ΣΠΟΥΔΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζαραβίνας Σωκράτης

Μαθητής Α΄ Λυκείου

Αγρίνιο 05/03/2022

sokrateszarabinas@gmail.com

6931172576

Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία ως κύριο στόχο έχω να αποδείξω το 5^{ο} Ευκλείδειο Αίτημα. Για την επίτευξη του στόχου αυτού θα μελετήσουμε το Ευκλείδειο επίπεδο από τοπολογική σκοπιά (δηλαδή ο χώρος ως σύνολο).

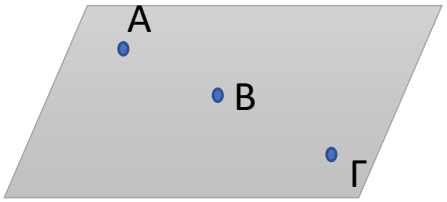
Στην συνέχεια με τα ευρήματα αυτής της μελέτης θα αποδείξουμε μια σειρά θεμελιωδών θεωρημάτων ώστε να φτάσω στην τελική παράγραφο της εργασίας όπου θα κάνω την απόδειξη του αιτήματος. (Η διαδικασία αυτή προφανώς θα γίνει χωρίς την άμεση ή έμμεση χρήση του 5^{ου} αιτήματος).

Ακόμα και αν το 5^{ο} αίτημα αποδειχθεί αυτό δεν σημαίνει ότι οι σύγχρονες μη ευκλείδειες γεωμετρίες δεν ισχύουν. Άλλωστε οι γεωμετρίες αυτές μελετούν άλλους χώρους εφοδιασμένους με διαφορετικές ιδιότητες από τον ευκλείδειο. Το βασικό χαρακτηριστικό του ευκλείδειου χώρου είναι ότι έχει μηδενική καμπυλότητα (επίπεδο) και ότι υπάρχουν παράλληλες ευθείες (σε αντίθεση για παράδειγμα με χώρο σταθερής θετικής καμπυλότητας). Η απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος απλά κάνει το ευκλείδειο επίπεδο σύστημα πλήρες και συνεπές. Δεν το μετατρέπει σε πραγματικό.

Δουλεύω πάνω σε αυτήν την εργασία για κάτι λιγότερο από δύο μήνες με διορθώσεις και νέες αποδείξεις για να γίνει η απόδειξη πλήρως ολοκληρωμένη. Ακολουθεί η εργασία.

Τοπολογική Μελέτη του Ευκλείδειου Επιπέδου.

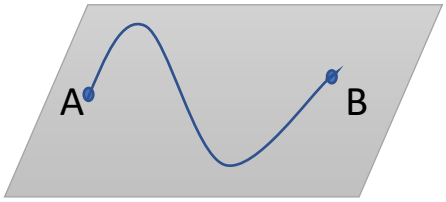
Τοπολογικά το Ευκλείδειο επίπεδο (Π) είναι ένα τμήμα δισδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^2$ δηλαδή ένα υποσύνολό του (μπορεί να είναι και γνήσιο υποσύνολό του δηλαδή πεπερασμένο τμήμα του αλλά και ίσο σύνολο του δισδιάστατου χώρου δηλαδή απεριόριστο). Άρα προκύπτει ότι το ευκλείδειο επίπεδο έχει στοιχεία του τα σημεία.



$$\Pi = \{A, B, \Gamma, \cdots\} \supseteq \mathbb{R}^2$$

Με αυτόν τον πρώτο ορισμό του επιπέδου θα ορίσω τις παρακάτω έννοιες:

-Καμπύλη είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του Π (δηλαδή με στοιχεία του σημεία) όπου ανήκει στο μονοδιάστατο χώρο.



