Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

§3.12: Τριγωνική Ανισότητα

- Θεωρία
- Γεωμετρική ερμηνεία
- Ερωτήσεις
- Βασικές ασκήσεις (λυμένες)
- Άλυτες ασκήσεις

ΖΑΚΥΝΘΟΣ 2010 – 11

Τριγωνική ανισότητα
Ένα μάθημα στην ενότητα § 3.12

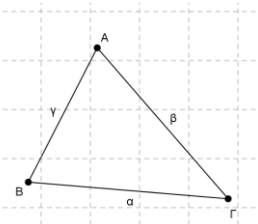
Ερώτηση 1η
α) Διατυπώστε, αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα. β) Δώστε σχήμα και τύπο.

Απάντηση

α. **Διατύπωση:** Σε κάθε τρίγωνο, οποιαδήποτε πλευρά του είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από την διαφορά τους.

Για την **απόδειξη** της τριγωνικής ανισότητας, δείτε σχολικό βιβλίο σελίδα 55.

β) **σχήμα:**



Τύποι (1):

- $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$
- $|\gamma-\alpha|<\beta<\alpha+\gamma$
- $|\beta-\alpha|<\gamma<\alpha+\beta$

Βασική άσκηση 1
Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν οι εξής τύποι:

$$\{\alpha<\beta+\gamma \ \textbf{και} \ \beta<\alpha+\gamma \ \textbf{και} \ \gamma<\alpha+\beta\} \ \textbf{(τύποι 2)}$$

τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Απάντηση

- Θα δείξουμε ότι: $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$

Έχουμε: $\beta<\alpha+\gamma$ άρα $\beta-\gamma<\alpha$
Επίσης: $\gamma<\alpha+\beta$ άρα $\gamma-\beta<\alpha$
από τις δύο σχέσεις παίρνουμε: $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$

- Όμοια θα αποδείξουμε ότι: $|\gamma-\alpha|<\beta<\alpha+\gamma$

Έχουμε: $\alpha<\beta+\gamma$ άρα $\alpha-\gamma<\beta$
Επίσης: $\gamma<\alpha+\beta$ άρα $\gamma-\alpha<\beta$
από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε: $|\gamma-\alpha|<\beta<\alpha+\gamma$

- Όμοια αποδεικνύεται ότι: $|\beta-\alpha|<\gamma<\alpha+\beta$

Βασική άσκηση 2
Αν α, β , γ ευθύγραμμα τμήματα και ισχύει: $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ **(τύπος 3)** τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα

Απάντηση
Από τα δεδομένα έχουμε, $\alpha<\beta+\gamma$

Επίσης, από την σχέση $|\beta-\gamma|<\alpha$ έχουμε:

$$|\beta-\gamma|<\alpha \Leftrightarrow -\alpha<\beta-\gamma<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha<\beta-\gamma \\ \text{και} \\ \beta-\gamma<\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma<\alpha+\beta \\ \text{και} \\ \beta<\alpha+\gamma \end{cases}$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι ισχύουν οι τύποι (2), άρα ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Επομένως όταν θέλουμε να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα, αρκεί να αποδείξουμε μια σχέση από τους τύπους (1) και όχι και τους τρεις τύπους.

<u>Βασική άσκηση 3η</u>
Αν α, β , γ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα με **α το μεγαλύτερο** από αυτά και ισχύει **α < β + γ (τύπος 4),** τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

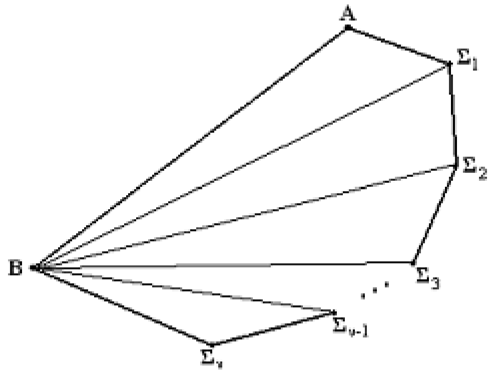
<u>Απάντηση</u>
Γνωρίζουμε ότι: $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$, οπότε:
$\beta < \alpha < \alpha + \gamma$ δηλαδή $\beta < \alpha + \gamma$
$\gamma < \alpha < \alpha + \beta$ δηλαδή $\gamma < \alpha + \beta$
Επίσης γνωρίζουμε ότι: $\alpha < \beta + \gamma$, οπότε ισχύουν οι τύποι 2, άρα ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

