Γιάννης Θωμαΐδης

Δρ. Μαθηματικών – τ. Σχολικός Σύμβουλος

Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

1. Θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις του ζητήματος

1.1. Jean Piaget & Ronaldo Carcia: Νοητική ανάπτυξη και ιστορική εξέλιξη

1.2. Hans Freudenthal: Εκ νέου επινόηση των μαθηματικών εννοιών

1.3. Gaston Bachelard & Guy Brousseau: Επιστημολογικά εμπόδια

1.4. Ένα πρώτο χαρακτηριστικό παράδειγμα

1.5. Μια ανασκόπηση και δύο κριτικά ερωτήματα

2. Ένα ειδικό πεδίο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής: Η περίπτωση της Άλγεβρας

2.1. Έρευνες για τη μάθηση αλγεβρικών εννοιών και ιστορικοί παραλληλισμοί

2.2. Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό παράδειγμα

3. Μερικές πρόσφατες εξελίξεις και συμπεράσματα

Βιβλιογραφικές αναφορές

Θεσσαλονίκη 2021

Εισαγωγή [1]

Οι συζητήσεις για τη σχέση ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση εμφανίζονται από τις αρχές του 20ου αιώνα με όρους ενός «παραλληλισμού» και με πρόθεση να συμβάλουν στη βελτίωση της διδασκαλίας και μάθησης. Αυτή η έννοια του «παραλληλισμού» στηρίχτηκε σε μια μεταφορά, στο χώρο της εκπαίδευσης, του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» του Ernst Haeckel (1834–1919) σύμφωνα με τον οποίο η οντογένεση (δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια βραχεία επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους). Η μεταφορά χρησιμοποιήθηκε αρκετές φορές από εξέχοντες μαθηματικούς για να υποστηριχτεί ότι αν η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους, τότε θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί κατά κάποιο τρόπο την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της τελευταίας. [2]

Στην κατεύθυνση αυτή έχουν γίνει σημαντικές εξελίξεις, που εκτείνονται από την ανάπτυξη μιας ορθολογικής βάσης για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, μέχρι και συγκεκριμένες προτάσεις «γενετικών» μεθόδων διδασκαλίας και παραγωγή διδακτικού υλικού. Παράλληλα όμως έχουν διατυπωθεί αμφιβολίες για τη δυνατότητα λειτουργικής ένταξης ιστορικών στοιχείων στην τρέχουσα πρακτική της σχολικής τάξης των Μαθηματικών. Το πιο σημαντικό έργο στο οποίο καταγράφονται όλες οι παραπάνω εξελίξεις θεωρείται μέχρι σήμερα ο συλλογικός τόμος *History in Mathematics Education*, που εκδόθηκε στη σειρά μελετών της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Fauvel & Maanen 2000). Οι εργασίες που αναφέρονται σε επισκοπήσεις, αναθεωρήσεις και ειδικές πτυχές του ζητήματος συγκροτούν ήδη μια ευρεία βιβλιογραφική βάση δεδομένων, στην οποία μπορούν να γίνουν ορισμένες επιλεκτικές και απολύτως ενδεικτικές παραπομπές (Θωμαΐδης & Καστάνης 1987,

[1] Το κείμενο που ακολουθεί αποτελεί επικαιροποίηση και επέκταση μιας προηγούμενης και ομότιτλης εργασίας του συγγραφέα, που είχε δημοσιευτεί το 2014 στο θεματικό τεύχος «Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση» του περιοδικού *Επιστήμες της Αγωγής* (Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Κρήτης). Η παρούσα μορφή περιλαμβάνει επίσης υλικό που χρησιμοποιήθηκε σε διάλεξη του συγγραφέα στο Σεμινάριο Διδακτικής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης στις 10 Μαρτίου 2021.

[2] Την άποψη αυτή υποστήριξαν από τα τέλη του 19ου και σε όλη τη διάρκεια του 20ου αιώνα πολλοί κορυφαίοι μαθηματικοί, μεταξύ των οποίων οι Henri Poincaré, Felix Klein, George Pólya και René Thom. Βασικό κίνητρο όλων αυτών ήταν η αντίθεση και η αντίδραση στο φορμαλισμό και την αξιωματικοποίηση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που είχε αρχίσει να εκδηλώνεται (αρχικά στα Πανεπιστήμια) από τις αρχές του 20ου αιώνα.

Thomaidis 1991, Jahnke 1994, Otte & Seeger 1994, Fried 2001, Nooney 2002, Furinghetti & Radford 2002, Ζορμπαλά & Τζανάκης 2003, Grattan–Guinness 2005, Βερυκάκη & Καστάνης 2006, Θωμαΐδης & Τζανάκης 2006, Κολέζα 2006, ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. 2009, Jankvist 2009, Tzanakis & Thomaidis 2012, Kjeldsen 2014, Bråting & Pejlare 2015).

Εκτός από τις αναζητήσεις για «άμεση» διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια διαρκώς αυξανόμενη διείσδυση της τελευταίας στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η ιστορική γνώση παρουσιάζεται ως πηγή ενόρασης για τα πολύπλοκα ζητήματα που αφορούν τη διαδικασία της μάθησης και τη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Σ' αυτό το πλαίσιο μπορούμε να διακρίνουμε ήδη ορισμένες χαρακτηριστικές τάσεις για τον τρόπο με τον οποίο οι ιστορικές αναλύσεις μπορούν να συμβάλλουν στις έρευνες της Διδακτικής και την επίλυση των προβλημάτων που αντιμετωπίζει.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εξετάσει τις τάσεις που έχουν διαμορφωθεί, καθώς και ορισμένα μεθοδολογικά προβλήματα που προκύπτουν. Αυτά τα ζητήματα συγκροτούν τον πρώτο άξονα των διαλέξεων ενός μεταπτυχιακού μαθήματος με θέμα «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους», το οποίο έχει διδάξει ο συγγραφέας την τελευταία δεκαετία στο Τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. και στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Στην πρώτη ενότητα θα επιχειρήσουμε μια γενική επισκόπηση του ζητήματος, ενώ στη δεύτερη θα εξετάσουμε ειδικότερα τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες που έχουν αντικείμενο τη διδασκαλία και μάθηση της σχολικής Άλγεβρας. Όπως υποδηλώνει ο τίτλος το περιεχόμενο της εργασίας είναι κατά βάση θεωρητικό, με την έννοια ότι δεν αποτελούν προτεραιότητα σε αυτήν οι εφαρμογές της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.[3] Για να γίνει λοιπόν πιο εύληπτη η ανάπτυξη των θεωρητικών ζητημάτων θα εμπλουτίσουμε κάθε ενότητα με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

[3] Οι εφαρμογές στη διδακτική πράξη αποτελούν το κυρίαρχο θέμα στους επόμενους άξονες του μεταπτυχιακού μαθήματος και σε αυτές εστιάζονται τα θέματα των ερευνητικών εργασιών που εκπονούν οι φοιτητές.

1. Θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις του ζητήματος

1.1. Jean Piaget & Ronaldo Carcia: Νοητική ανάπτυξη και ιστορική εξέλιξη

Μια θεωρία μάθησης, που είχε σημαντική επίδραση στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών και οριοθέτησε ένα συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, είναι εκείνη που πηγάζει από το έργο του Jean Piaget. Όπως είναι γνωστό, ο Piaget διατύπωσε τη θεωρία του για τη νοητική ανάπτυξη αντλώντας ιδέες από τη θεωρία της βιολογικής προσαρμογής και διεξάγοντας εκτεταμένα πειράματα με παιδιά. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η απόκτηση των γνώσεων και η ανάπτυξη της σκέψης είναι μια διαδικασία σταθερής αλληλεπίδρασης των παιδιών με το περιβάλλον τους, η οποία εξελίσσεται σε τέσσερα διαδοχικά στάδια από τη βρεφική ως την εφηβική ηλικία, με προοδευτική κατασκευή νοητικών σχημάτων και δομών. Η προσαρμογή στο περιβάλλον πραγματοποιείται με την επίτευξη μιας εξισορρόπησης ανάμεσα στα αποτελέσματα που παράγουν οι μηχανισμοί της «αφομοίωσης» (ενσωμάτωση της νέας γνώσης σ' ένα υπάρχον νοητικό σχήμα) και της «συμμόρφωσης» (αλλαγές στη νοητική δομή που είναι απαραίτητες για το συνταίριασμα της νέας γνώσης με τις παλιές). Η μετάβαση από ένα στάδιο στο άλλο πραγματοποιείται με το μηχανισμό της «αναστοχαστικής αφαίρεσης»[4] όπου οι ενέργειες και διαδικασίες ενός σταδίου μετασχηματίζονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης. Αν και η θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη δεν αφορά άμεσα τη σχολική εκπαίδευση, ούτε συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο, εν τούτοις χρησιμοποιήθηκε ως θεωρητικό πλαίσιο πολλών ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και μεγάλων εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων (ιδιαίτερα την περίοδο των «Νέων Μαθηματικών»).

Εκείνο που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα εδώ είναι ότι ο Piaget και οι συνεργάτες του επιχείρησαν να αποδείξουν ότι βασικά στοιχεία της θεωρίας, όπως τα στάδια και οι μηχανισμοί της νοητικής ανάπτυξης, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία επιστημολογικής ανάλυσης και να εντοπιστούν στην ιστορία της επιστήμης. Ιδιαίτερα αποκαλυπτικό για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι το επόμενο απόσπασμα από το βιβλίο *Ψυχογένεση και ιστορία της επιστήμης* που έγραψε ο Piaget με το συνεργάτη του Rolando Garcia:

[4] Το επίθετο «αναστοχαστική» χρησιμοποιείται εδώ σε αντιδιαστολή προς το «εμπειρική».

> … οι πρόοδοι που έγιναν στην πορεία της ιστορίας της επιστημονικής σκέψης από τη μια περίοδο στην επόμενη δεν ακολουθούν, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η μια την άλλη με τυχαίο τρόπο, αλλά μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά, όπως στη ψυχογένεση, υπό τη μορφή διαδοχικών «σταδίων». Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε, για κάθε πεδίο, τα πιο σημαντικά από αυτά τα στάδια. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εκείνης της θεμελιώδους περιόδου στην εξέλιξη της άλγεβρας που αρχίζει με τις «ομάδες» του Galois, παρατηρούμε μια σειρά κατασκευών που δεν είναι καθόλου τυχαίες· κάθε μια γίνεται δυνατή από τις προηγούμενες και κάθε μια με τη σειρά της προετοιμάζει εκείνες που ακολουθούν. Στη γεωμετρία, δεν είναι καθόλου σύμπτωση ότι οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες εμφανίστηκαν πολύ αργότερα από τις Ευκλείδειες και ότι τα συστήματα συντεταγμένων κατασκευάστηκαν πολύ αργότερα από την ανάλυση των γεωμετρικών μορφών. Μια από τις βασικές όψεις αυτής της έρευνάς μας είναι να προσπαθήσουμε να αναγνωρίσουμε τέτοιους νόμους προόδου. Πρέπει όμως να γίνει εξαρχής φανερό με ποιο τρόπο ορίζουμε το σκοπό που θέλουμε να πετύχουμε συγκρίνοντας τέτοιες προόδους με εκείνες που παρατηρήθηκαν στη ψυχογένεση: ο σκοπός αυτός δεν είναι να δημιουργήσουμε αντιστοιχίες ανάμεσα σε ιστορικές και ψυχογενετικές ακολουθίες ως προς το **περιεχόμενο**, αλλά μάλλον να δείξουμε ότι οι **μηχανισμοί** της μετάβασης από μια **ιστορική περίοδο** στην επόμενη είναι **ανάλογοι** προς εκείνους της μετάβασης από ένα **ψυχογενετικό στάδιο** στο επόμενο. (Piaget & Garcia 1989, σ.28, η έμφαση δική μας)

Στην έρευνά τους οι Piaget και Garcia υιοθετούν μια μέθοδο ανάλυσης της ιστορικής εξέλιξης ορισμένων κλάδων των Μαθηματικών και της Φυσικής, η οποία στηρίζεται στην επιλεκτική μελέτη δευτερογενούς βιβλιογραφίας και όχι ιστορικών πηγών. Με τη μέθοδο αυτή διαπιστώνουν την ύπαρξη τριών σταδίων ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών, και μηχανισμούς μετάβασης από το ένα στο άλλο ανάλογους προς εκείνους που παρατηρήθηκαν στις έρευνες για τη νοητική ανάπτυξη. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αυτή η μεθοδολογία και η ιδέα των «σταδίων» της ιστορικής εξέλιξης υπήρξε ιδιαίτερα προσφιλής στους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που επηρεάστηκαν από το έργο του Piaget.