Γράφω: $S(A, B) \subseteq \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$

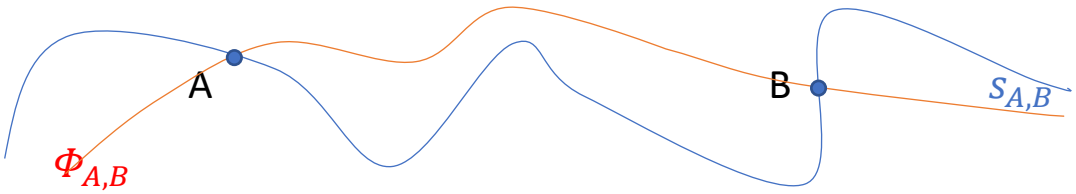
(γενικά συμβολίζω τις καμπύλες με S,Φ,G,F,….)

Δηλαδή αν {A,B} τα άκρα της καμπύλης S γράφω: $S(A, B)$

Ως μήκος μιας καμπύλης ορίζεται το μέγεθος:

$$L_{S(A,B)} \in \mathbb{R}$$

Όταν μία καμπύλη είναι απεριόριστη αλλά περνά από 2 σημεία {A,B} τότε γράφω: $s_{A,B}$



(Αν μια απεριόριστη καμπύλη περνά από τα σημεία {A,B,Γ} τότε οι συμβολισμοί $s_{A,B}$ και $s_{A,\Gamma}$ είναι ισοδύναμοι)

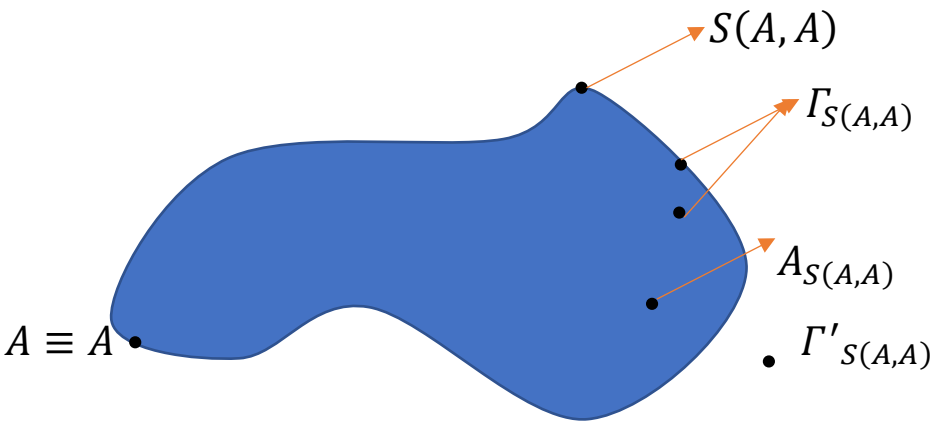
-Κλειστή καμπύλη ονομάζεται η καμπύλη όπου τα άκρα της ταυτίζονται: $S(A,B)\ με\ A \equiv B\ (γράφω\ S(A,A)\ )$

Για το ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που περικλείεται από την $S(A,A)$γράφω: $A_{S(A,A)}$

Έτσι ορίζονται τα μεγέθη:

$$\Gamma_{S(A,A)} = S(A,A) \cup A_{S(A,A)}$$

$$\therefore \Gamma_{S(A,A)} \cup \Gamma'_{S(A,A)} = \mathbb{R}^2$$



-Κύκλος είναι μία ειδική κατηγορία κλειστής καμπύλης. Έστω κλειστή καμπύλη $S(A,A)$. Αν τηρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις τότε η $S(A,A)$ είναι κύκλος:

$$\exists\{0\} \in A_{S(A,A)} \subset \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \exists\, r \in \mathbb{R}$$

Και τα $\{0\}$, r έχουν τις ιδιότητες:

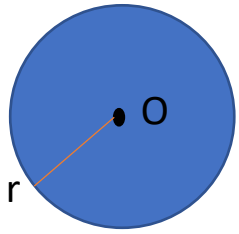
$$S(A,A) = \left\{\{P\} \in \mathbb{R}^2 \,/\, L_{\varepsilon(O,P)} = r\right\}$$

$$\therefore \Gamma_{S(A,A)} = \left\{\{P\} \in \mathbb{R}^2 \,/\, L_{\varepsilon(O,P)} \leq r\right\}$$

$$\therefore \Gamma'_{S(A,A)} = \left\{\{P\} \in \mathbb{R}^2 \,/\, L_{\varepsilon(O,P)} > r\right\}$$

$$\therefore A_{S(A,A)} = \left\{\{P\} \in \mathbb{R}^2 \,/\, L_{\varepsilon(O,P)} < r\right\}$$

Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται κύκλοι, το $\{0\}$ είναι το κέντρο του κύκλου και r η ακτίνα του (συμβολίζω με $C(O,r)$).