<u>Σημείωση:</u> *Επομένως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα, αρκεί να αποδείξουμε τους τύπους (2) ή (3) ή (4) και όχι και τους τρεις τύπους της σχέσης (1).*

<u>Ερώτηση 2η</u>
α) Ποια είναι η **γεωμετρική ερμηνεία** της τριγωνικής ανισότητας;
β) **Γενικεύεστε** και **αποδείξτε** την τριγωνική ανισότητα.
γ) Τι μας **διδάσκει** γενικά και φιλολογικά η τριγωνική ανισότητα στην καθημερινή μας ζωή;

<u>Απάντηση</u>
α. Η τριγωνική ανισότητα γράφεται έτσι: $\mathbf{B\Gamma < BA + A\Gamma}$

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής: *Ότι η διαδρομή* $\mathrm{B} \to \Gamma$ *είναι μικρότερη της διαδρομής* $\mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \Gamma$*, δηλαδή ο πιο σύντομος δρόμος μεταξύ δύο σημείων Β, Γ είναι η ευθεία (ή το ευθύγραμμο τμήμα).*



β. Επίσης μπορούμε να το γενικεύσουμε ως εξής:
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία Α, Β είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη που ενώνει τα σημεία αυτά.

<u>Απόδειξη</u>
Ας είναι ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και $A\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\ldots\Sigma_{\nu-1}\Sigma_\nu B$ μία τεθλασμένη. Φέρνουμε όλες τις διαγώνιους από το Β. Από τις τριγωνικές ανισότητες στα τρίγωνα που σχηματίζονται παίρνουμε διαδοχικά:

Από το πρώτο τρίγωνο έχουμε: $AB < A\Sigma_1 + \Sigma_1 B$ και με αντικατάσταση από τα άλλα τρίγωνα παίρνουμε διαδοχικά
$AB < A\Sigma_1 + \Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_2 B$
$AB < A\Sigma_1 + \Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_2\Sigma_3 + \Sigma_3 B$
……………………………….

$$\mathrm{AB} < \mathrm{A}\Sigma_1 + \Sigma_1\Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{\nu-1}\Sigma_\nu + \Sigma\mathrm{B}$$

γ. Τι μας διδάσκει η τριγωνική ανισότητα στην καθημερινή ζωή; Δείτε τα εξής παραδείγματα:
α. Όταν η **Β**ούλα έχει διαφορές με την **Γ**ιάννα, θα λυθούν πιο εύκολα αν μιλήσουν απευθείας και όχι μέσω της τρίτης φίλης **Α**γλαΐας

β. Η σύντομη διαδρομή από ένα χωριό **Β** σε ένα χωριό **Γ** είναι ο δρόμος που τα συνδέει και όχι μέσω τρίτου χωριού **Α** (μπορεί φυσικά να είμαι και ο πιο γρήγορη διαδρομή, λόγω της φύσης του δρόμου, δες ανάβαση σε βουνό)

Ερώτηση 3η
Σε ποιες **περιπτώσεις** εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα σε μια άσκηση;

Απάντηση
Την τριγωνική ανισότητα την εφαρμόζουμε κυρίως στις εξής περιπτώσεις:

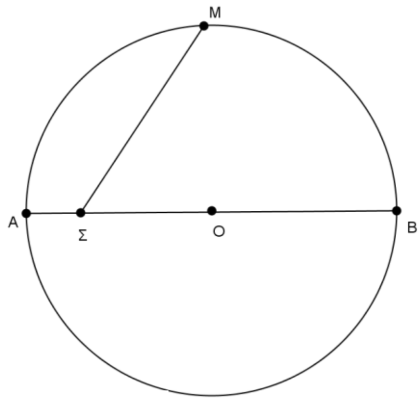
→ Η ζητούμενη σχέση είναι **ανισοτική σχέση πλευρών**,
πχ. $AB < 2\,A\Gamma$
πχ. $K\Lambda < R + \rho$

→ Η ζητούμενη σχέση περιέχει **δύο ανισοτικές σχέσεις πλευρών**,
Πχ. $R - \rho < OK < R + \rho$
Πχ. $3 < \alpha < 5$

→ Όταν θέλουμε να αποδείξουμε την **ύπαρξη – κατασκευής τριγώνου**, τότε χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή αν δίνονται τρία ευθύγραμμα μήκη α, β και γ, αυτά θα είναι πλευρές τριγώνου, **αν και μόνο αν,** ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα (τους τύπος 2 ή 3 ή 4).
Αν μια από τις σχέσεις δεν ισχύει, τότε δεν κατασκευάζεται τρίγωνο.