1.2. Hans Freudenthal: Εκ νέου επινόηση των μαθηματικών εννοιών

Μια άλλη θεωρία για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, που περιλαμβάνει και έναν ιδιαίτερο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, εντάσσεται μέσα στο πλαίσιο της λεγόμενης «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης». Ένα βασικό «αξίωμα» της θεωρίας, που συνδέεται άμεσα με το θέμα μας, είναι η «αρχή της εκ νέου επινόησης»

του Hans Freudenthal. Ο Freudenthal παρουσίασε τις βάσεις αυτής της διδακτικής θεωρίας στα βιβλία του *Mathematics as an Educational Task* (1973) και *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (1983), στο πλαίσιο μιας πολυδιάστατης ανάλυσης (μαθηματικής, ιστορικής και παιδαγωγικής) βασικών μαθηματικών εννοιών. Στο 5^{ο} κεφάλαιο του πρώτου βιβλίου, που τιτλοφορείται «Η Σωκρατική μέθοδος», γίνεται μια αντιπαράθεση ανάμεσα στις «γενετικές» και «δογματικές» μεθόδους διδασκαλίας. Στην πρώτη κατηγορία ο Freudenthal τοποθετεί τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη που εκθέτει ο Πλάτων στο διάλογο *Μένων*, την οποία χαρακτηρίζει ως ένα από τα θεμέλια της διδασκαλίας. Στη δεύτερη κατηγορία τοποθετεί την αξιωματική παρουσίαση των Μαθηματικών στα σύγχρονα διδακτικά βιβλία (την οποία χαρακτηρίζει ως «αντιδιδακτική αντιστροφή» και αποκαλεί, με ειρωνική διάθεση, «προ–Σωκρατική»). Στη συνέχεια επιχειρεί μια προβολή της Σωκρατικής μεθόδου στη σημερινή εποχή:

> Ο Σωκράτης δεν πίστευε ότι η αληθινή γνώση πράγματι επινοείται. … Η ψυχή λόγω της προϋπαρξής της κατέχει όλη την αληθινή γνώση· ο μαθητής το μόνο που έχει να κάνει είναι να την ανακαλέσει, και το καθήκον του δασκάλου είναι να τον βοηθήσει. Η διδασκαλία συνίσταται στην καθοδήγηση του μαθητή να θυμηθεί αυτό που έχει ξεχάσει. Απόκτηση γνώσεων είναι η εκ νέου ανακάλυψη όχι εκείνων που γνώριζαν οι άλλοι πριν από μένα αλλά μάλλον εκείνα που γνώρισα ο ίδιος όταν η ψυχή μου κατοικούσε στο βασίλειο των ιδεών. Δεν είναι ανάγκη να αντιγράψουμε τα πάντα από τον Σωκράτη, ούτε να συμμεριστούμε την πίστη του στην προϋπαρξη. Αυτό που μένει τότε είναι η μάθηση με την εκ νέου ανακάλυψη, όπου τώρα **το «εκ νέου» δεν σημαίνει την προϊστορία του ανθρώπου που μαθαίνει αλλά την ιστορία της ανθρωπότητας**. (Freudenthal 1973, σ.102, η έμφαση δική μας)

Τονίζοντας το γεγονός ότι η γενετική μέθοδος δεν είναι ούτε λογικο–μαθηματική, ούτε ιστορική, ούτε ψυχολογική έννοια, ο Freudenthal οριοθετεί τις χρήσεις της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποδίδοντας σ’ αυτήν ένα ρόλο «δεξαμενής» από την οποία αντλούνται διδακτικές ιδέες και υλικό:

> Η προτροπή να διδάσκονται οι ιδέες γενετικά δεν σημαίνει ότι αυτές πρέπει να παρουσιάζονται με τη σειρά που εμφανίστηκαν, ακόμη και όταν αποκλειστούν όλα τα αδιέξοδα και παραλειφθούν όλες οι λοξοδρομήσεις. Αυτό που επινόησε και ανακάλυψε ένας τυφλός, μπορεί κάποιος που βλέπει να πει αργότερα με ποιο τρόπο θα έπρεπε να είχε ανακαλυφτεί αν υπήρχαν δάσκαλοι που γνώριζαν αυτό που εμείς γνωρίζουμε τώρα. (ο.π., σ.101)

Το νόημα της τελευταίας φράσης γίνεται πιο συγκεκριμένο παρακάτω, όταν ασκείται κριτική στο αξιωματικό στυλ παρουσίασης των Μαθηματικών (δηλαδή το τρίπτυχο «ορισμός – θεώρημα – απόδειξη»), το οποίο παρακάμπτει όλες τις προσπάθειες που προηγήθηκαν ενός μαθηματικού αποτελέσματος και δεν αναγνωρίζει καμία αναγκαιότητα αναφοράς σ' αυτές. Ο Freudenthal προτείνει, αντίθετα, ότι αυτές οι προσπάθειες πρέπει να είναι ο οδηγός κατά τη συγγραφή διδακτικών κειμένων για τα Μαθηματικά:

> … μερικοί διδακτικά προικισμένοι συγγραφείς εκτιμούν ένα άλλο είδος αναγνώρισης. Αποκαλύπτουν πώς θα είχαν επινοήσει τα αποτελέσματα αν ήταν τόσο έξυπνοι πριν τα επινοήσουν όσο έγιναν κατόπιν. Αυτοί οι συγγραφείς ασκούν εκείνο που ονόμασα νοητικό πείραμα. Φαντάζονται ένα κάπως εξυπνότερο *Alter Ego* και το βάζουν να επινοεί το αντικείμενο εκ νέου με μια πιο πειστική, πιο χρήσιμη, και πιο ευφυή μέθοδο από εκείνη που χρησιμοποίησε το πραγματικό *Ego*. Αυτό που πρέπει να ακολουθήσουμε δεν είναι τα ιστορικά ίχνη του εφευρέτη αλλά μια βελτιωμένη και καλύτερα καθοδηγούμενη πορεία της ιστορίας. (ο.π., σ.103)

Οι προηγούμενες θέσεις του Freudenthal, χωρίς να επεκτείνονται σε ερμηνείες «παραλληλισμού» για τα ζητήματα της μάθησης,[5] έχουν σήμερα ενσωματωθεί στις θεωρητικές αρχές της λεγόμενης «αναπτυξιακής έρευνας» που διεξάγεται στο πλαίσιο της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης». Ο Gravemeijer, ένας εκ των διαδόχων του Freudenthal στο ομώνυμο Ινστιτούτο της Ουτρέχτης, παρουσιάζοντας τις βασικές αρχές και τα εργαλεία εκπαιδευτικού σχεδιασμού που χρησιμοποιεί η συγκεκριμένη μέθοδος έρευνας, διατυπώνει τις θέσεις αυτές ως εξής:

> Η *αρχή της εκ νέου επινόησης* (Freudenthal 1973) μας παρέχει την κατευθυντήρια γραμμή: «Σκέψου πως θα μπορούσες να το είχες ανακαλύψει εσύ ο ίδιος». Αυτό είναι βασικά η Σωκρατική μέθοδος, αν και ο ρόλος του σπουδαστή είναι πιο ενεργητικός στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Όπως υποδηλώνει ο όρος «εκ νέου επινόηση», **η πρωτότυπη διαδικασία της επινόησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο**. Μια ανάλυση της ιστορίας των μαθηματικών θα δώσει στον σχεδιαστή πολλές πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό μιας σειράς μαθημάτων. (Gravemeijer 1998, σ.284, η έμφαση δική μας)

[5] … η ιστορία μπορεί να είναι μια κατευθυντήρια γραμμή που δεν πρέπει να περιφρονεί κανείς, μολονότι περιέχει στριφογυρίσματα που δεν χρειάζεται να ακολουθήσουμε, αν και στο παρελθόν κάποιοι πίστευαν ότι το άτομο επαναλαμβάνει την ιστορία της ανθρωπότητας – στην πραγματικότητα η εκπαίδευση και η διδασκαλία πρέπει να έχουν υπόψη ότι αυτό ούτε συμβαίνει ούτε χρειάζεται να συμβεί. (Freudenthal 1983, σ.516)

Στο πλαίσιο της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης» έχει επίσης ξεκινήσει τα τελευταία χρόνια και ένα συστηματικό ερευνητικό πρόγραμμα για το ρόλο της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, με γενικό τίτλο «Μελέτες στην εκ νέου επινόηση» (Maanen 2002).

1.3. Gaston Bachelard & Guy Brousseau: Επιστημολογικά εμπόδια

Μια άλλη θεωρία μάθησης στη Διδακτική των Μαθηματικών που οριοθετεί επίσης ένα συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας, είναι η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Guy Brousseau, και ιδιαίτερα εκείνο το τμήμα της που αφορά την έρευνα των λεγόμενων «επιστημολογικών εμποδίων». Ο Brousseau μετέφερε στη Διδακτική την έννοια του «εμποδίου» που είχε εισάγει ο θεμελιωτής της επιστημολογίας Gaston Bachelard στις μελέτες του για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης και ιδιαίτερα στο βιβλίο του *Ο σχηματισμός του επιστημονικού πνεύματος* (1938). Η έννοια του «εμποδίου» στηρίζεται στην υπόθεση ότι η εξέλιξη αυτή δεν είναι συνεχής ούτε αθροιστική, αλλά σημαδεύεται από αδιέξοδα και ρήξεις που καθιστούν αναγκαίο τον επαναπροσδιορισμό των θεμελίων των επιστημών. Ο Bachelard (1938/1975, σ.13) ονομάζει τις αιτίες της στασιμότητας, της οπισθοδρόμησης και της αδράνειας «επιστημολογικά εμπόδια», την εμφάνιση των οποίων θεωρεί ένα είδος λειτουργικής ανάγκης που είναι έμφυτο στην ίδια την πράξη της απόκτησης γνώσεων. Πρέπει βέβαια να αναφερθεί ότι όλα τα παραπάνω αφορούν τις Φυσικές επιστήμες, επειδή κατά τον Bachelard η εξέλιξη των Μαθηματικών δεν παρουσιάζει περιόδους λαθών. Η θέση αυτή διατυπώνεται στο βιβλίο του με κατηγορηματικό τρόπο:

> Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα θαύμα κανονικότητας. Γνώρισε περιόδους στασιμότητας. Δεν γνώρισε όμως περιόδους λαθών. **Καμιά από τις θέσεις που υποστηρίζουμε σ' αυτό το βιβλίο δεν αφορά επομένως τη μαθηματική γνώση**. Οι τελευταίες δεν συμβιβάζονται παρά μόνο με τη γνώση του αντικειμενικού κόσμου. (Bachelard 1938/1975, σ.25, η έμφαση δική μας)

Παρά αυτόν τον κατηγορηματικό αποκλεισμό της μαθηματικής γνώσης από την «εμβέλεια» της έννοιας του «εμποδίου», ο Brousseau προσπάθησε να αναπτύξει μια ορθολογική βάση για τη χρησιμότητά της στη Διδακτική των Μαθηματικών. Στις δύο βασικές εργασίες που έγραψε για το ζήτημα αυτό (Brousseau 1983, 1989), συνδύασε τη θεωρία του Bachelard για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης με τη θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη, τονίζοντας ότι η μάθηση με προσαρμογή στο