<u>Θεώρημα Καμπυλών Jordan:</u>

Το θεώρημα καμπυλών του Jordan είναι ένα βασικό θεώρημα της τοπολογίας σύμφωνα με το οποίο:

Έστω καμπύλη S απεριόριστη ή κλειστή. Τότε αυτή χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο γνήσια υποσύνολά του έστω $\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^2_-$ όπου ισχύει:

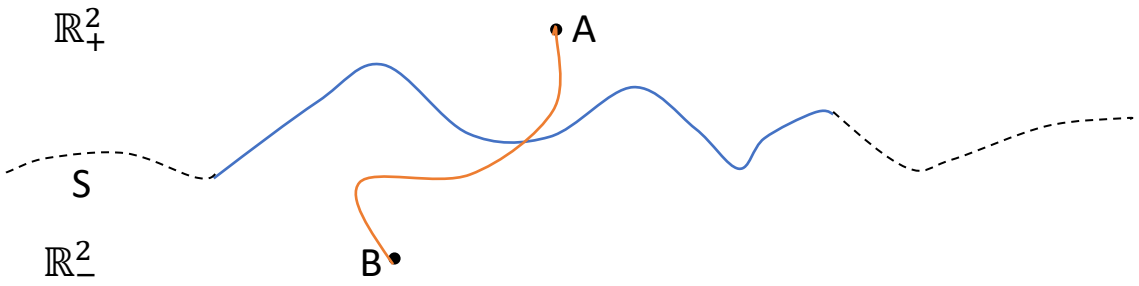
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_- \cup S$$

$$\therefore \mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \mathbb{R}^2_- \subset \mathbb{R}^2$$

Έστω τώρα σημεία {A,B} όπου: $\{A\} \in \mathbb{R}^2_+ \wedge \{B\} \in \mathbb{R}^2_-$ τότε ισχύει:

$$F(A,B) \cap S \neq \emptyset$$

Δηλαδή η οποιαδήποτε καμπύλη που ενώνει τα σημεία {A,B} τέμνει την S.



-Το ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται ως εξής:

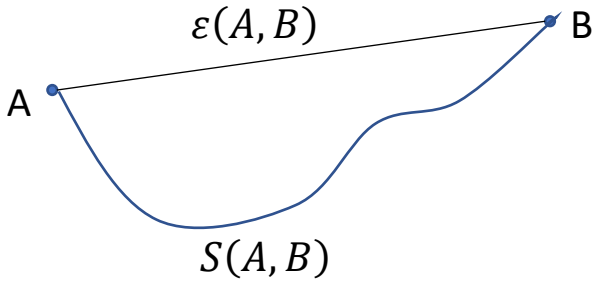
Έστω δύο σημεία {A,B}$\in \mathbb{R}^2$. Τότε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα {A,B} είναι η καμπύλη (που συμβολίζεται με $\varepsilon(A,B)$) και έχει την παρακάτω ιδιότητα:

$$L_{\varepsilon(A,B)} \leq L_{S(A,B)}$$

Όπου $S(A,B)$ μια τυχαία καμπύλη.

Το ίσον ισχύει όταν οι καμπύλες ταυτίζονται δηλαδή όταν:

$$\varepsilon(A,B) \equiv S(A,B)$$



-Η ευθεία προκύπτει αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα προς τις δύο του πλευρές απεριόριστα. Έτσι από ευθύγραμμο τμήμα $\varepsilon(A,B)$ προκύπτει ευθεία $\varepsilon_{A,B}$

Η ευθεία εναλλακτικά μπορεί να οριστεί θεμελιωδώς με τη βοήθεια του κύκλου. Η ευθεία όταν περνά από το κέντρο ενός κύκλου τον τέμνει σε δύο μοναδικά σημεία τα οποία είναι αντιδιαμετρικά.

