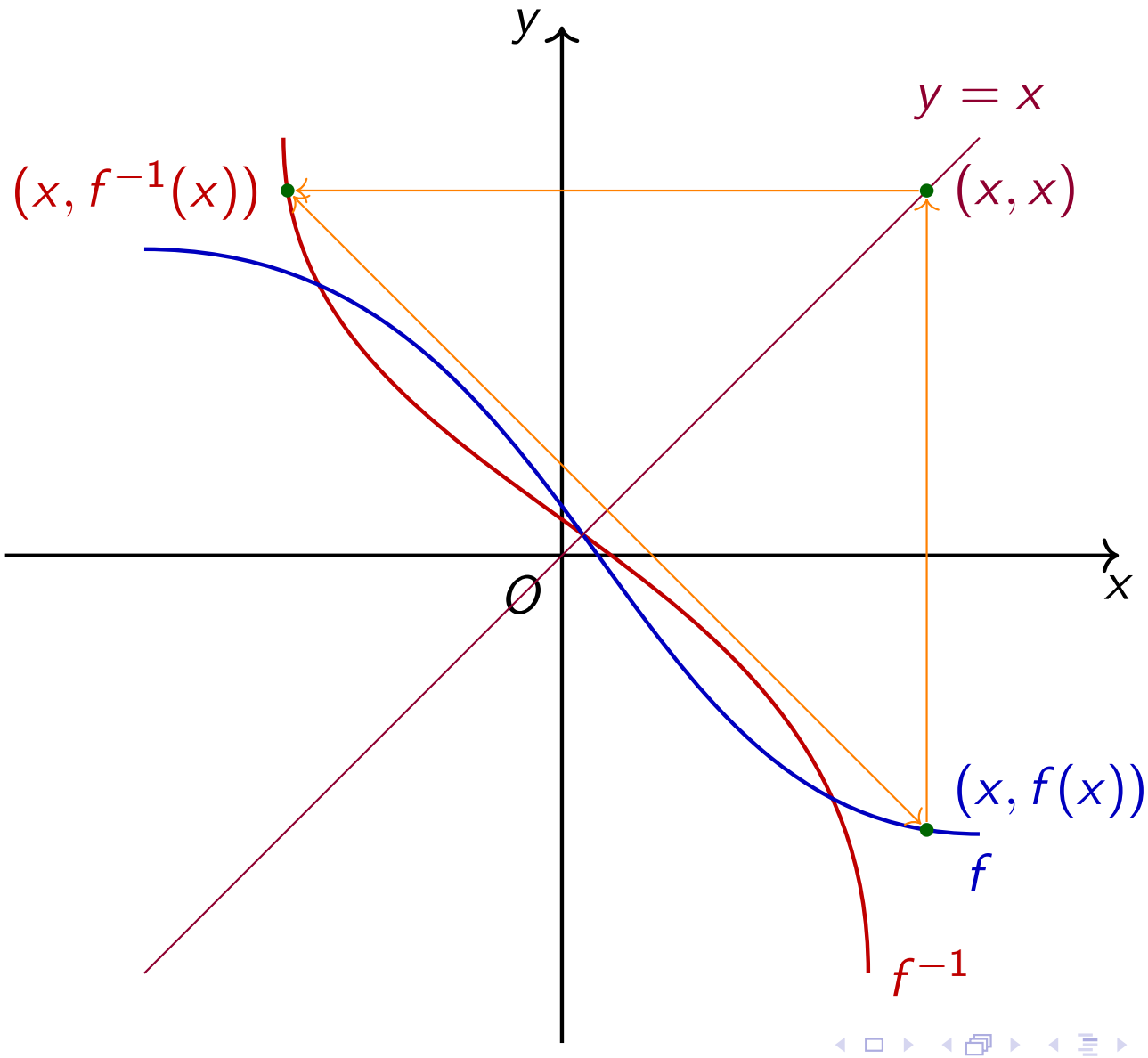
Δηλαδή, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f έχουν όλα τη μορφή $(x, f(x))$. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, τότε και τα σημεία της $C_{f^{-1}}$ θα έχουν όλα την μορφή $(y, f^{-1}(y))$, για κάποιο $y \in f(A)$.

Όμως, ισχύει ότι για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ (αφού η f είναι αντιστρέψιμη), επομένως, τα σημεία της γραφική παράστασης της f έχουν τη μορφή:

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$

Δηλαδή, αν το $M(a, b)$ είναι σημείο της C_f, τότε το $N(b, a)$ είναι σημείο της $C_{f^{-1}}$. Συνεπώς, οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y = x$.

Συμμετρία των C_f και $C_{f^{-1}}$



Μονοτονία της f^{-1}

Λήμμα (Μονοτονία αντίστροφης)

Αν η $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι γνησίως μονότονη και το $f(\Delta)$ είναι διάστημα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Απόδειξη.

- Υποθέτουμε, αρχικά, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
  - Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η f^{-1} **δεν** είναι γνησίως αύξουσα, οπότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.
  - Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, δηλαδή $y_1 \geq y_2$, άτοπο. Επομένως, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- Εργαζόμαστε ανάλογα αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

□

Κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

Λήμμα (Κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$)

Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση, όπου Δ είναι ένα διάστημα, τότε τα κοινα σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται επί της $y = x$. Δηλαδή:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Απόδειξη.

- Έστω, $A(a, b)$ κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$, οπότε $b = f(a) = f^{-1}(a)$ και έστω, προς άτοπο, ότι $a \neq b$.
- Αν $a < b$, τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(a) < f(b) \Leftrightarrow b < f(f^{-1}(a)) \Leftrightarrow b < a$, άτοπο.
- Αν $a > b$, τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(a) > f(b) \Leftrightarrow b > f(f^{-1}(a)) \Leftrightarrow b > a$, άτοπο.

□