περιβάλλον προκαλείται από γνωστικές ρήξεις. Λάθη που επαναλαμβάνονται με συστηματικό τρόπο δεν οφείλονται σε έλλειψη γνώσης, αλλά στην ύπαρξη μιας γνώσης που δυσλειτουργεί και συνιστά επομένως ένα γνωστικό εμπόδιο. Αν και η σημασία της έννοιας του «εμποδίου» στη Διδακτική προκάλεσε διαμάχες και οδήγησε σε αρκετούς επαναπροσδιορισμούς, το επόμενο απόσπασμα περιγράφει ικανοποιητικά (με το χαρακτηριστικό ύφος του Brousseau) τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν μια γνώση – εμπόδιο αλλά και τη θεμελιώδη διαδικασία υπέρβασης ενός εμποδίου:

> Το εμπόδιο έχει την ίδια φύση με μια γνώση, με αντικείμενα, σχέσεις, μεθόδους κατανόησης, προβλέψεις, με αποδεικτική δυνατότητα, ξεχασμένα συμπεράσματα, απροσδόκητες διασυνδέσεις, κ.ο.κ. Θα αντισταθεί στην προσπάθεια απόρριψης και, όπως είναι φυσικό, θα επιχειρήσει να προσαρμοστεί τοπικά, να τροποποιηθεί με το ελάχιστο κόστος, να βελτιστοποιηθεί σ' ένα συρρικνωμένο πεδίο, ακολουθώντας μια πολύ γνωστή διαδικασία συμμόρφωσης. Για τους λόγους αυτούς πρέπει να υπάρξει μια επαρκής ροή νέων καταστάσεων τις οποίες δεν μπορεί να αφομοιώσει, οι οποίες θα το αποσταθεροποιήσουν, θα το κάνουν αναποτελεσματικό, άχρηστο, λαθεμένο· οι οποίες καθιστούν αναγκαία την αναθεώρηση ή απόρριψή του, την περιθωριοποίησή του, την διάλυσή του, μέχρι την τελική του εκδήλωση. Επιπλέον, η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί εργασία του ίδιου είδους όπως η εφαρμογή της γνώσης, δηλαδή: επανειλημμένη αλληλεπίδραση, διαλεκτική ανάμεσα στο σπουδαστή και το αντικείμενο της γνώσης. Αυτή η παρατήρηση είναι θεμελιώδης για τον καθορισμό του τι είναι ένα γνήσιο πρόβλημα: είναι μια κατάσταση που επιτρέπει και παρακινεί αυτή τη διαλεκτική. (Brousseau 1983/1997, σ.85)[6]

Ανάλογα με την προέλευσή τους ο Brousseau ταξινομεί τα γνωστικά εμπόδια σε *οντογενετικά* (που σχετίζονται με την προσωπική νοητική ανάπτυξη), *διδακτικά* (που σχετίζονται με επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος), *επιστημολογικά* (που σχετίζονται με την ίδια τη γνώση) και *πολιτιστικά* (που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες). Εκείνα που μας ενδιαφέρουν άμεσα για το ζήτημα που εξετάζουμε είναι τα επιστημολογικά εμπόδια, τα οποία αποτελούν συστατικά στοιχεία της γνώσης και εμφανίζονται, κατά τον Brousseau, τόσο στο ιστορικό όσο και στο σχολικό περιβάλλον:

[6] Η ορολογία που χρησιμοποιεί ο Brousseau στο προηγούμενο απόσπασμα θυμίζει έντονα τον Piaget και ενδέχεται να δημιουργήσει παρανοήσεις ως προς το ρόλο που αποδίδει στην έννοια του «εμποδίου» για το ζήτημα της μάθησης. Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη ότι η υπέρβαση των εμποδίων δεν είναι το αποτέλεσμα «φυσικής» νοητικής ανάπτυξης αλλά πραγματοποιείται σε ένα αυστηρά δομημένο διδακτικό περιβάλλον, στο οποίο ο δάσκαλος έχει καθοριστικό ρόλο για την οργάνωση διδακτικών καταστάσεων που κάνουν δυνατή την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο μαθητή και την επιδιωκόμενη γνώση.

> Εμπόδια πράγματι επιστημολογικής προέλευσης είναι εκείνα από τα οποία ούτε μπορούμε ούτε πρέπει να ξεφύγουμε, εξ αιτίας του εποικοδομητικού ρόλου τους στην επιζητούμενη γνώση. Αυτά μπορούν να βρεθούν στην ιστορία των ίδιων των γνώσεων. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να ενισχύσουμε την επίδρασή τους ή να αναπαράγουμε στο σχολικό περιβάλλον τις ιστορικές συνθήκες κάτω από τις οποίες έγινε η υπέρβασή τους.» (Brousseau 1983/1997, σ.87)

Τα προηγούμενα προσδιορίζουν με αρκετή σαφήνεια το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων καθώς και το αντίστοιχο έργο των ερευνητών της Διδακτικής. Οι τελευταίοι, κατά τον Brousseau, οφείλουν:

> α) να εντοπίζουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις·
>
> β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών·
>
> γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους. (Brousseau 1989/1997, σ.99)

Η ανάπτυξη της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων από τον Brousseau και τους συνεργάτες του πραγματοποιήθηκε με βάση ένα λεπτομερές σχέδιο για την έρευνα της διδασκαλίας και μάθησης των δεκαδικών αριθμών. Η ιστορική εξέλιξη των δεκαδικών μελετήθηκε εξονυχιστικά για τον εντοπισμό επιστημολογικών εμποδίων, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν ως υλικό βάσης για το σχεδιασμό των αντίστοιχων διδακτικών καταστάσεων.

Στις εργασίες που προαναφέρθηκαν, ο Brousseau επισημαίνει πολλές φορές ότι ο μηχανισμός της απόκτησης γνώσεων μέσω της υπέρβασης επιστημολογικών εμποδίων μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στην επιστημολογία ή την ιστορία όσο και στη μάθηση ή διδασκαλία. Σε όλες τις περιπτώσεις, υποστηρίζει, η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου εμφανίζεται θεμελιώδης στη μελέτη του προβλήματος της επιστημονικής γνώσης.

Τις προηγούμενες θέσεις του Brousseau δεν συμμερίστηκαν όλοι οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που ασχολήθηκαν με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. Ο κάπως ασαφής προσδιορισμός αυτής της έννοιας και ο χαρακτηρισμός της ως «εγγενούς» συστατικού της γνώσης και ως «αναπόφευκτης», οδήγησαν στο (εσπευσμένο κατά την άποψή μας) συμπέρασμα ότι η θεωρία των επιστημολογικών εμποδίων στη Διδακτική εντάσσεται μέσα στο παραδοσιακό πλαίσιο του «ιστορικού παραλληλισμού» (Radford 1997, σσ.29 κ.ε.). Η κριτική στάση απέναντι στις θέσεις του

Brousseau, επισημαίνοντας ιδιαίτερα τα εμπόδια διδακτικής και πολιτισμικής προέλευσης, έφερε στο προσκήνιο την ανάγκη να επανακαθοριστεί η φύση των εμποδίων που εμφανίζονται στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Artigue 1992, Sierpinska 1994, ιδιαίτερα κεφάλαια 4 και 5). Μάλιστα η Artigue, μέσα από τη μελέτη συγκεκριμένων παραδειγμάτων, έφτασε στο σημείο να υποστηρίξει ότι η ίδια γνώση-εμπόδιο που εμφανίστηκε κάποτε στην ιστορία και επανεμφανίζεται σήμερα στη διδασκαλία, οφείλεται συνήθως σε διαφορετικές αιτίες:

> … συμβαίνει συχνά, εκείνα που έχουν προσδιοριστεί από τους ερευνητές ως επιστημολογικά εμπόδια … να αποδεικνύεται ότι σχετίζονται στενά, κατά τη διαδικασία διδασκαλίας/μάθησης, με εμπόδια διδακτικής φύσεως … που συνδέονται με τις επιλογές και τα χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού συστήματος. (Artigue, 1992, σ.110)

Οι Θωμαΐδης (1995) και Gagatsis & Thomaidis (1995) έχουν παρουσιάσει αποτελέσματα ιστορικών και εμπειρικών ερευνών που ενισχύουν τις προηγούμενες παρατηρήσεις στην περίπτωση των εννοιών του αρνητικού αριθμού και της απόλυτης τιμής. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός μιας μαθηματικής γνώσης σε αντικείμενο διδασκαλίας στο σχολείο, επηρεάζει ουσιαστικά τη λειτουργία της και τροποποιεί τη φύση των εμποδίων που σχετίζονται με την εξέλιξή της: ισχυρά διδακτικά εμπόδια παρεμβαίνουν και αλληλεπιδρούν με επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίστηκαν στην πορεία της ιστορικής εξέλιξης.

1.4. Ένα πρώτο χαρακτηριστικό παράδειγμα

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα παρανοήσεων που οφείλονται στην ύπαρξη γνώσεων-εμποδίων, οι οποίες δημιουργούνται στο πλαίσιο της καθιερωμένης διδασκαλίας των Μαθηματικών και εκδηλώνονται με συστηματικά λάθη. Ένα στοιχειώδες παράδειγμα που έχει καταγραφεί σε πολλές εμπειρικές έρευνες συνδέεται με την έννοια του πολλαπλασιασμού και συγκεκριμένα την αντίληψη ότι «ο πολλαπλασιασμός προκαλεί πάντοτε αύξηση». Σε μια έρευνα για την αξιολόγηση βασικών μαθηματικών γνώσεων που πραγματοποιήθηκε στην Ιταλία δόθηκαν σε 628 μαθητές από 13 Δημοτικά και Γυμνάσια τα εξής (μεταξύ άλλων) προβλήματα (Fischbein *et al* 1985):

> Πρόβλημα 1
>
> Από ένα στατήρα (= 100 κιλά) σιταριού παράγονται 0,75 στατήρες αλεύρι. Πόσο αλεύρι παράγεται από 15 στατήρες σιταριού;

Πρόβλημα 2

Από ένα κιλό απορρυπαντικού παρασκευάζονται 15 κιλά σαπούνι. Πόσο σαπούνι μπορούμε να παρασκευάσουμε από 0,75 κιλά απορρυπαντικού;

Στα προβλήματα αυτά, που από μαθηματική άποψη είναι ισοδύναμα (η επίλυσή τους απαιτεί τον πολλαπλασιασμό 0,75×15 είτε 15×0,75), ζητήθηκε από τους μαθητές να μην εκτελέσουν την πράξη, αλλά να αναφέρουν ποια πράξη θα χρησιμοποιήσουν για να τα λύσουν. Τα ποσοστά επιτυχίας σε τρεις χαρακτηριστικές κατηγορίες μαθητών φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Ποσοστά Επιτυχίας	Ε΄ Δημοτικού	Α΄ Γυμνασίου	Γ΄ Γυμνασίου
Πρόβλημα 1:	79%	74 %	76 %
Πρόβλημα 2:	27 %	18 %	35 %

Το ερώτημα που προκύπτει είναι άμεσο και προφανές: Για ποιο λόγο σε δύο μαθηματικώς ισοδύναμα προβλήματα, οι ίδιοι μαθητές παρουσιάζουν τόσο μεγάλη διαφορά επίδοσης; Η απάντηση δεν είναι εξίσου προφανής, αλλά η διασταύρωση των στοιχείων από πολλές έρευνες με παρόμοια ευρήματα που πραγματοποιήθηκαν σε άλλες χώρες[7] συνηγορούν υπέρ της ακόλουθης ερμηνείας: Η αναπόφευκτη εισαγωγή του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού ως «επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης» δημιουργεί ορισμένες σταθερές αντιλήψεις. Τέτοιες είναι π.χ. ότι ο πολλαπλασιαστής δηλώνει πόσες «φορές» θα επαναλάβουμε τον πολλαπλασιαστέο και ότι «το γινόμενο είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τους αριθμούς που πολλαπλασιάζουμε» (όπως αντίστοιχα στη διαίρεση, ότι το πηλίκο δηλώνει «μέρος» και είναι πάντοτε μικρότερο από διαιρετέο και διαιρέτη). Οι αντιλήψεις αυτές συνιστούν κλασικές γνώσεις-εμπόδια, οι οποίες λειτουργούν αποτελεσματικά σε προβλήματα που αναφέρονται αποκλειστικά σε φυσικούς αριθμούς αλλά είναι ανεπαρκείς ή και λανθασμένες όταν γενικεύονται και χρησιμοποιούνται σε άλλες κατηγορίες αριθμών (π.χ. στα κλάσματα).