Δηλαδή έστω κύκλος $C(O,r)$ και $\{X\} \in \Gamma'_{C(O,r)}$. Τότε αν η καμπύλη $S_{X,O}$ είναι ευθεία $\varepsilon_{X,O}$ τότε:

$$C(O,r) \cap \varepsilon_{X,O} = \{M, M'\}$$

Και επιπλέον:

$$L_{\varepsilon(M,O)} = L_{\varepsilon(M',O)} = r$$

-Τώρα θα μελετήσουμε την έννοια της παραλληλίας. Ο θεμελιώδης ορισμός των παραλλήλων ευθείων είναι ο εξής:

Παράλληλες είναι οι ευθείες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Δηλαδή έστω ευθείες ε, ζ τότε ισχύει:

$$\varepsilon \cap \zeta = \emptyset \Leftrightarrow \varepsilon \| \zeta$$

<u>Βασικό Θεώρημα 1ου Κεφαλαίου (Β.Θ):</u>

Θα αποδείξουμε ότι αν 2 ευθείες είναι παράλληλες και η μια παράλληλη τέμνεται από μία ευθεία τότε η τέμνουσα ευθεία θα τέμνει και τη δεύτερη παράλληλη.

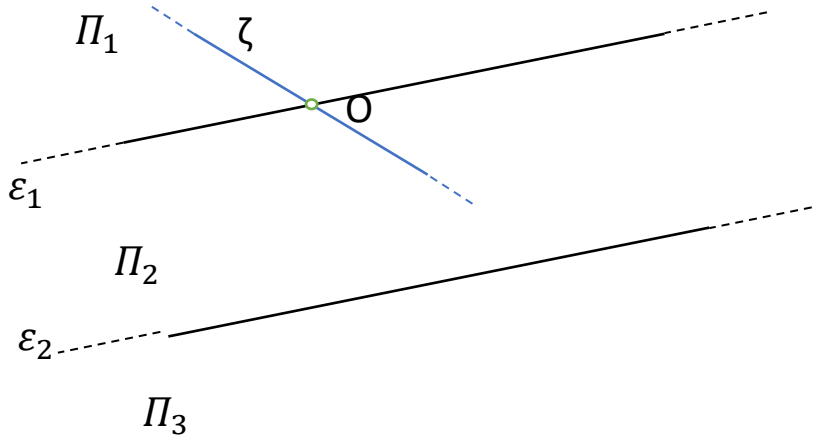
Απόδειξη (Β.Θ):

Έστω ευθεία $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$ και ευθεία ζ που τέμνει την ε_1 στο $\{0\}$ δηλαδή:

$$\varepsilon_1 \cap \zeta = \{0\}$$

Και: $$\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3 \cup \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \mathbb{R}^2$$

Και θέλω να αποδείξω ότι η ζ τέμνει την ε_2. Η απόδειξη θα είναι ευθεία:



