

ΑΣΚΗΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ να αποδείξετε ότι $z_1 = 1$ ή $z_2 = 1$ ή $z_3 = 1$.

giannish 1990

ΛΥΣΗ

$$|z_1| = 1 \Leftrightarrow |1 - z_2 - z_3| = 1 \Leftrightarrow |1 - z_2 - z_3|^2 = 1 \Leftrightarrow (1 - z_2 - z_3)(1 - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \overline{z_2} - \overline{z_3} - z_2 + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} - z_3 + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \overline{z_2} - \overline{z_3} - z_2 + 1 + z_2\overline{z_3} - z_3 + z_3\overline{z_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3} - z_2 + 1 + \frac{z_2}{z_3} - z_3 + \frac{z_3}{z_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_2z_3 - z_3 - z_2 - z_2^2z_3 + z_2z_3 + z_2^2 - z_3^2z_2 + z_3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_2z_3(1 - z_2) - z_2(1 - z_2) + z_3^2(1 - z_2) - z_3(1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - z_2)(z_2z_3 - z_2 + z_3^2 - z_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - z_2)(z_3 - 1)(z_2 + z_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - z_2)(z_3 - 1)(1 - z_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_2 = 1 \quad \text{ή} \quad z_3 = 1 \quad \text{ή} \quad z_1 = 1.$$

Αθ. Μπεληγιάννης