Στο πρώτο πρόβλημα είναι σαφές ότι το 0,75 επαναλαμβάνεται 15 φορές και το αποτέλεσμα θα είναι αριθμός μεγαλύτερος από 0,75, ενώ στο δεύτερο το 15 πρέπει να επαναληφθεί 0,75 φορές και το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερος από 15. Τόσο η

[7] Όπως για παράδειγμα στη μεγάλης κλίμακας έρευνα "Concepts in Secondary Mathematics and Science" που πραγματοποιήθηκε στην Αγγλία (Hart 1981, σ.55).

έλλειψη «φυσικού» νοήματος στην επανάληψη ενός αριθμού 0,75 «φορές», όσο και η προσδοκία του μικρότερου αποτελέσματος, οδήγησαν τη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών, ανεξαρτήτως ηλικίας, στο συμπέρασμα ότι το δεύτερο πρόβλημα λύνεται με διαίρεση!

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει επίσης ότι η συγκεκριμένη παρανόηση επιδεικνύει μεγάλη «αντοχή», καθώς δεν φαίνεται να επηρεάζεται από την ηλικία και τη γνωστική ανάπτυξη. Ενισχυτικό αυτής της άποψης είναι το γεγονός ότι στο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ για την πρόσληψη δασκάλων έχει τεθεί τρεις φορές θέμα σχετικό με τις συγκεκριμένες παρανοήσεις για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και (σύμφωνα με πληροφορίες που έχουν δοθεί από τους βαθμολογητές) υπήρχε κάθε φορά ένα σημαντικό ποσοστό υποψηφίων που έδινε λανθασμένες απαντήσεις. Τα θέματα αυτά ήταν τα εξής:

Διαγωνισμός 2002

Η πρόταση «το γινόμενο δύο αριθμών είναι αριθμός μεγαλύτερος από τους παράγοντες» σε ποιο σύνολο ισχύει πάντα;

Α) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών (εκτός του μηδενός).

Β) Στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Γ) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Δ) Σε κανένα από τα παραπάνω σύνολα.

Διαγωνισμός 2007

Το γινόμενο δύο θετικών δεκαδικών αριθμών διαφορετικών της μονάδας:

Α) Είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς.

Β) Είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τον έναν τουλάχιστον από τους δύο αριθμούς.

Γ) Είναι πάντοτε μικρότερο από τους δύο αριθμούς.

Δ) Δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω.

Διαγωνισμός 2009

Όταν διαιρέσουμε δύο θετικούς δεκαδικούς αριθμούς, το αποτέλεσμα:

Α) Είναι πάντοτε μικρότερο και από τους δύο αριθμούς.

Β) Είναι πάντοτε μικρότερο από τον έναν τουλάχιστον από τους δύο αριθμούς.

Γ) Είναι πάντοτε μεγαλύτερο και από τους δύο αριθμούς.

Δ) Μπορεί να είναι μεγαλύτερο και από τους δύο αριθμούς.

Οι συγκεκριμένες παρανοήσεις συνιστούν γνώσεις-εμπόδια με σαφή διδακτική προέλευση, αφού η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης θα ξεκινήσει

αναπόφευκτα από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού ως «επαναλαμβανόμενη πρόσθεση» και «μερισμός» φυσικών αριθμών αντίστοιχα. Θα μπορούσαμε όμως επίσης να τις χαρακτηρίσουμε ως επιστημολογικά εμπόδια, αν λάβουμε υπόψη ότι με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εμφανίζεται η έννοια του πολλαπλασιασμού σε ιστορικά μαθηματικά κείμενα. Οι επόμενοι ορισμοί προέρχονται από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και μία ανώνυμη Αριθμητική που εκδόθηκε στην Ιταλία την περίοδο της Αναγέννησης:

Στοιχεία, Βιβλίο 7, όροι 2 και 15 (300 π.Χ.):

> Αριθμός δε το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος.
>
> Αριθμός αριθμόν πολλαπλασιάζει λέγεται, όταν όσαι εισίν εν αυτώ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθή ο πολλαπλασιαζόμενος και γένηται τις.

Αριθμητική του Treviso (1478):

> … πολλαπλασιάζω έναν αριθμό με τον εαυτό του ή με έναν άλλο σημαίνει ότι βρίσκω από δύο δεδομένους αριθμούς έναν τρίτο αριθμό, ο οποίος περιέχει τον έναν από αυτούς τόσες φορές όσες μονάδες υπάρχουν στον άλλο …

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το επόμενο ιστορικό κείμενο από την περίοδο της Τουρκοκρατίας, στο οποίο ερμηνεύεται με γλαφυρό τρόπο το «παράξενο» γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων μικρότερων της μονάδας δίνει αποτέλεσμα μικρότερο των δύο παραγόντων («τζάκισμα» = κλάσμα):

> Είναι τινές όπου έχουν δίστασιν εις τον πολυπλασιασμόν των τζακισμάτων έσοντας ότι, όταν πολυπλασιάζουν τζάκισμα με άλλο τζάκισμα ολιγοστεύει πολλά.
>
> Και όσοι δεν ηξεύρουν την θεωρίαν της μεθόδου λέγουσιν ότι η μέθοδος δεν είναι σωστή … πλήν τούτο λέγομεν δια να καταλάβη ο καθείς την θεωρίαν της μεθόδου κατά λόγον:
>
> Ημείς επολυπλασιάσαμεν άνωθεν το $\frac{1}{4}$ με $\frac{3}{8}$ και έγιναν $\frac{3}{32}$ και αυτό είναι πολλά ολιγότερον παρά το $\frac{3}{8}$. Το λοιπόν λέγομεν ότι ηγοράσαμεν $\frac{1}{4}$ της πήχης από $\frac{3}{8}$ του άσπρου την κάθε πήχην. Τι χρεωστούμεν να πληρώσωμεν;
>
> Λέγομεν ότι η μία πήχη το πανί έχει $\frac{3}{8}$ του άσπρου, η μισή $\left(\frac{1}{2}\right)$ πήχη είναι χρεία να έχη τα μισά των $\frac{3}{8}$ ήγουν $\frac{3}{16}$.Το λοιπόν αυτό το $\frac{1}{4}$ που είναι το μισόν από την μισήν πήχην, χρεία είναι να έχη η τιμή του τα μισά των $\frac{3}{16}\cdot$ και τα μισά των $\frac{3}{16}$ είναι $\frac{3}{32}$ ωσάν εβγήκεν και εις την μέθοδον άνωθεν.

Το απόσπασμα αυτό προέρχεται από το *Βιβλίον πρόχειρον τοις πάσι περιέχον την τε πρακτικήν αριθμητικήν ή μάλλον ειπείν την λογαριαστικήν… Φιλοπονηθέν παρά Μανουήλ Γλυζωνίου του εκ Χίου, 1568*, το οποίο γνώρισε αλλεπάλληλες εκδόσεις μέχρι τα μέσα περ'ιπου του 19^{ου} αιώνα. (Σωτηράκης 1961, σσ.68-69)

Το παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε σε αυτή την ενότητα είναι αποκαλυπτικό για το σύνθετο χαρακτήρα της έννοιας του εμποδίου, στην οποία υπεισέρχονται ισχυροί επιστημολογικοί και διδακτικοί παράγοντες που καθιστούν την εμφάνισή της στους σημερινούς μαθητές σχεδόν αναπόφευκτη. Η διδασκαλία βρίσκεται αντιμέτωπη με το πρόβλημα υπέρβασης του εμποδίου, η αντιμετώπιση του οποίου απαιτεί τη δημιουργία κατάλληλων δραστηριοτήτων και εκείνο το χαρακτηριστικό που ο Brousseau έχει αποκαλέσει «επιστημολογική επαγρύπνηση» του δασκάλου.

1.5. Μια ανασκόπηση και δύο κριτικά ερωτήματα

Όλες οι προηγούμενες θεωρητικές προσεγγίσεις, συνδέοντας την ιστορική εξέλιξη των εννοιών είτε με τα στάδια και τους μηχανισμούς της νοητικής ανάπτυξης είτε με τη μάθηση μέσω της εκ νέου επινόησης είτε με την υπέρβαση επιστημολογικών εμποδίων, φέρνουν στο προσκήνιο ορισμένα κρίσιμα ζητήματα για τη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη μαθηματική εκπαίδευση. Παρά το γεγονός ότι αναδύονται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε προσέγγιση, τα ζητήματα αυτά είναι σκόπιμο να τεθούν με ενιαίο και γενικό τρόπο που αντανακλά τη διαχρονική εξέλιξη αυτής της σχέσης. Ένα τέτοιο ζήτημα συνδέεται με τον προαναφερθέντα «παραλληλισμό», ή όπως αλλιώς ορίσουμε την επιχειρούμενη συσχέτιση ανάμεσα στην ιστορική γέννηση και εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, και τον τρόπο με τον οποίο αυτή προσλαμβάνεται από τους μαθητές σε μια σύγχρονη σχολική τάξη. Ανεξάρτητα από τις διαφορετικές αντιλήψεις για το νόημα αυτού του «παραλληλισμού», κάθε προσέγγιση αφήνει κατά την άποψή μας αναπάντητο το επόμενο ουσιώδες ερώτημα:

> *Τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει «παραλληλισμός» ανάμεσα σ' ένα δημιουργικό (και συνήθως κορυφαίο) μαθηματικό του παρελθόντος, και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα (συνήθως χωρίς επιτυχία) να μάθει Μαθηματικά;*

Το συγκεκριμένο ζήτημα έχει επανέλθει τα τελευταία χρόνια στο προσκήνιο, και στις σχετικές δημοσιεύσεις μπορεί κανείς να συναντήσει θέσεις και ερευνητικά αποτελέσματα που εκτείνονται από την κατηγορηματική απόρριψη κάθε ιδέας

«παραλληλισμού», μέχρι την ανάδειξη νέων όψεων αυτής της πολυσυζητημένης ιδέας. (Furinghetti & Radford 2002, Arcavi 2004, Schubring 2004, Thomaidis & Tzanakis 2007)

Ένα άλλο κρίσιμο ζήτημα που αφορά τη σχέση Ιστορίας των Μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ο τρόπος με τον οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής, ανεξάρτητα από τη θεωρητική προσέγγιση που ακολουθούν, χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία και τα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας. Τις τελευταίες δεκαετίες, παράλληλα με τις εξελίξεις στη Διδακτική, έχουν σημειωθεί θεαματικές αλλαγές στην ιστορική προσέγγιση και ερμηνεία των μαθηματικών γνώσεων της αρχαίας εποχής, οι οποίες αφορούν κυρίως θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και σχετίζονται άμεσα με τα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης. Το γεγονός αυτό θέτει ακόμη ένα ουσιώδες ερώτημα στις θεωρητικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία και μάθηση που χρησιμοποιούν ως εργαλείο την Ιστορία των Μαθηματικών:

> *Πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν αρκετές δεκαετίες;*

Το είδος της ιστορικής γνώσης που χρησιμοποιείται για τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, και ιδιαίτερα στις έρευνες της Διδακτικής, είναι ένα ζήτημα που έχει ήδη τεθεί και μάλιστα με τρόπο που εισάγει στη σχετική συζήτηση πρόσφατες εξελίξεις στο χώρο της ιστοριογραφίας των Μαθηματικών. (Fried 2001, Schubring 2004, Grattan–Guinness 2005)

Στην επόμενη ενότητα της εργασίας θα προσπαθήσουμε να διεισδύσουμε στον πυρήνα αυτού του ζητήματος εξετάζοντας μια συγκεκριμένη περίπτωση.

2. Ένα ειδικό πεδίο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής: Η περίπτωση της Άλγεβρας

2.1.Έρευνες για τη μάθηση αλγεβρικών εννοιών και ιστορικοί παραλληλισμοί

Η μελέτη των προβλημάτων που συνδέονται με τη διδασκαλία και μάθηση των βασικών αλγεβρικών εννοιών, αποτελεί μια περιοχή ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε ειδικές όψεις όλων σχεδόν των ζητημάτων που θίξαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παίρνοντας υπόψη τις τάσεις και τα αποτελέσματα των νεότερων ιστορικών ερευνών, θα επιχειρήσουμε στην ενότητα αυτή να δείξουμε ότι η τάση ορισμένων ερευνητών της Διδακτικής να προσεγγίζουν την ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας με κανονιστικούς όρους «σταδίων ανάπτυξης» και «μηχανισμών μετάβασης», οδηγεί στη δημιουργία υπεραπλουστευμένων μοντέλων και αποτελεί σαφή αναχρονισμό.

Σημείο αφετηρίας για το ζήτημα που εξετάζουμε αποτελούν οι εργασίες του Eon Harper, ο οποίος χρησιμοποίησε την ιστορική ανάλυση ως βάση μιας εμπειρικής έρευνας στην οποία καταγράφηκαν οι τρόποι που χρησιμοποιούν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να λύσουν το ακόλουθο πρόβλημα:

> *Αν σας δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε αριθμών να δείξετε ότι μπορείτε πάντοτε να βρείτε ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί*.

Το 42% των μαθητών έδωσε λύσεις που ταξινομήθηκαν από τον Harper (1987) σύμφωνα με μια παραδοσιακή ιστορική ερμηνεία, που διαχωρίζει την εξέλιξη της Άλγεβρας σε τρία στάδια: το *ρητορικό*, το *συγκεκομμένο* και το *συμβολικό*. Τα πρώτο στάδιο καλύπτει την περίοδο μέχρι τον Διόφαντο (περ 250 μ.Χ.) και χαρακτηρίζεται από τον προσδιορισμό των ζητουμένων ενός προβλήματος με αποκλειστική χρήση φυσικής γλώσσας. Το δεύτερο στάδιο, που καλύπτει την περίοδο από τον Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα, χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση αγνώστων και τη δημιουργία εξισώσεων. Τέλος, το τρίτο στάδιο που αρχίζει με τον Viète (1540–1603), έχει επιπλέον χαρακτηριστικό τη χρήση γραμμάτων και για την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος ώστε να είναι δυνατή η διατύπωση γενικών λύσεων. Ακολουθώντας αυτή τη διάκριση ο Harper ταξινομεί τις λύσεις που έδωσε το 42% των μαθητών της έρευνάς του σε «Ρητορικές», «Διοφαντικές» και «Βιετιανές». Στη συνέχεια διατυπώνει – κάνοντας μια πλάγια

αναφορά στον Piaget – ορισμένες θέσεις που συνηγορούν υπέρ της ιδέας του «παραλληλισμού» και του θετικού ρόλου της ιστορικής γνώσης των Μαθηματικών στην ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές:

> Από την άποψη αυτή η σειρά της απόκτησης των εννοιών δείχνει να παραλληλίζεται με εκείνη που θα αποκαλύψει μια μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών. Εδώ η μελέτη υποδεικνύει ότι σε όλες τις περιοχές των μαθηματικών υπάρχει ένα πλούσιο και ενδεχομένως αποδοτικό πεδίο έρευνας και ότι ο οδηγός για τη σειρά των περιεχομένων του αναλυτικού προγράμματος θα μπορούσε να αναζητηθεί σε μια ιστορική ανάλυση της εξέλιξής του. …
>
> Ανεξάρτητα από οποιαδήποτε θεώρηση για τη φύση της ακριβούς σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στη φυλογενετική και την οντογενετική ανάπτυξη, η ιστορική ανάλυση των μαθηματικών ιδεών μπορεί λοιπόν να μας εφοδιάσει με σημαντικές ενοράσεις για τις νοητικές δυσκολίες και ανακαλύψεις που εμποδίζουν ή προάγουν τη μαθηματική πρόοδο. Δεν χρειάζεται πολλή φαντασία για να αναγνωρίσει κανείς ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες δυσκολίες και ότι θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς της ιστορίας, των οποίων το εννοιολογικό σύμπαν διαμοιράζονται. (Harper 1987, σσ.85–87)[8]

Μια άλλη εργασία σχετική με το ζήτημα που εξετάζουμε δημοσιεύτηκε από την Anna Sfard το 1991. Στην εργασία αυτή η ιστορική εξέλιξη του αριθμού και της συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη διατύπωση ενός θεωρητικού μοντέλου της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών κατά τη διαδικασία της μάθησης. Το μοντέλο προβλέπει την ιεραρχική εμφάνιση τριών σταδίων, που χαρακτηρίζονται αντίστοιχα ως «φάση εσωτερίκευσης» (όταν εκτελείται κάποια υπολογιστική διαδικασία με οικεία μαθηματικά αντικείμενα), «φάση σύνοψης» (όταν η διαδικασία συνοψίζεται σε πιο εύχρηστες ενότητες) και ως «φάση αντικειμενοποίησης» (όταν η διαδικασία μετασχηματίζεται σε ένα νέο και αυτόνομο αντικείμενο μελέτης). Οι δύο πρώτες φάσεις, στις οποίες κυριαρχούν διαδικασίες και αλγόριθμοι σε υποκείμενες έννοιες, ονομάζονται «εργαλειακές» ενώ η τρίτη, στην οποία αναδεικνύονται οι αφηρημένες όψεις των εννοιών, ονομάζεται «δομική». Προβάλλοντας στη συνέχεια αυτό το μοντέλο στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας, η Sfard επιχειρεί να εντοπίσει σ' αυτήν τα στάδια

[8] Αυτή η εμπιστοσύνη στις δυνατότητες ταξινόμησης που παρέχει η ιστορική ανάλυση δεν μας εμποδίζει βέβαια να θέσουμε το επόμενο κριτικό ερώτημα: Ποιο είδος ανάλυσης των μαθηματικών ιδεών (επιστημολογική, ιστορική ή διδακτική) θα μπορούσε να μας εφοδιάσει με ενόραση για τις απαντήσεις που έδωσε το υπόλοιπο 58% των μαθητών της έρευνας του Harper και οι οποίες χαρακτηρίστηκαν ως «αταξινόμητες»;

μετάβασης από τις «εργαλειακές» στις «δομικές» προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή ερμηνεία των τριών σταδίων εξέλιξης (*ρητορικό, συγκεκομμένο, συμβολικό*). Γράφει συγκεκριμένα τα εξής:

> Όπως παρατηρούν οι Davis και Hersh (1983, σ.182), «Τα μαθηματικά της Αιγύπτου, της Βαβυλώνας, και της αρχαίας Ανατολής ήταν όλα αλγοριθμικού τύπου… Μόνο στη σύγχρονη εποχή βρίσκουμε μαθηματικά με ασήμαντο ή καθόλου αλγοριθμικό περιεχόμενο, τα οποία θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε πλήρως διαλεκτικά ή υπαρξιακά». Πράγματι η επιστήμη του υπολογισμού, που είναι σήμερα γνωστή με το σχετικά νέο όνομά της «άλγεβρα», έχει διατηρήσει έναν ευδιάκριτα εργαλειακό χαρακτήρα για χιλιάδες χρόνια. Η λεγόμενη «ρητορική» άλγεβρα, η οποία προηγήθηκε της συγκεκομμένης και της συμβολικής άλγεβρας (η τελευταία δεν αναπτύχθηκε πριν από το 16^{ο} αιώνα) ασχολήθηκε με τις υπολογιστικές διαδικασίες καθαυτές, ενώ το μόνο αποδεκτό είδος αφηρημένων αντικειμένων ήταν οι αριθμοί. Ακόμη και οι πιο σύνθετες αλληλουχίες αριθμητικών πράξεων παρουσιάζονταν με τη βοήθεια λεκτικών εντολών, που είχαν έναν ευδιάκριτα επακόλουθο χαρακτήρα και δεν προκάλεσαν σύνοψη και αντικειμενοποίηση. …
>
> Σε ορισμένα στάδια του σχηματισμού (ή της απόκτησης) των γνώσεων η απουσία μιας δομικής αντίληψης μπορεί να εμποδίσει την παραπέρα ανάπτυξη. Καθώς η ποσότητα των πληροφοριών αυξάνεται, το παλιό σχήμα μπορεί να κορεστεί και να γίνει στην πράξη ανεπίδεκτο οποιουδήποτε εμπλουτισμού. Δεν ήταν ασφαλώς τυχαίο γεγονός ότι η μετάβαση από τη ρητορική στη συμβολική άλγεβρα – μια μετάβαση από την εργαλειακή στη δομική προσέγγιση στα υπολογιστικά μαθηματικά – εμφανίστηκε τον 16^{ο} αιώνα. Ούτε ήταν ιστορική σύμπτωση ότι σχεδόν ταυτόχρονα εφευρέθηκαν αρκετά διαφορετικά συστήματα συμβόλων από μαθηματικούς που εργάζονταν ο ένας ανεξάρτητα του άλλου. Από εκείνη την εποχή, η τεράστια πολυπλοκότητα των υπολογιστικών διαδικασιών έφερε τη ρητορική άλγεβρα σε κατάσταση αδιεξόδου και πρακτικά έβαλε ένα τέλος στην ανάπτυξή της. Κοιτώντας ακόμη πιο πίσω, μπορούμε να διακινδυνεύσουμε την εικασία ότι η απουσία δομικών αναπαραστάσεων (άρα δομικών αντιλήψεων) ήταν ένας από τους παράγοντες που επιβράδυναν την εξέλιξη της υπολογιστικής επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα και προκάλεσαν την υστέρηση της άλγεβρας έναντι της γεωμετρίας για αιώνες. (Sfard 1991, σ.24, 29)

Τα προηγούμενα αποσπάσματα είναι ενδεικτικά για τη μεθοδολογία χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών σε μια ολόκληρη σειρά εργασιών που διερευνούν τη διδασκαλία και μάθηση των αλγεβρικών εννοιών. Δευτερογενείς ή ακόμη και τριτογενείς πηγές ιστορικής πληροφόρησης (όπως το πασίγνωστο βιβλίο των Davis και Hersh *The Mathematical Experience*) χρησιμοποιούνται αποσπασματικά για τη στήριξη

ενός θεωρητικού μοντέλου της μάθησης, το οποίο εν συνεχεία γίνεται και εργαλείο διατύπωσης ιστορικών ερμηνειών! Η αντίθεσή μας εδώ δεν αφορά το θεωρητικό μοντέλο καθεαυτό (και ιδιαίτερα τη δυναμική του ως εργαλείου διδακτικής ανάλυσης), αλλά τον τρόπο χρήσης των ιστορικών πηγών η οποία, εκτός από αποσπασματική, είναι και επιλεκτική:

> Ότι ακολουθεί τώρα είναι μια πολύ σύντομη και με κανένα τρόπο εξαντλητική παρουσίαση της μακριάς και ταραχώδους ιστορίας μερικών από τις πιο κεντρικές μαθηματικές έννοιες. Σ' αυτή την εργασία θα ασχοληθώ μόνο με εκείνα τα ιστορικά γεγονότα και αποτελέσματα **τα οποία φωτίζουν την άποψη που θα ήθελα να τονίσω εδώ** … (Sfard 1991, σ.11, η έμφαση δική μας)

Το θεωρητικό μοντέλο της Sfard για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης γνώρισε ευρύτατη διάδοση στο χώρο της Διδακτικής και χρησιμοποιήθηκε σε μια σειρά εργασιών με αντικείμενο μελέτης την Άλγεβρα και την αλγεβρική σκέψη (Kieran 1994, Sfard & Linchevski 1994, Sfard 1995). Στις εργασίες αυτές, τόσο οι άμεσες αναφορές όσο και η μεθοδολογία της έρευνας μαρτυρούν την ισχυρή επίδραση του πιαζετιανού σχεδίου ταυτοποίησης των σταδίων και μηχανισμών της νοητικής ανάπτυξης στην ιστορική εξέλιξη των επιστημονικών εννοιών. Οι Piaget και Garcia (1989) προσδιορίζουν στην ιστορία της Άλγεβρας ένα μηχανισμό μετάβασης από το «ενδο-λειτουργικό» στο «δια-λειτουργικό» και τέλος στο «υπερ-λειτουργικό» στάδιο ανάπτυξης, μια ορολογία που η Sfard σπεύδει να υιοθετήσει επιχειρώντας παραλληλισμούς με το «εργαλειακό» και «δομικό» στάδιο του δικού της θεωρητικού μοντέλου (Sfard 1995, σ.20, 29, 33).