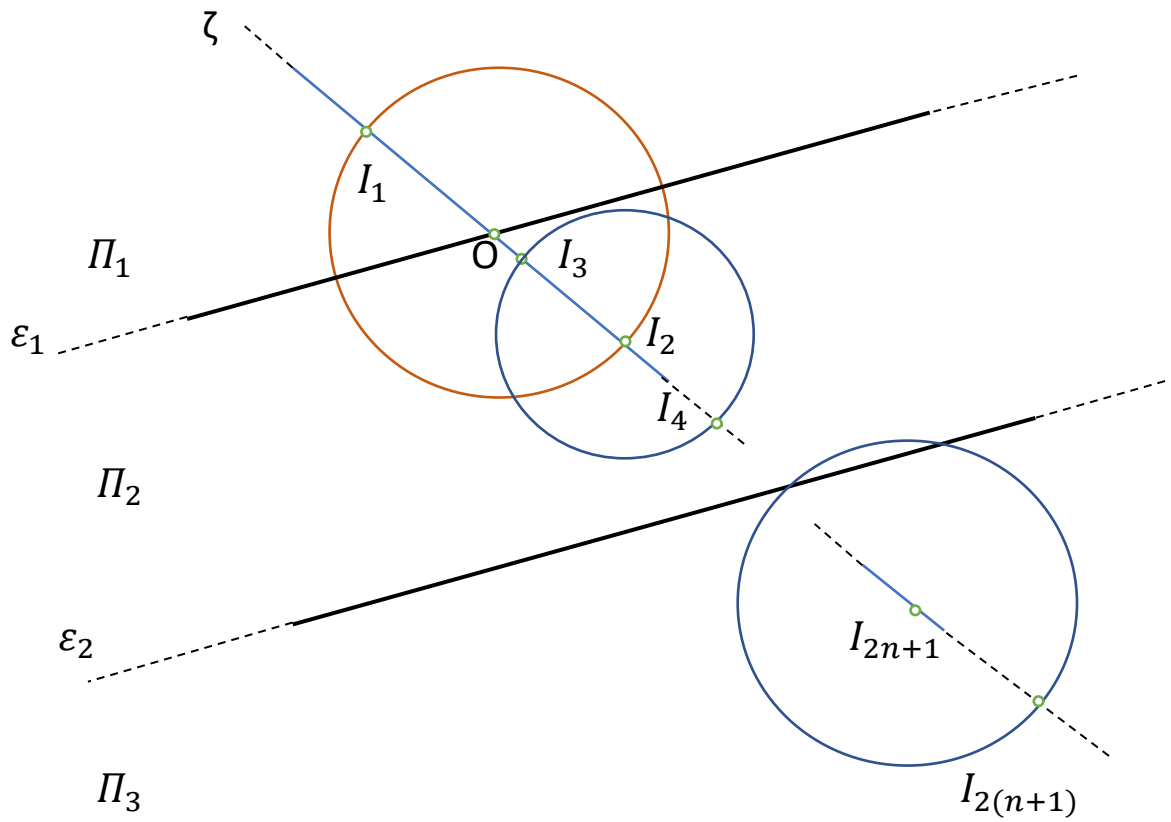
Παίρνω λοιπόν σημείο $\{I_1\}$ έτσι ώστε:

$$\{I_1\} \supset (\zeta \cap \Pi_1)$$

Δηλαδή το $\{I_1\}$ να ανήκει στη ζ από τη μεριά του ημιεπιπέδου Π_1. Φέρω τώρα κύκλο $C\left(O, L_{\varepsilon(O,I_1)}\right)$. Τότε σύμφωνα με την ιδιότητα των ευθειών που προαναφέραμε στον ορισμό της ευθείας η ζ (αφού περνά από το κέντρο του $C\left(O, L_{\varepsilon(O,I_1)}\right)$ και ήδη τον τέμνει σε ένα σημείο το $\{I_1\}$) θα τέμνει τον $C\left(O, L_{\varepsilon(O,I_1)}\right)$ σε ένα δεύτερο μοναδικό σημείο $\{I_2\}$ και τα $\{I_1, I_2\}$ είναι τα αντιδιαμετρικά. Άρα μπορώ να προεκτείνω την ζ έως το $\{I_2\}$. Αντίστοιχα τώρα παίρνω σημείο $\{I_3\}$ όπου:

$$\{I_3\} \supset (\zeta \cap A_{C\left(O, L_{\varepsilon(O,I_1)}\right)})$$

Δηλαδή το $\{I_3\}$ να ανήκει στην ζ αλλά στο εμβαδό που περικλείει ο κύκλος $C\left(O, L_{\varepsilon(O,I_1)}\right)$. Φέρνω τώρα κύκλο $C\left(I_2, L_{\varepsilon(I_2,I_3)}\right)$ και όπως και πριν η ζ θα τέμνει τον $C\left(I_2, L_{\varepsilon(I_2,I_3)}\right)$ σε ένα ακόμα μοναδικό σημείο $\{I_4\}$ και αντιδιαμετρικό του $\{I_3\}$.



