ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
# (συμπληρωματικός διαγωνισμός)
# 14 Μαΐου 2021

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

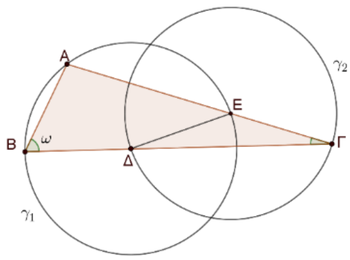
Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 707070 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 707070 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε τον έβδομο στη σειρά διαιρέτη. *Μονάδες 6*

### Πρόβλημα 2

Σε μία γιορτή ένας αριθμός ζευγαριών που αποτελούνται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι χορεύουν. Από τα κορίτσια που συμμετέχουν στη γιορτή χορεύουν τα $\frac{2}{3}$, ενώ από τα αγόρια που συμμετέχουν χορεύουν τα $\frac{3}{5}$. Να βρείτε το ποσοστό επί τις εκατό των παιδιών που χορεύουν ως προς τον αριθμό των παιδιών που συμμετέχουν στη γιορτή. *Μονάδες 7*

### Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ και το σημείο Ε ανήκει στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία Α, Β, Ε ανήκουν στον κύκλο $\gamma_1$ με κέντρο το σημείο Δ. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στον κύκλο $\gamma_2$ με κέντρο το σημείο Ε. Αν η γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\omega = 63^0$ μοιρών, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.




*Μονάδες 7*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες* *Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
# (συμπληρωματικός διαγωνισμός))
# 14 Μαΐου 2021

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου $4654650$ από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι $4654650$ και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη.

***Μονάδες 6***

### Πρόβλημα 2/μ

**(α)** Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό $x$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $y$ έτσι ώστε η διαφορά $x-y$ να ισούται με το γινόμενο $xy$.

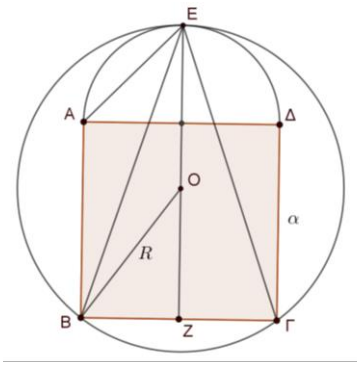
**(β)** Αν οι $x, y$ ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος (α), να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=\frac{y(x^2+2)}{x(y+1)}.$$

***Μονάδες 7***

### Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $\alpha$. Το ημικύκλιο ΑΕΔ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΔ του τετραγώνου και ο κύκλος $\gamma$ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $\mathrm{OB}=\mathrm{O\Gamma}=R$ εφάπτεται εσωτερικά με το ημικύκλιο στο σημείο Ε που είναι το μέσο του ημικυκλίου. Δίνεται ακόμη ότι η ΕΖ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.




Να εκφράσετε το μήκος της ακτίνας $R$ του κύκλου $\gamma$ ως συνάρτηση της πλευράς $\alpha$ και να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ, ως συνάρτηση του α.

***Μονάδες 7***

***Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες*** ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**
**(συμπληρωματικός διαγωνισμός)**
**14 Μαΐου 2021**

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι $\mu,\nu$ με $\mu \geq 2$ είναι τέτοιοι ώστε:

$$9^{\mu-1} + 9^{\nu} \leq 2 \cdot 3^{\nu+\mu-1}.$$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3^{\mu} + 3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 12.

*Μονάδες 6*

### Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Βρίσκουμε όλα τα αθροίσματα που δημιουργούνται με δύο όρους από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ και παρατηρούμε ότι τα τρία μικρότερα από αυτά είναι 128, 144 και 148, ενώ τα δύο μεγαλύτερα είναι 204 και 192. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$.

*Μονάδες 7*

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^0$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και τη διάμεσο ΑΜ στο σημείο Ε. Η κάθετη από το Ε προς την πλευρά ΑΒ την τέμνει στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

$$\Delta\mathrm{B} = 2 \cdot \mathrm{EZ}$$

*Μονάδες 7*

***Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες*** ***Καλή επιτυχία!***

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**
**(συμπληρωματικός διαγωνισμός)**
**14 Μαΐου 2021**

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\beta\gamma=15 \\ (\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5)=120 \end{matrix}\right\}.$$

*Μονάδες 6*

### Πρόβλημα 2

Για τον πραγματικό αριθμό $\beta$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\alpha$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα: $\alpha^2-\frac{1}{\alpha}=\beta.$

Για ποιες ακέραιες τιμές του $\beta$ ο αριθμός $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}$ είναι ακέραιος;

*Μονάδες 7*

### Πρόβλημα 3

Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{\mathrm{A}}=90^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι διαφορετικά πάνω στην ευθεία ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=15^0$ και $\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{E}$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

*Μονάδες 7*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες* *Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**
**(συμπληρωματικός διαγωνισμός)**
**14 Μαΐου 2021**

## Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x, y)$ που είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 + (x-y)^2 + 2 = 2|x+y|$.

*Μονάδες 6*

### Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\Sigma(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\left[\mu + (\mu+2) + (\mu+4) + \ldots + (\mu+2\nu) - \mu(\nu+\mu)\right],$$

δεν μπορεί να γραφεί ως δύναμη της μορφής $2^{\kappa}$, όπου $\kappa$ θετικός ακέραιος, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους $\mu, \nu$ με $\mu < \nu$.

*Μονάδες 7*

### Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AB}$ και περιγεγραμμένο κύκλο $\gamma(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από το Ο προς τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου την τέμνει στο σημείο Ε. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην ευθεία ΑΔ, διαφορετικό από το Δ, τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$.

*Μονάδες 7*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες* *Καλή επιτυχία!*