Το βασικό συμπέρασμα που αναδύεται από τις προηγούμενες εργασίες είναι ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακολουθεί μια ιεραρχική δομή, στην οποία αυτό που συλλαμβάνεται εργαλειακά σε ένα επίπεδο γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο, γεγονός που αποτυπώνεται με έναν πίνακα «σταδίων εξέλιξης της άλγεβρας» (Sfard & Linchevski 1994, σ.203). Στον πίνακα αυτό γίνεται αρχικά διάκριση σε δύο «τύπους» (γενικευμένη αριθμητική και αφηρημένη άλγεβρα), καθένας από τους οποίους αποτελείται από δύο «στάδια» (εργαλειακό και δομικό) και για κάθε στάδιο αναγράφονται τα σημεία αιχμής, τα μέσα αναπαράστασης και χαρακτηριστικοί εκπρόσωποι. Για παράδειγμα, το έργο του Διόφαντου «κωδικοποιείται» ως εξής:

Τύπος:	«Γενικευμένη Αριθμητική»
Στάδιο:	«Εργαλειακό»
Σημείο αιχμής:	«Αριθμητικοί υπολογισμοί»
Αναπαράσταση:	«Μικτή: λεκτική + συμβολική (συγκεκομμένη)»

Αυτή η κωδικοποίηση και ένταξη συνοδεύεται επίσης από ορισμένες ιστορικές ερμηνείες τις οποίες αξίζει να παραθέσουμε αυτούσιες:

> Ο Διόφαντος δεν προχώρησε πέρα από τη χρήση των αλγεβρικών εκφράσεων στις οποίες ένα γράμμα δήλωνε μια άγνωστη αλλά σταθερή τιμή, και όπου οι αντίστοιχες εκφράσεις αντιπροσώπευαν τους αριθμούς που λαμβάνονταν συνδυάζοντας τον άγνωστο με άλλους αριθμούς. Θα υποστηρίξουμε ότι αυτό που ανέπτυξε ήταν η άλγεβρα *μιας σταθερής τιμής*, σε αντίθεση με τη *συναρτησιακή άλγεβρα*, όπου τα γράμματα αντιπροσωπεύουν μεταβαλλόμενα μάλλον παρά σταθερά μεγέθη. Η ιδέα ενός γράμματος ως μεταβλητής – ως συμβόλου στη θέση του οποίου μπορεί να αντικατασταθεί οποιοσδήποτε αριθμός – τόσο φανερή σ' εμάς σήμερα, **ουδέποτε εμφανίστηκε στον Διόφαντο**. (Sfard & Linchevski 1994, σ.199, η έμφαση δική μας)

> Υπάρχουν κάποιες ενδείξεις ότι η άλγεβρα μπορεί να εισήλθε σ' αυτή τη δομική φάση με το έργο του Διόφαντου ($3^{ος}$ αιώνας π.Χ.). Ο Διόφαντος, που χρησιμοποίησε ένα συνδυασμό συμβόλων και λέξεων και έτσι δημιούργησε τη λεγόμενη «συγκεκομμένη» άλγεβρα, έλυσε πολλούς διαφορετικούς τύπους εξισώσεων. … Αλλά αυτή η περίοδος μπορεί να θεωρηθεί μόνο ένα πρώτο βήμα στην ανάπτυξη της δομικής άλγεβρας, επειδή **ο Διόφαντος δεν ανέπτυξε καθόλου γενικές μεθόδους**· κάθε ένα από τα 189 προβλήματα των Αριθμητικών του επιλύονταν με διαφορετικό τρόπο. (Kieran 1994, σ.159, η έμφαση δική μας)

Την εποχή που γράφονταν αυτές οι γενικές διαπιστώσεις, η ιστοριογραφία των αρχαίων Μαθηματικών είχε ήδη πραγματοποιήσει μια θεαματική στροφή στη μεθοδολογία της έρευνας. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της «νέας ιστοριογραφίας» είναι ότι τα αρχαία κείμενα δεν ερμηνεύονται πλέον σύμφωνα με την αντίληψη ότι αυτά περιέχουν τις πρώιμες και ατελείς μορφές των σύγχρονων μαθηματικών εννοιών. Δίνοντας απόλυτη προτεραιότητα στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις πρακτικές κάθε αρχαίας μαθηματικής παράδοσης, η νέα ιστοριογραφική προσέγγιση ανέτρεψε για παράδειγμα την (εδραιωμένη επί δεκαετίες) ερμηνεία ότι το μαθηματικό περιεχόμενο των Βαβυλωνιακών πινακίδων αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της στοιχειώδους Άλγεβρας, αυτής που χαρακτηρίζεται σήμερα ως «γενικευμένη Αριθμητική». Μια ριζική

επανεξέταση της τεχνικής ορολογίας και της πρακτικής των Βαβυλώνιων γραφέων έδειξε, αντίθετα, ότι το περιεχόμενο αυτό είναι στενά συνυφασμένο με γεωμετρικές έννοιες και δραστηριότητες (Høyrup 1990, 2002). Νεότερα επίσης αποτελέσματα για την Αιγυπτιακή, την Ελληνική, την Ισλαμική και την Κινεζική μαθηματική παράδοση, αποκαλύπτουν ισχυρές πολιτιστικές επιδράσεις και ιδιομορφίες και αναθεωρούν καθιερωμένες ερμηνείες (Chemla 2003, Imhausen 2003, Oaks & Alkhateeb 2005, Thomaidis 2005, Thomaidis 2011). Για παράδειγμα, η σύγχρονη ιστορική έρευνα προσκομίζει πολλά επιχειρήματα που δείχνουν ότι όσα επισημαίνονται στα προηγούμενα αποσπάσματα σχετικά με τον Διόφαντο αποτελούν εσπευσμένες και αφοριστικές γενικεύσεις.

Ακόμη και μια βιαστική ματιά μπορεί να δείξει την πολυπλοκότητα του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε, όταν θέλουμε να ξεδιαλύνουμε τα νήματα της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας. Ο Διόφαντος αποτελεί κεντρική μορφή αυτής της εξέλιξης αλλά αγνοούμε τη σχέση του, όχι μόνο με τις προελληνικές μαθηματικές παραδόσεις αλλά ακόμη και με την Ελληνική της κλασικής περιόδου, από την οποία το έργο του έχει εμφανώς επηρεαστεί. Στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου συναντούμε για πρώτη φορά τον ορισμό μιας έννοιας «αγνώστου» αριθμού, ένα συγκροτημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων που περιέχουν τον «άγνωστο» και τις δυνάμεις του, και ορισμένους γενικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων.[9] Όλα αυτά τα αλγεβρικά εργαλεία χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων θεωρητικής αριθμητικής στο πεδίο των θετικών ρητών αριθμών, χωρίς γεωμετρικές ερμηνείες ή πρακτικές εφαρμογές. Αν ο Διόφαντος είχε «προετοιμάσει» το δρόμο για το *Συνοπτικό Βιβλίο Υπολογισμού με Άλγεβρα και Αλμουκαμπάλα* του al–Khwarizmi, τότε η απολύτως «ρητορική», και με Ευκλειδείου τύπου γεωμετρικές ερμηνείες, άλγεβρα του τελευταίου θα είχε διαφορετική μορφή. Αντίθετα, ο al–Khwarizmi φαίνεται ότι εκπροσωπούσε στο εσωτερικό των Ισλαμικών Μαθηματικών μια παράδοση με Ινδικές ή Βαβυλωνιακές ρίζες, προσανατολισμένη προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς και τις πρακτικές εφαρμογές (το μεγαλύτερο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται σε προβλήματα

[9] Μια εμπεριστατωμένη ιστορική ανάλυση για το ακριβές νόημα της έννοιας «άγνωστος» στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου έχει δημοσιεύσει πρόσφατα ο Fabio Acerbi, συγκρίνοντας τις διάφορες διατυπώσεις του διοφαντικού ορισμού στα αντίγραφα των χειρόγραφων κωδίκων που έχουν διασωθεί (Acerbi 2015). Η εργασία αυτή αποτελεί εξαιρετικό παράδειγμα των κατευθύνσεων και απαιτήσεων της σύγχρονης ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, τις οποίες είναι χρήσιμο να έχουν υπόψη οι ερευνητές της Διδακτικής όταν χρησιμοποιούν ως εργαλείο ανάλυσης την ιστορική και επιστημολογική εξέλιξη των εννοιών.

εμπορικών συναλλαγών, μετρήσεων και κληρονομιών). Η παράδοση αυτή αναπτύχθηκε ως ένα σημείο ανεξάρτητα από το κυρίαρχο πρότυπο της «επιστημονικής γνώσης», που εκπροσωπούσαν στο Ισλάμ τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και οι μεταφράσεις τους στην Αραβική γλώσσα. Η ανάπτυξη της Άλγεβρας στη Βόρεια Αφρική και τη Δυτική Ευρώπη (όπως αποτυπώνεται π.χ. μέσα στο έργο του Fibonacci ή του Jordanus de Nemore στη διάρκεια του 13ου αιώνα) επηρεάστηκε σημαντικά από αυτή την παράδοση, μια επίδραση που φτάνει μέχρι την *Ars Magna* (1545) του Cardano. Το γεγονός όμως που λειτούργησε ως κινητήριος μοχλός για τη δημιουργία και καθιέρωση της νεότερης, συμβολικής άλγεβρας, ήταν η μεταφορά των *Αριθμητικών* του Διόφαντου από το Βυζάντιο στη Δύση και η καθοριστική επίδραση αυτού του έργου σε μαθηματικούς όπως ο Bombelli, ο Descartes και ο Viète (Juschkewitsch 1963, Waerden 1985, Flegg 1987, Høyrup 2002).

2.2. Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό παράδειγμα

Παραμένοντας στην περίπτωση της Άλγεβρας που εξετάζουμε στη δεύτερη ενότητα της εργασίας, θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης της ιστορικής εξέλιξης συγκεκριμένων αλγεβρικών εννοιών με στόχο να καταφανεί η σημασία της μελέτης των ιστορικών κειμένων για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Αρχικά για την άντληση ιδεών που μπορούν να συμβάλουν στη δημιουργία ελκυστικών διδακτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να μας εφοδιάσουν με πολύτιμα στοιχεία για την ανάλυση των αντιλήψεων που αποκτούν οι μαθητές.

Το παράδειγμα συνδέεται στενά με την ιστορική εξέλιξη των αρνητικών αριθμών, η οποία υπήρξε μακροχρόνια και με πολλές διακυμάνσεις που δεν καταγράφονται συνήθως στην καθιερωμένη ιστοριογραφία των Μαθηματικών.

Οι αρνητικοί αριθμοί αρχίζουν να γίνονται σταδιακά αποδεκτοί από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα ως χρήσιμα εργαλεία στη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων, αλλά οι κανόνες των αντίστοιχων πράξεων (ιδιαίτερα του πολλαπλασιασμού) δεν διαθέτουν καμιά λογική υπόσταση και αιτιολογούνται μόνο από τη συγκεκριμένη χρησιμότητα. Χωρίς δόση υπερβολής, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι εμφανίζονται ως «αναγκαίο κακό» για τη δημιουργία μιας γενικής θεωρίας πολυωνυμικών εξισώσεων.

Ο René Descartes στην περίφημη *La Géométrie* (1637), στην οποία τέθηκαν οι βάσεις για την εφαρμογή των αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία, χρησιμοποιεί τους

αρνητικούς ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων χωρίς όμως να ασχολείται με το επίμαχο ζήτημα της ερμηνείας των πράξεων ή της διάταξής τους.

Ο Descartes ονομάζει τις θετικές ρίζες «αληθινές» (vraies) και τις αρνητικές ρίζες «ψεύτικες» (fausses), αλλά διατυπώνει κανόνες μετασχηματισμού των εξισώσεων με τους οποίους είναι δυνατό να «εξαφανιστούν» οι αρνητικές ρίζες.

Χρησιμοποιεί ως παράδειγμα την εξίσωση

$$(x - 5)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 0 \quad \text{ή} \quad x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

που έχει μία αληθινή ρίζα (το 5) και τρεις ψεύτικες ρίζες (τις 2, 3 και 4).

Στη συνέχεια θέτει $x = y - 3$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$(y - 8)(y - 1)y(y + 1) = 0 \quad \text{ή} \quad y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$$

η οποία έχει τρεις αληθινές ρίζες (τις 8, 1, 0) και μία ψεύτικη (το 1).

Ο Descartes περιγράφει το αποτέλεσμα ως εξής (Smith & Latham, 1954 σσ.162–165):

> … αυξάνοντας την αληθινή ρίζα 5 κατά 3, μειώνουμε κάθε ψεύτικη ρίζα, έτσι ώστε η ρίζα που ήταν προηγουμένως 4 να είναι τώρα μόνο 1, η ρίζα που ήταν προηγουμένως 3 είναι μηδέν, και η ρίζα που ήταν προηγουμένως 2 είναι τώρα μια αληθινή ρίζα, ίση με 1.

Στη συνέχεια διατυπώνει τον ακόλουθο γενικό κανόνα (ο.π., σσ.168–169):

> … αυξάνοντας τις ρίζες κατά μία ποσότητα μεγαλύτερη από κάθε ψεύτικη ρίζα κάνουμε όλες τις ρίζες αληθινές.

Σύμφωνα με τον κανόνα, αν οι αρνητικές ρίζες είναι π.χ. – 6, – 2 και – 1, τότε για να γίνουν όλες θετικές θα πρέπει να αυξηθούν τουλάχιστον κατά 7 (μία «ποσότητα» μεγαλύτερη από κάθε αρνητική ρίζα κατά απόλυτη τιμή, όπως θα λέγαμε σήμερα).[10]

Τότε η εξίσωση

$$(x + 6)(x + 2)(x + 1) = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$$

μέσω του μετασχηματισμού $x = y - 7$ γίνεται

$$(y - 1)(y - 5)(y - 6) = 0 \quad \text{ή} \quad y^3 - 12y^2 + 41y - 30 = 0.$$

Μια αντίστοιχη θεωρία πολυωνυμικών εξισώσεων ανέπτυξε επίσης ο Isaac Newton στις σημειώσεις των πανεπιστημιακών του παραδόσεων (*Lectures in Algebra,* 1673–1683) οι οποίες εκδόθηκαν με τον τίτλο *Arithmetica Universalis* (1707).

Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας ο Newton αντιμετωπίζει επιπλέον το πρόβλημα του προσδιορισμού φραγμάτων για τις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, γεγονός που καθιστά αναγκαίο το χειρισμό ανισοτικών σχέσεων με θετικούς και αρνητικούς

[10] Όπως είναι φανερό από τα προηγούμενα αποσπάσματα, ο Descartes με τον τρόπο που αναπαριστά τους αρνητικούς αριθμούς δεν έχει κανένα λόγο να χρησιμοποιήσει μία ιδιαίτερη έννοια απόλυτης τιμής.

αριθμούς. Οι σχέσεις αυτές αναδεικνύουν το ζήτημα της διάταξης και μια «πρωτόγονη» αντίληψη για την έννοια της απόλυτης τιμής.

Διατυπώνοντας τους κανόνες της πρόσθεσης θετικών και αρνητικών, ο Newton γράφει (Whiteside 1972, σ.67):

> … όταν η αρνητική ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την θετική, τότε το άθροισμα θα είναι αρνητικό.

Επίσης, συζητώντας για τις θετικές και αρνητικές ρίζες μιας εξίσωσης αναφέρεται στη «μέγιστη θετική ρίζα» και στη «μέγιστη αρνητική ρίζα», εξηγώντας (Whiteside 1972, σ.365):

> «… δηλαδή την πιο απομακρυσμένη από το μηδέν».

Όπως διαπιστώνουμε από τα προηγούμενα αποσπάσματα, στη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα οι αντιλήψεις για τη διάταξη των θετικών και αρνητικών αριθμών και την έννοια της απόλυτης τιμής δεν ήταν ίδιες με αυτές που ισχύουν σήμερα.

Η μελέτη, ιδιαίτερα, του κανόνα μετασχηματισμού των εξισώσεων που διατύπωσε ο Descartes στη *La Géométrie* μας οδήγησε στην ιδέα της δημιουργίας μιας διδακτικής δραστηριότητας με βάση το ακόλουθο πρόβλημα:

> Αν α, β, γ, είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος που πρέπει να προστεθεί στους α, β, γ ώστε να γίνουν και οι τρεις θετικοί.

Π.χ. αν οι αριθμοί είναι α = –6, β = –2, γ = –1, τότε ο ζητούμενος ακέραιος είναι το 7, δηλαδή η απόλυτη τιμή του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς αυξημένη κατά μία μονάδα. Σε αλγεβρική συμβολική γλώσσα η λύση του προβλήματος είναι

$$x = \max\{\,|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|\,\}+1\,.$$

Το ζητούμενο της δραστηριότητας από τους μαθητές είναι να εκφράσουν αυτό το συμπέρασμα με <u>οποιονδήποτε</u> γενικό τρόπο.

Το πρόβλημα δόθηκε αρχικά σε μια ομάδα μαθητών Λυκείου που συμμετείχαν σε έναν όμιλο προετοιμασίας για μαθηματικούς διαγωνισμούς. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος αντιμετώπισης από μαθητές μαθητών της Β΄ και Γ΄ Λυκείου ήταν η εξής:

> Έστω x ο ζητούμενος αριθμός.
>
> Σύμφωνα με το πρόβλημα θα ισχύει $\alpha + x > 0,\ \ \beta + x > 0,\ \ \gamma + x > 0$ (1)
>
> Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\alpha + \beta + \gamma + 3x > 0$.
>
> Λύνοντας την τελευταία ανίσωση ως προς x βρίσκουμε

$$x > -\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

Με βάση την τελευταία σχέση, οι συγκεκριμένοι μαθητές κατέληξαν στο επόμενο συμπέρασμα:

> Αν α, β, γ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, τότε ο μικρότερος ακέραιος που μπορούμε να προσθέσουμε ώστε να γίνουν όλοι θετικοί είναι ο πρώτος μεγαλύτερος ακέραιος μετά τον αριθμό $x > -\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ (2)

Η απάντηση είναι φυσικά λανθασμένη, όπως δείχνει το (αντι)παράδειγμα των αριθμών $\alpha = -6$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$, για τους οποίους η (2) δίνει $x > 3$. Δηλαδή, σύμφωνα με το συμπέρασμα των μαθητών, ο ζητούμενος ακέραιος είναι το 4 που δεν αποτελεί λύση του προβλήματος.

Το ερώτημα «Που οφείλεται το λάθος;» που τέθηκε από τους διδάσκοντες στον όμιλο προκάλεσε μια πολύ ενδιαφέρουσα συζήτηση για το νόημα των διαδοχικών αλγεβρικών μετασχηματισμών που οδηγούν από τις ανισώσεις (1) στην ανίσωση (2), ιδιαίτερα για το ζήτημα της ισοδυναμίας που δεν διατηρείται μετά την πρόσθεση κατά μέλη.

Το ίδιο πρόβλημα δόθηκε επίσης σε μαθητές που άρχιζαν την Α΄ Λυκείου, αρκετά πριν από τη διδασκαλία του λογισμού των απολύτων τιμών που γίνεται σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο Άλγεβρας. Οι περισσότεροι είχαν από το Γυμνάσιο μια σχετική ικανότητα στην εκτέλεση απλών πράξεων με αρνητικούς αριθμούς και μια αντίληψη για την έννοια της απόλυτης τιμής ως «ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του» ή «η απόσταση του αριθμού από το μηδέν». Στους συγκεκριμένους μαθητές έγινε η υπόδειξη να εξετάσουν αρχικά κάποια αριθμητικά παραδείγματα αλλά τονίστηκε ότι η απάντησή που θα δώσουν στο πρόβλημα πρέπει να είναι γενική.

Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου δεν έχουν καμία σχέση με εκείνη που περιγράψαμε παραπάνω.[11] Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις τις οποίες χαρακτηρίσαμε ορθές (ή σχεδόν ορθές) και τις παραθέτουμε όπως ακριβώς διατυπώθηκαν από τους μαθητές:

- Ο κατά 1 μονάδα μεγαλύτερος από τον αντίθετο του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς.
- Ο αντίθετος του μικρότερου, αριθμός. Αν δηλαδή π.χ. $\alpha > \beta > \gamma$, τότε ο μικρότερος ακέραιος θα είναι ο $-\gamma$.

[11] Οι απαντήσεις των μαθητών της Α΄ Λυκείου δόθηκαν στο πλαίσιο ευρύτερης εμπειρικής έρευνας, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται λεπτομερώς στην εργασία (Thomaidis & Tzanakis 2007).

- Έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον αντίθετο του μικρότερου.
- Ο αντίθετος του μικρότερου αριθμού.
- Τον αριθμό που είναι μεγαλύτερος κατά 1 μονάδα από την απόλυτη τιμή του μικρότερου από τους 3 αριθμούς.
- Ο αριθμός που είναι ο αμέσως μεγαλύτερος ακέραιος του πιο μικρού αρνητικού αριθμού αν τους είχαμε στους θετικούς αριθμούς.
- Αν προσθέσουμε +1 στον αντίθετο του μικρότερου αρνητικού τότε βγαίνουν όλοι θετικοί.
- Θα βρούμε την απόλυτη τιμή του μικρότερου αρνητικού αριθμού και θα προσθέσουμε 1 μονάδα.
- Πρέπει να προσθέσουμε τη θετική τιμή του αριθμού που απέχει περισσότερο από το μηδέν και μία μονάδα.

Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές και των τριών τάξεων του Λυκείου μας οδηγούν σε ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τα ζητήματα της διδασκαλίας και μάθησης, υπό το πρίσμα της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών που εμπλέκονται στο συγκεκριμένο πρόβλημα:

Η εκτεταμένη εξάσκηση των μαθητών της Α΄ Λυκείου στον αλγεβρικό λογισμό των απολύτων τιμών δεν εξασφαλίζει ότι αυτοί θα είναι αργότερα σε θέση να χρησιμοποιήσουν την έννοια ή το σύμβολο της απόλυτης τιμής με αποτελεσματικό τρόπο στην επίλυση ενός προβλήματος.

Μαθητές που δεν έχουν ασκηθεί στο λογισμό των απολύτων τιμών είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν την έννοια της απόλυτης τιμής, ή ακόμη και να επινοήσουν κάποιο υποκατάστατό της (που έχει πολλές ομοιότητες με ιστορικές αντιλήψεις) για την επίλυση προβλημάτων.

Η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μπορεί να μας εφοδιάσει με ιδέες για τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων, αλλά επίσης να μας διαφωτίσει για το είδος των γνώσεων που αποκτούν οι μαθητές οι οποίες πολλές φορές έχουν μικρή σχέση με αυτές που επιδιώκουν τα προγράμματα σπουδών και η διδασκαλία.

Το προηγούμενο παράδειγμα αλλά και όσα αναφέρθηκαν στη δεύτερη ενότητα της εργασίας αναδεικνύουν κατά την άποψή μας ένα κρίσιμο μεθοδολογικό ζήτημα, που αφορά το ρόλο και τον τρόπο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής και το οποίο επιχειρούμε να προσεγγίσουμε στην τελευταία ενότητα της εργασίας μας.

