

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μέθοδος της εφαπτομένης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

(Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ της ΕΜΕ, Β ΛΥΚΕΙΟΥ, 2010) Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση: Ισχύει

$$\frac{(2x+1)^2}{x} \geq \frac{15}{4}x + 5, \quad (1)$$

για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $x = 2$.

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με $4x > 0$ και αναπτύσσοντας το τετράγωνο στα αριστερά, έχουμε ισοδύναμα

$$4(4x^2 + 4x + 1) \geq 15x^2 + 20x \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0,$$

που αληθεύει για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $x = 2$.

Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} &\geq \left(\frac{15}{4}x + 5\right) + \left(\frac{15}{4}y + 5\right) \\ &= \frac{15}{4}(x+y) + 10 \\ &= \frac{15}{4} \cdot 4 + 10 \\ &= 25, \end{aligned}$$

με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $x = y = 2$.

Σχόλια:

- (α) Για να βρούμε την παραπάνω ανισότητα (1) χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της εφαπτομένης. Θεωρήσαμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{(2x+1)^2}{x} = 4x + 4 + \frac{1}{x},$$

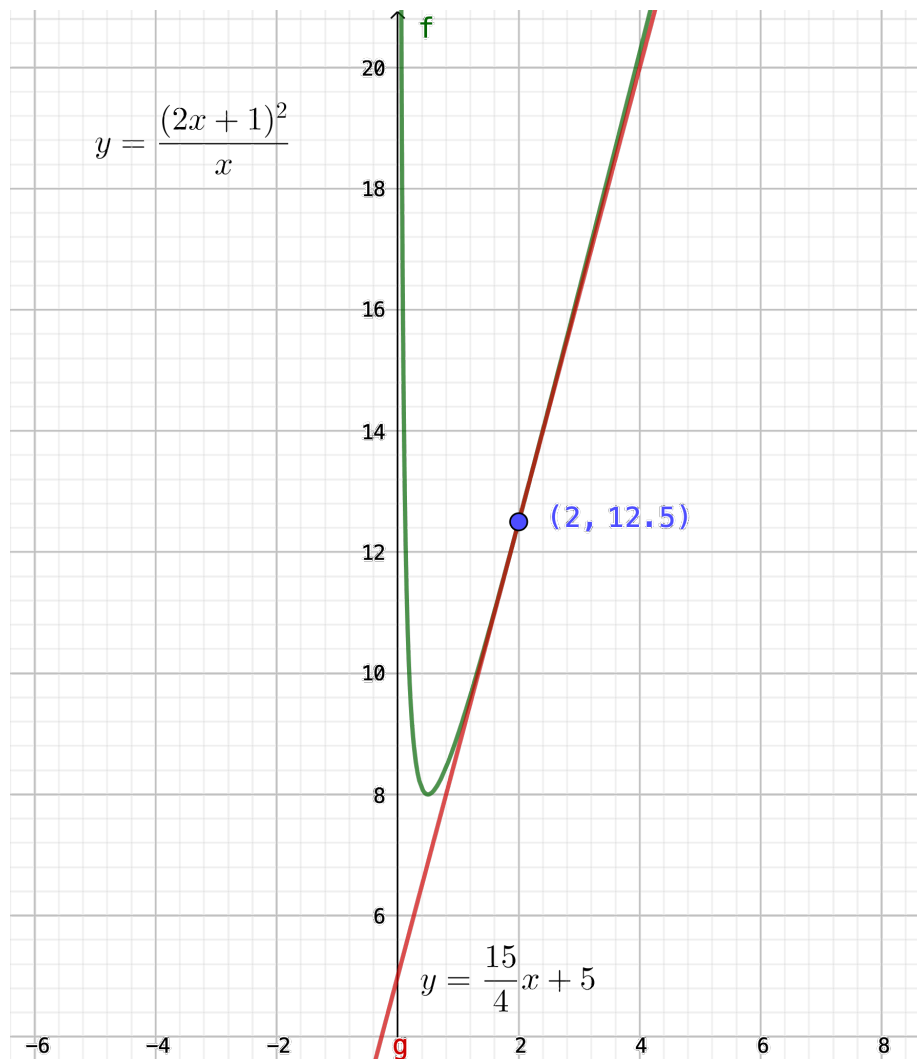
για $x > 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με $x = 2$ (το σημείο στο οποίο ισχύει η ισότητα της ανισότητας που καλούμαστε να αποδείξουμε), έχει εξίσωση

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2).$$

Είναι $f(2) = \frac{25}{4}$, και $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, οπότε $f'(2) = \frac{15}{4}$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$y - \frac{25}{4} = \frac{15}{4}(x - 2) \iff y = \frac{15}{4}x + 5.$$

Υποψιαζόμαστε, λοιπόν, ότι η γραφική παράσταση της f θα είναι *πάνω* από την εφαπτομένη της και έτσι παίρνουμε την (1), την οποία αποδείξαμε στοιχειωδώς. Δείτε και το παρακάτω σχήμα:



(β) Πως θα μπορούσαμε να επινοήσουμε την (1) χωρίς παραγώγους;

Σκεφτόμαστε ότι ψάχνουμε μια ανισότητα της μορφής

$$\frac{(2x+1)^2}{x} \geq mx + k \iff (4-m)x^2 + (4-k)x + 1 \geq 0.$$

η οποία να ισχύει ως ισότητα για $x = 2$. Αρκεί το τριώνυμο $(4-m)x^2 + (4-k)x + 1$ να έχει διπλή ρίζα το $x = 2$. Τότε $2k + 4m = 25$ και αφού $\Delta = 0$, θα είναι και $k^2 - 8k + 4m = 0$. Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} 2k + 4m = 25, \\ k^2 - 8k + 4m = 0 \end{cases}$$

βρίσκουμε εύκολα $k = 5$ και $m = 15/4$.