Μετά από n επαναλήψεις της διαδικασίας θα φτάσουμε σε κύκλο $C\left(I_{2n}, L_{\varepsilon(I_{2n},I_{2n+1})}\right)$ όπου θα έχουν κοινό σημείο με την ζ το $\{I_{2n+1}\}$ άρα η ζ θα τέμνει σε δεύτερο μοναδικό σημείο $\{I_{2(n+1)}\}$και τα $\{I_{2n+1}, I_{2(n+1)}\}$ θα είναι αντιδιαμετρικά. Ακόμη μετά από n (αρκετές) φορές το $\{I_{2(n+1)}\}$ θα βρίσκεται στο Π_3 η στην ε_2. Δηλαδή μετά από n αρκετές επαναλήψεις:

$$\exists\left\{I_{2v}, I_{2n+1}, I_{2(v+1)},\right\} \in \mathbb{R}^2$$

$$C\left(I_{2n}, L_{\varepsilon(I_{2n},I_{2n+1})}\right) \cap \zeta = \left\{I_{2n+1}, I_{2(v+1)},\right\}$$

$$\therefore \{I_{2(n+1)}\} \in \zeta \ \wedge \ L_{\varepsilon(I_{2n},I_{2n+1})} = L_{\varepsilon\left(I_{2n},I_{2(n+1)}\right)}$$

$$\{I_{2(n+1)}\} \in \varepsilon_2 \cup \Pi_3 \ \wedge \{I_{2(n+1)}\} \in \zeta$$

$$\therefore \zeta \cap \varepsilon_2 \neq \emptyset$$

Πιο συγκεκριμένα:

$$\{I_{2(n+1)}\} \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow \zeta \cap \varepsilon_2 = \{I_{2(n+1)}\}$$

Ενώ από θεώρημα καμπυλών του Jordan έχω:

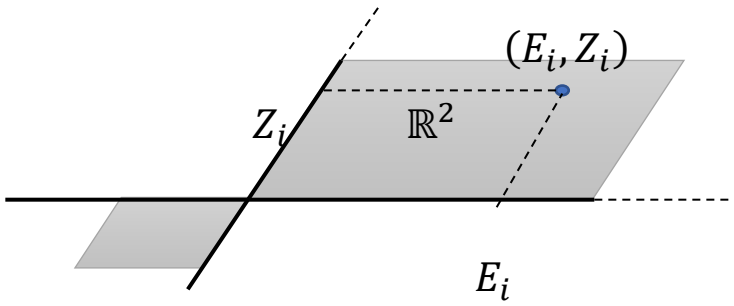
$$\{I_{2(n+1)}\} \in \Pi_3 \Leftrightarrow \zeta \cap \varepsilon_2 \neq \emptyset$$

Και στις δύο περιπτώσεις η ζ τέμνει την ε_2 και αποδείξαμε το (Β.Θ)

-Τώρα που ορίσαμε την ευθεία μπορούμε να ορίσουμε καλύτερα το ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

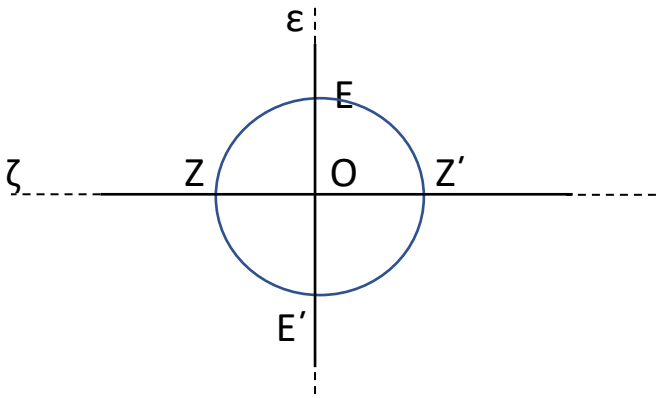
Έστω δύο ευθείες ε$= \{E_1, E_2, \dots\}$, ζ $= \{Z_1, Z_2, \dots\}$ και τέμνονται στο $\{X\}$ δηλαδή ε∩ζ=$\{X\}$. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο των ευθειών παράγει το $\mathbb{R}^2$.