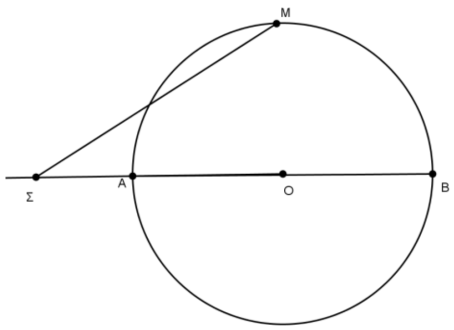
πχ. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ τότε ορίζεται τρίγωνο αφού ισχύει η τριγωνική ανισότητα (αφού $4 < 2 + 3$)
πχ. $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 11$, τότε **δεν** ορίζεται τρίγωνο, αφού δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα (γιατί $\gamma = \alpha + \beta$)
πχ. $\alpha = 5\gamma$, $\beta = 3\gamma$, γ τότε **δεν** ορίζεται τρίγωνο, αφού δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα (γιατί $\alpha > \beta + \gamma$)

10 Ασκήσεις στην Τριγωνική Ανισότητα



1. Έστω κύκλος (Ο, ρ) με ΑΒ διάμετρος. Αν Σ είναι ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του ΑΟ και Μ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να δείξετε ότι: $\Sigma A \le \Sigma M \le \Sigma B$

2. Έστω κύκλος (Ο, ρ) με ΑΒ διάμετρος. Αν Σ είναι ένα τυχαίο σημείο στην προέκταση του ΟΑ και Μ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να δείξετε ότι: $\Sigma A \le \Sigma M \le \Sigma B$



3. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι $\upsilon_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

4. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι: $MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Μ ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Να δείξετε ότι:
ΑΒ +ΒΓ + ΓΑ < 2(ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ)

6. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του,
α. Να αποδείξετε ότι: ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ < 2(ΟΑ + ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ)
β. Για ποια θέση του Ο, το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:
α. ΑΓ = 2ΑΒ β. ΑΒ < ΒΓ (με δύο τρόπους)

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:
α. $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$
β. $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

9. Δίνονται τα μήκη $\alpha = \kappa^2 + \lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$ με κ, λ θετικοί αριθμοί ($\kappa > \lambda$)
α. Βρείτε το μεγαλύτερο μήκος από τα α, β ,γ
β. Να αποδείξετε ότι ορίζεται τρίγωνο με τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα.

10. Έστω κύκλος (Ο, ρ) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι: $AB < 2\Gamma\Delta$

Χρήσιμες συνδέσεις και εφαρμογές στο διαδίκτυο

1. http://www.emathisis.gr/activities/geogebra_files/g/trig_anis.html
Στη δραστηριότητα που ακολουθεί εξετάζουμε την τριγωνική ανισότητα ως ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τρία τμήματα α, β και γ να αποτελούν πλευρές τριγώνου.
Προσπαθήστε να ανακαλύψετε τι συμβαίνει όταν μια πλευρά είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των άλλων δύο πλευρών ή μικρότερη από τη διαφορά τους.

2. http://users1.sch.gr/fergadioti/elm/index.php/geometrya1/44-trigvna/177-riganis/1448-1
Εξετάστε πότε τρία δοσμένα μήκη α , β , γ, μπορούν να αποτελέσουν πλευρές τριγώνου του εκλεκτού συνάδελφου Φεργαδιώτη Αθανάσιου.

3. http://users.sch.gr/kkyrits/abstriganis.htm
Η τριγωνική ανισότητα στις απόλυτες τιμές. Επειδή απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι η απόσταση της εικόνας του αριθμού από την αρχή των αξόνων, ένας τρόπος να δούμε σε γεωμετρική κατασκευή την απόλυτη τιμή αριθμού είναι και ο εξής:
Κατασκευάζουμε κύκλο κέντρου Ο που να περνάει από την εικόνα του αριθμού μας και η απόλυτη τιμή του αριθμού είναι η τεταγμένη του σημείου που αυτός ο κύκλος τέμνει τον θετικό ημιάξονα y΄y.
Ακολουθήστε λοιπόν τα βήματα της εφαρμογής με τη σειρά από 1 έως 7 προσεκτικά και παρατηρήστε.
Από τα δυο σημεία |α+β| και |α|+|β| ποιο είναι πιο ψηλά; Πότε συμπίπτουν; Διατυπώστε την ανισότητα.

4. http://www.mathman.gr/panepisthmio/statistikh/73-2009-09-28-19-09-56.html
Η τριγωνική ανισότητα στην Γ΄ Λυκείου –Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών