Υποδιαφορετικές ζώνες

Θέμα 1ο

$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln x,\ x>0$ (Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Α) $h(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^*$

Έχουμε: $D_{foh} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid h(x) \in (0,+\infty)\}$

$= \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} > 0\} = (0,+\infty)$

Άρα $D_{foh} = D_f$

Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$(foh)(x) = f(h(x)) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)\ln\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} - x\right)(-\ln x)$

$= \left[-\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]\cdot(-\ln x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln x = f(x)$

Επομένως, έχουμε: $foh = f$

Β1.) Έστω $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \geq 0$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

και άρα: $x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) > -\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \geq 0$

διότι $x_2 - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2} = \frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2} \leq 0$

Με πολ/σμο κατά μέλη παίρνουμε:

$$\left(-\ln x_1\right)\cdot\left[-\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\right] > \left(-\ln x_2\right)\cdot\left[-\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\ln x_1 > \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\ln x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$\Rightarrow f \searrow (0,1]$

Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

• $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq \ln x_1 < \ln x_2$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ και άρα

$0 \leq x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2}$ διότι $x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1} \geq 0$

Με πολ/σμο κατά μέλη παίρνουμε:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\cdot\ln x_1 < \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\cdot\ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$$

Έχουμε:

f συνεχής στο $(0,1]$ $\left.\begin{array}{l} \\ f\downarrow(0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow f(0,1] = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))$

f συνεχής στο $[1,+\infty)$ $\left.\begin{array}{l} \\ f\uparrow[1,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f([1,+\infty)) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$

- $f(1) = (1-\frac{1}{1})\cdot\ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-\frac{1}{x})\cdot\ln x\right] \underline{\underline{(+\infty)\cdot(-\infty)}} +\infty$, διότι

  $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-\frac{1}{x})\cdot\ln x\right] \underline{\underline{(+\infty)\cdot(+\infty)}} +\infty$, διότι

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επομένως, έχουμε: $f((0,+\infty)) = f((0,1]) \cup f([1,+\infty))$

$= [0,+\infty) \cup [0,+\infty) = [0,+\infty)$

B2) Θεωρούμε $\nu = 1 \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Πράγματι, από το Β1., υπάρχει $x_0 \in (0,1]$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = 1 \in [0, +\infty) = f((0,1])$ και επειδή $f(1) = 0 \neq 1$, θα είναι: $x_0 \in (0,1)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. (Η ρίζα είναι μοναδική λόγω μονοτονίας)

Γ1) Η f είναι συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$, άρα θα αναζητήσουμε ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο 0.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x - \frac{1}{x}\right)\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - 1)\ln x}{x^2} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) \cdot \ln x\right] \overset{1 \cdot (+\infty)}{=\!=} +\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x\right] = +\infty$ και άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και η μοναδική της ασύμπτωτη

Γ2) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x-\frac{1}{x}\right)'\cdot\ln x + \left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot(\ln x)'$$

$$= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x + \left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \ln x + \frac{\ln x}{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$(f'(x))' = f''(x) = (\ln x)' + \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' + (1)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} + \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{x^2+2}{x^3} + \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^2 - 2\ln x + 3}{x^3}$$

Για κάθε $x>0$, όταν και $x^2>0$ και άρα:

$$x^2 - 2\ln x + 3 = \underbrace{x^2 - \ln x^2}_{>0} + 3 > 3 > 0 \text{ δηλ.}$$

$\ln x^2 \leq x^2 - 1 < x^2$ και άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ) Θέτοντας $\alpha(x) = \frac{e^{2021x} + e^{2020x}}{2}$ και $\beta(x) = \sqrt{1-x^2}$

η δοθείσα γράφεται

$$\boxed{f(\alpha(x)) = f(\beta(x))}$$ έχουμε:

$D_{f\circ\alpha} = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) \in (0,+\infty)\} = \mathbb{R}$ και

$D_{f\circ\beta} = \{x \in D_\beta \mid \beta(x) \in (0,+\infty)\} = (-1,1)$ διότι:

$D_\beta = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\} = [-1,1]$ και $\beta(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$

Επομένως, η δοθείσα ορίζεται αν και μόνο αν

$x \in (-1,1) = \mathbb{R} \cap (-1,1)$. Όμως, για κάθε $x \in (-1,1)$

ισχύει: $0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 < 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow$

$$0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \in (0,1]$$

Επίσης, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα

η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

$$0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1 \overset{f' \uparrow (0,1]}{\Rightarrow} f'\left(\sqrt{1-x^2}\right) \leq f'(1) = \ldots = 0$$

Επίσης, $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{e^{2021x} + e^{2020x}}{2}\right) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (-1,1)$$

Επίσης, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

$f'(\sqrt{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

και $f\left(\frac{e^{2021\cdot 0} + e^{2020\cdot 0}}{2}\right) = f(1) = 0$, επομένως

- $x \in (-1,0) \cup (0,1) \Rightarrow f'(\sqrt{1-x^2}) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{e^{2021x} + e^{2020x}}{2}\right)$
- $x = 0 \Rightarrow f'(\sqrt{1-0^2}) = f'(1) = 0 = f(1) = f\left(\frac{e^{2021\cdot 0} + e^{2020\cdot 0}}{2}\right)$

και άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x_0 = 0$

Ε) Έχουμε: $g(x) \cdot g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- g' συνεχής στο $\mathbb{R}$

  $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

  Άρα η g' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g'(0) = 1 > 0$

  οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $g \uparrow \mathbb{R}$
- g συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

  $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

  Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0) = 1 > 0$

  οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ⇒

$\eta\mu(x^2+1) \le |\eta\mu(x^2+1)| < |x^2+1| = x^2+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ⇒

$g(\eta\mu(x^2+1)) < g(x^2+1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ⇒

$f(g(\eta\mu(x^2+1))) < f(g(x^2+1))$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(διότι $|\varepsilon\varphi x| < |x|$, για κάθε $x\neq 0$ και $D_f = (0,+\infty)$
και $g \uparrow \mathbb{R}$ και $f \uparrow (0,+\infty)$)

Παρατήρηση

1) Η μονοτονία της f προκύπτει και από το πρόσημο της παραγώγου της:

$$f'(x) = \frac{x^2\ln x + \ln x + x^2 - 1}{x^2},\ x>0$$

Έστω $G(x) = x^2\ln x + \ln x + x^2 - 1$, $x>0$. Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη με $G'(x) = 2x\ln x + 3x + \frac{1}{x}$, $x>0$

$$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{2x^2\ln x + 3x^2 + 1}{x},\ x>0$$

Έστω $K(x) = 2x^2 \ln x + 3x^2 + 1$, $x>0$ η συνάρτηση K
είναι παραγωγίσιμη με $K'(x) = 4x \ln x + 8x$, $x>0 \Leftrightarrow$
$K'(x) = 4x \cdot (\ln x + 2)$, $x>0$. Έχουμε:

- $K'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (\ln x + 2) = 0 \overset{4x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$
- $K'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x(\ln x + 2) > 0 \overset{4x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$
- $K'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2}$ επομένως έχουμε

$K(x) \geq K(e^{-2}) = \frac{e^4 - 1}{e^4} > 0$ για κάθε $x>0$

και άρα $\delta'(x) > 0$ για κάθε $x>0$, οπότε $\delta \uparrow (0,+\infty)$
επίσης $\delta(1) = 0$, επομένως $\delta(x) < 0$ στο $(0,1)$ και
$\delta(x) > 0$ στο $(1,+\infty)$. Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$
και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Επίσης, $f'(1) = 0$.
Άρα $f \downarrow (0,1]$ και $f \uparrow [1,+\infty)$.

Θέμα 2ο

$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x<0 \\ 2\sqrt{x}+1, & x\geq 0 \end{cases}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη με

$f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} - e^x = 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α1) Είναι $D_g = \mathbb{R}$ και έχουμε:

g παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $g'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \left(1+\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$

Άρα $g\downarrow(-\infty,0)$.

g συνεχής στο $(-\infty,0)$, $g\downarrow(-\infty,0)$ $\Rightarrow g((-\infty,0)) = \left(\lim\limits_{x\to 0^-} g(x), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{1+(-\infty)}{=\!=} -\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

Άρα $g((-\infty,0)) = (-\infty,1)$

g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = (2\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

Επομένως, η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και άρα $g \uparrow [0,+\infty)$

(Η g δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$).

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } [0,+\infty) \\ g \uparrow [0,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow g([0,+\infty)) = [g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x))$

$g(0) = 2\sqrt{0}+1 = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}+1) \overset{2(+\infty)+1}{=\!=} +\infty$

Άρα $g([0,+\infty)) = [1,+\infty)$

Επομένως, $g(\mathbb{R}) = g((-\infty,0)) \cup g([0,+\infty)) = (-\infty,1) \cup [1,+\infty)$

$= (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Α2) Έχουμε $g(-2) = 1 + \frac{1}{-2} = 1/2 > 0$ και

$g(-1/2) = 1 + \frac{1}{-1/2} = -1 < 0$

Άρα $g(-2)\cdot g(-1/2) < 0$. Επομένως, η g είναι συνεχής στο $[-2,-\frac{1}{2}] \subseteq (-\infty,0)$ οπότε η g ικανοποιεί [illegible]

Θεώρημα του Θεωρήματος Bolzano στο $[-2, -\frac{1}{2}]$. Αρκεί προφανώς να δείξουμε $\alpha = -2 < -1/2 = \beta$

Β1) Ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{1+\frac{1}{x}>0 \text{ κοντά στο } +\infty}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Θέτουμε $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1}{\overset{1+\frac{1}{x}=w}{=\!=\!=}} \lim_{w\to 1}\ln w = \ln 1 = 0 \quad \text{άρα}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$ το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$

έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=\!=\!=}}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\ln(1+t))'}{(t)'} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t} = 1$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{u\to 1} e^u = e^1 = e$

Άρα $f(0) = e > 0$

Επομένως, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - e^x = 0 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(e^x\right)' \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\ln f(x) = e^x + c \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$, έχουμε: $\ln f(0) = e^0 + c \Rightarrow \ln e = 1 + c$

$\Rightarrow \boxed{c=0}$ Άρα: $\ln f(x) = e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = e^{e^x},\ x\in\mathbb{R}}$$

Β2) Η παράγωγος $\overset{\text{στο } \mathbb{R}}{\text{ως}}$ σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(e^{e^x}\right)' = e^{e^x}\cdot e^x = e^{e^x+x} > 0$$

Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$

Η παράγωγος στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = \left(e^{e^x+x}\right)' = e^{e^x+x}\cdot\left(e^x+x\right)' = e^{e^x+x}\cdot\left(e^x+1\right) > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή στο ℝ. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f \uparrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{e^x} \underset{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}{\overset{e^x = u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 0} e^u = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{e^x} \underset{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}{\overset{e^x = t}{=\!=\!=}} \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$.

Β3) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$g(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1$ και $f(x) > 1$ $\left(f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)\right)$

Άρα $g(x) < f(x)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{e^x} \geq e^{x+1} \geq (x+1)+1 \Rightarrow f(x) \geq x+2$

με ίσον ισότητα να μην ισχύει διότι $x+1 \geq 1 > 0$ και άρα $e^{x+1} > x+2$. Επίσης, έχουμε:

$x+2 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} + 1 + 1 - 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 + (\sqrt{x}-1)^2$

$= g(x) + (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ και άρα $f(x) > g(x)$.

Επομένως ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η C_f είναι "πάνω" από τη C_g στο $\mathbb{R}$.

Β4). Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$, ένα σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{e^{x_0}} = e^{e^{x_0}+x_0}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{e^{x_0}+x_0}\cdot x + e^{e^{x_0}} - x_0 \cdot e^{e^{x_0}+x_0}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει <u>ακριβώς ένα</u> $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $e^{e^{x_0}} - x_0 \cdot e^{e^{x_0}+x_0} = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^{e^x} - x \cdot e^{e^x + x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) - x \cdot f'(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και <u>συνεχής</u>) με

$$\varphi'(x) = f'(x) - \left(f'(x) + x \cdot f''(x)\right)$$

$$= f'(x) - f'(x) - x f''(x) = -x \cdot f''(x)$$

Έχουμε $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -x f''(x) > 0 \overset{f''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} x < 0$

$\varphi'(0) = 0$ και $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Επομένως, ισχύει: $\varphi \uparrow (-\infty, 0]$ και $\varphi \downarrow [0, +\infty)$

φ συνεχής στο $(-\infty, 0]$
$\varphi \uparrow (-\infty, 0]$
$\Rightarrow \varphi((-\infty, 0]) = (\lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \varphi(0)]$

φ συνεχής στο $[0, +\infty)$
$\varphi \downarrow [0, +\infty)$
$\Rightarrow \varphi([0, +\infty)) = (\lim_{x \to +\infty} \varphi(x), \varphi(0)]$

Είναι $\varphi(0) = f(0) = e^{e^0} = e^1 = e$

$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} [e^{e^x}(1 - xe^x)] = 1 \cdot (1 - 0) = 1$

διότι $\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} [e^{e^x}(1 - xe^x)] \overset{(+\infty)(1-(+\infty))}{=\!=\!=} -\infty$

Άρα $\varphi((-\infty, 0]) = (1, e]$ οπότε διότι υπάρχει
$x_0 \in (-\infty, 0]$ ώστε $\varphi(x_0) = 0$ και $\varphi([0, +\infty)) = (-\infty, e]$
οπότε υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0 \in (-\infty, e]$
Το x_0 είναι μοναδικό διότι $\varphi \downarrow [0, +\infty)$

B5) Έχουμε: $e^e + e > 2e^{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{\sqrt{e}} - e < e^e - e^{\sqrt{e}}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{e}} - e}{\frac{1}{2}} < \frac{e^e - e^{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα $[0, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$ και παραγωγίσιμη στα $(0, \frac{1}{2})$ και $(\frac{1}{2}, 1)$. Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (0, \frac{1}{2})$ και $\xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ώστε να ισχύουν:

- $f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{e^{e^{1/2}} - e^{e^0}}{\frac{1}{2}} = \frac{e^{\sqrt{e}} - e}{\frac{1}{2}}$
- $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{e^{e^1} - e^{e^{1/2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{e^e - e^{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}}$

Όμως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα $f' \uparrow \mathbb{R}$

άρα:

$$0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\sqrt{e}} - e}{\frac{1}{2}} < \frac{e^e - e^{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}}$$ και το ζητούμενο είναι αποδεικτέο

Παρατήρηση

Το σύνολο τιμών της g προκύπτει και <u>χωρίς</u> τη χρήση παραγώγων: Ψάχνουμε την εξίσωση $g(x)=y$ με άγνωστο το $x \in D_g = \mathbb{R}$ και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

- Για $x<0$ είναι: $g(x)=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x}=y-1$
  $\overset{y<1}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{y-1}$ (μοναδική λύση).
- Για $x \geq 0$ είναι: $g(x)=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=y-1$
  $\overset{y \geq 1}{\Leftrightarrow} 4x=(y-1)^2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2$ (μοναδική λύση)

Επομένως, η εξίσωση $g(x)=y$ έχει λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και άρα $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.