3. Μερικές πρόσφατες εξελίξεις και συμπεράσματα

Η ραγδαία ανάπτυξη των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην υψηλή «απορροφητικότητα» εννοιών και μεθόδων από «συνοριακά» και καθιερωμένα επιστημονικά πεδία, όπως είναι η Ψυχολογία, η Παιδαγωγική, η Κοινωνιολογία, και άλλα που βρίσκονται πιο κοντά στη «μητρική» επιστήμη, όπως η Ιστορία των Μαθηματικών. Στις προηγούμενες ενότητες διαπιστώσαμε την ολοένα μεγαλύτερη διείσδυση της Ιστορίας στις έρευνες της Διδακτικής, αλλά ταυτόχρονα και το γεγονός ότι πολλοί ερευνητές της τελευταίας δεν φαίνεται να αντιλήφθηκαν έγκαιρα την παράλληλη και εξίσου σημαντική εξέλιξη των ερευνών στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Αυτή η κατάσταση δεν πέρασε φυσικά απαρατήρητη και τα τελευταία χρόνια πυκνώνουν στο χώρο της Διδακτικής οι αντιδράσεις και τα κριτικά ερωτήματα, καθώς και οι απαιτήσεις για νέου είδους ιστοριογραφικές προσεγγίσεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε συλλογικούς τόμους με αντικείμενο τη διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας έχουν δημοσιευτεί τα τελευταία χρόνια ιστορικές εργασίες που κινούνται προς αυτή την κατεύθυνση. Ορισμένες από αυτές εξετάζουν τις συνέπειες που έχει στο χαρακτηρισμό βασικών αλγεβρικών ιδεών, όπως του αγνώστου και της μεταβλητής, η ριζική αναθεώρηση της ιστορικής ερμηνείας για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα (Radford 1996, 2001). Άλλες επιχειρούν να επαναπροσδιορίσουν τη φύση των προβλημάτων που προκάλεσαν την ανάπτυξη της Άλγεβρας (Charbonneau 1996, Charbonneau & Lefevre 1996) ή τα επιστημολογικά εμπόδια που αναδύονται κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική επίλυση προβλημάτων (Puig & Rojano 2004). Κοινό γνώρισμα όλων αυτών των εργασιών για το ζήτημα που εξετάζουμε, είναι ότι επιχειρούν να εισάγουν στην προβληματική των ερευνών της Διδακτικής τις νέες εξελίξεις και ερμηνευτικές προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών τις δύο τελευταίες δεκαετίες.

Οι προηγούμενες εξελίξεις υποδηλώνουν μια τάση αλλαγής: Από την αναζήτηση στην Ιστορία «μηχανισμών» και «σταδίων» που μπορούν να «παραλληλιστούν» με τη νοητική ανάπτυξη, αρκετοί ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών στρέφονται τώρα στη μελέτη του περιεχομένου της ιστορικής εξέλιξης, το οποίο συγκροτείται από ένα μεταβαλλόμενο σύστημα προβλημάτων, εννοιών και μεθόδων που προσδιορίζονται πολιτιστικά και κοινωνικά. Αυτό φαίνεται ότι είναι το είδος της ιστορικο–κριτικής

ανάλυσης που ενδιαφέρει πρωταρχικά και άμεσα τη Διδακτική των Μαθηματικών (Sierpinska 1994: 121–22), αλλά δεν έχουν ακόμη διευκρινιστεί οι μεθοδολογικές βάσεις και τα κριτήρια εγκυρότητας της αντίστοιχης έρευνας.

Οι εξελίξεις αυτές επαναφέρουν στο προσκήνιο μια επισήμανση που είχαμε κάνει πριν αρκετά χρόνια: Η Ιστορία δεν μπορεί πλέον να χρησιμοποιείται σαν ένα σταθερό σώμα γνώσεων, στο οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής καταφεύγουν για να αντλήσουν ιδέες. Αντίθετα, τα ερωτήματα που θέτει η Διδακτική απαιτούν νέες ιστορικές έρευνες που φτάνουν σε αξιοσημείωτο βάθος και φέρνουν στην επιφάνεια ζητήματα τα οποία δεν είχαν απασχολήσει μέχρι τώρα την ιστοριογραφία των Μαθηματικών.[12] Π.χ. η έρευνά μας για τα επιστημολογικά εμπόδια που συνδέονται με την έννοια της απόλυτης τιμής απαίτησε τη μελέτη και ανάλυση μεγάλου πλήθους ιστορικών πηγών που καλύπτουν ένα χρονικό διάστημα τριών περίπου αιώνων (Θωμαΐδης 1995). Για να εντοπίσουμε τα «γενεσιουργά» προβλήματα, τις εννοιολογικές αλλαγές και τα μέσα αναπαράστασης που συνδέονται με την έννοια της απόλυτης τιμής, εξετάσαμε την ιστορική εξέλιξη μαθηματικών εννοιών και μεθόδων όπως οι αρνητικοί και μιγαδικοί αριθμοί, η επίλυση των εξισώσεων, ο λογισμός των ανισοτήτων, η σύγκλιση των σειρών και η αριθμητικοποίηση της Ανάλυσης. Από την άλλη μεριά, για να προσδιοριστεί η ακριβής φύση των εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί σπουδαστές, απαιτήθηκε η μελέτη πολλών πηγών που αφορούν τη «διδακτική μετατόπιση» της απόλυτης τιμής, ένα ζήτημα που συνδέεται με την ιστορική εξέλιξη της διδασκαλίας (και είναι διαφορετικής φύσεως από το προηγούμενο).

Ένα υπόδειγμα ιστορικής έρευνας στα Μαθηματικά, που χρησιμοποιεί ως βασικό εργαλείο ανάλυσης τη μελέτη διαχρονικών ζητημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. την εξέλιξη των διδακτικών εγχειριδίων), αποτελεί το βιβλίο του Gert Schubring *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany* (2005). Το έργο αυτό, καρπός εικοσαετούς ερευνητικής προσπάθειας, προδιαγράφει ορισμένες πολύ σημαντικές όψεις των σχέσεων Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών, τόσο από πλευράς περιεχομένου όσο και μεθοδολογίας, οι οποίες θα αποτελούν κατά την άποψή μας σταθερό σημείο αναφοράς τα επόμενα χρόνια.

[12] Βλέπε για το ζήτημα αυτό στο (Thomaidis 1993, σ.71).

Οι εξελίξεις στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια καθιστούν ολοένα και πιο δυσχερή την ανάληψη νέων ιστορικών ερευνών από τους ερευνητές της Διδακτικής. Χρειάζεται επομένως να ανοίξουν δίαυλοι επικοινωνίας μεταξύ ερευνητών των δύο κλάδων, να εντοπιστούν ανοικτά προβλήματα κοινού ενδιαφέροντος και να γίνει ανταλλαγή εννοιολογικών εργαλείων και μεθόδων έρευνας. Αυτή η προσέγγιση αποτελεί, κατά την άποψή μας, απαραίτητη προϋπόθεση για την ουσιαστική αναβάθμιση των σχέσεων Διδακτικής και Ιστορίας των Μαθηματικών στο προσεχές μέλλον.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Acerbi, F. (2015). Uncountable Numbers. *Greek, Roman, and Byzantine Studies* 55, 902–926.

Arcavi, A. (2004). Solving linear equations – why, how and when? *For the Learning of Mathematics*. 24(3), 24–28.

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 109–132). Washington, DC: M.A.A.

Bachelard, G. (1938/1975). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: J. Vrin.

Βερυκάκη, Κ. & Καστάνης, Ν. (2006). Εννοιολογικές αλλαγές: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 213–232). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Bråting, K. & Pejlare, J. (2015) On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 89(2), 251–265.

Brousseau, G. (1983/1997). Epistemological obstacles and problems in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pp. 79–98). Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1989/1997). Epistemological obstacles and *didactique* of mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pp. 98–116). Dordrecht: Kluwer.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 15–37). Dordrecht: Kluwer.

Charbonneau, L. & Lefevre, J. (1996). Placement and function of problems on algebraic treatises from Diophantus to Viète. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 155–165). Dordrecht: Kluwer.

Chemla, K. (2003). Generality above abstraction: The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in Ancient China. *Science in Context*, 16(3), 413–458.

ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. (Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών) (2009). *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Fauvel, J. & Maanen, J. van (2000) (Eds.), *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. & Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education* 16, 3–17. Η εργασία αυτή έχει μεταφραστεί στα Ελληνικά και περιέχεται στο βιβλίο της Σ. Βοσνιάδου (Επιμ.) *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg, 1995.

Flegg, G. (1987). *From the Greeks to the Renaissance*. Topics in the History of Mathematics. Unit 5. Milton Keynes: The Open University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391–408.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631–654). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gagatsis, A. & Thomaidis, Y. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16(1/2), 3–46.

Grattan–Guinness, I. (2005). History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. In G. van Brummelen & M. Kinyon (Eds.), *Mathematics and the Historian's Craft* (pp. 7–21). New York: Springer.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Book 1 (pp. 277–299). Dordrecht: Kluwer.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 75–90.

Hart, K.M. (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics: 11~16*. Newcastle: John Murray.

Høyrup, J. (1990). Algebra and naive geometry. An investigation of some basic aspects of Old Babylonian mathematical thought. *Altorientalische Forschungen*, 17, 27–69, 262–354.

Høyrup, J. (2002*). Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Θωμαΐδης, Γ. (1995). *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (η περίπτωση της απόλυτης τιμής)*. Διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης γ*, 16, 61– 92.

Θωμαΐδης, Γ. & Τζανάκης, Κ. (2006). Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 253–272). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Imhausen, A. (2003). Egyptian mathematical texts and their contexts. *Science in Context*, 16(3), 367–389.

Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding – Objectifying the subjective. In J. da Ponte and J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 1 (pp. 139–156). Lisbon: University of Lisbon.

Jankvist, U. Th. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261.

Juschkewitsch, A.P. (1963). *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Berlin: Pfalz–Verlag.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra. Some pros and cons. In J. da Ponte and J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 1 (pp. 157–175). Lisbon: University of Lisbon.

Kjeldsen. T.H. (2014).Teaching with and about the nature of mathematics through the history of mathematics: Enacting inquiry learning in Mathematics. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.) *History of Mathematics and Mathematics Education* (pp.38–55). *Education Sciences*, Thematic Issue.

Κολέζα, Ε. (2006): Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπ*αίδευση (σσ. 27–46). Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Maanen, J. van (2002). Research on history in mathematics education in the Netherlands: The 'Reinvention Studies'. In Fou–Lai Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education* (pp. 191–201). Taipei: National Taiwan Normal University.

Nooney, K. (2002). A Critical Question: Why *Can't* Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *The Mathematics Educator*, 12(1), 1–6.

Oaks, J. & Alkhateeb H. (2005). Mal, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra. *Historia Mathematica*, 32(4), 400–425.

Otte, M. & Seeger, F. (1994). The human subject in mathematics education and the history of mathematics. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 351–365). Dordrecht: Kluwer.

Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science* (translated by H. Feider), New York: Columbia University Press.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 189–223). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 39–53). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio – cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13–36). Dordrecht: Kluwer.

Schubring, G. (2004). Ontogeny and phylogeny: Categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the ICME 10 Satellite Meeting of the HPM Group and the Fourth European Summer University "History and Epistemology in Mathematics Education" (revised edition)* (pp. 329–339). Uppsala University.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15–39.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191–228.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Smith, D.E. & Latham, M.L.(Trans.) (1954). *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*. New York: Dover.

Σωτηράκης, Ν. *Τα Μαθηματικά εις την Ελλάδα την περίοδο της Τουρκοκρατίας (16ος έως 18ος αιών)*. Μαθηματικαί Διαλέξεις 1961. Αθήναι: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Thomaidis, Y. (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 37–43. (Βλέπε επίσης τις διορθώσεις τυπογραφικών αβλεψιών στο 11(3), σ.9)

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons. *Science & Education*, 2(1), 69–86.

Thomaidis, Y. (2005). A framework for defining the generality of Diophantos' methods in "Arithmetica". *Archive for History of Exact Sciences*, 59(6), 591–640.

Thomaidis, Y. (2011). Some remarks on the meaning of equality in Diophantos's *Arithmetica*. *Historia Mathematica*, 38(1), 28–41.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 165–183.

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. In Bh. Sriraman (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (pp.247–294). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Waerden, B.L. van. (1985). *A History of Algebra*. New York: Springer.

Whiteside, D.T. (Ed.) (1972). *The mathematical papers of Isaac Newton*. Volume V. Cambridge: Cambridge University Press.

Ζορμπαλά, Κ. & Τζανάκης, Κ. (2003). Η έννοια του επιπέδου στη γεωμετρία: Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης ενσωματωμένα σε σύγχρονες αντιλήψεις. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* (σσ. 265–284). Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.