$$\varepsilon \times \zeta = \{(E_i, Z_i) \,/\, E_i \in \varepsilon \wedge Z_i \in \zeta\} = \mathbb{R}^2$$



-Τώρα θα ορίσουμε την καθετότητα μεταξύ δύο ευθειών. Ο ορισμός θα είναι θεμελιώδης (όπως της παραλληλίας) ώστε να είναι ανεξάρτητος του 5ου αιτήματος. Ο ορισμός θα δοθεί με την βοήθεια του κύκλου:

Έστω κύκλος $C(0, r)$ και δύο ευθείες ε, ζ που τέμνονται στο κέντρο του κύκλου και δεν ταυτίζονται (δηλαδή$\varepsilon \not\equiv \zeta$) άρα τον τέμνουν σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία {Ε,Ε΄} και {Ζ,Ζ΄} αντίστοιχα.



Τότε έχω καμπύλες:

$$S(Z,E) \supset C(0,r) \ \wedge \ S(Z,E') \supset C(0,r)$$

$$S(Z',E') \supset C(0,r) \ \wedge \ S(Z',E') \supset C(0,r)$$

Οι ευθείες ε, ζ είναι κάθετες αν ισχύει η προϋπόθεση:

$$L_{S(Z,E)} = L_{S(Z,E')} = L_{S(Z',E)} = L_{S(Z',E')} \Leftrightarrow \varepsilon \perp \zeta$$

-Έτσι με την καθετότητα ορίζω τις καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής: Το $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από το καρτεσιανό γινόμενο δύο κάθετων ευθείων ε, ζ που τέμνονται στο $\{X\}$ βρίσκεται στο καρτεσιανό ορθοκανονικό σύστημα εΧζ.

Έχοντας ορίσει τις καρτεσιανές συντεταγμένες και με το (Β.Θ) (χωρίς τη χρήση του 5ου αιτήματος) θα περάσουμε στο 2ο κεφάλαιο όπου θα αποδείξουμε κάποια βασικά θεωρήματα (ξανά χωρίς τη χρήση του 5ου αιτήματος) καταλυτικά για την επίτευξη του τελικού στόχου, την απόδειξη του 5ου αιτήματος.

Απόδειξη Βασικών Θεωρημάτων

Εδώ θα αποδείξουμε κάποια βασικά θεωρήματα χωρίς την άμεση ή έμμεση χρήση του $5^{ου}$ αιτήματος και χωρίς τόσο έντονο τοπολογικό χαρακτήρα.

Θεώρημα (▮):

Αν 3 ευθείες ε, ζ, ε΄ είναι παράλληλες ανά ζεύγη ως εξής:

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' \wedge \zeta \parallel \varepsilon'$$

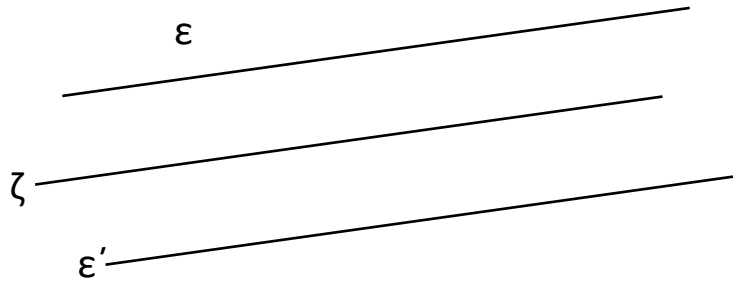
Τότε είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους δηλαδή: $\varepsilon \parallel \zeta$, δηλαδή:

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' \wedge \zeta \parallel \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon \parallel \zeta$$

Απόδειξη (▮):

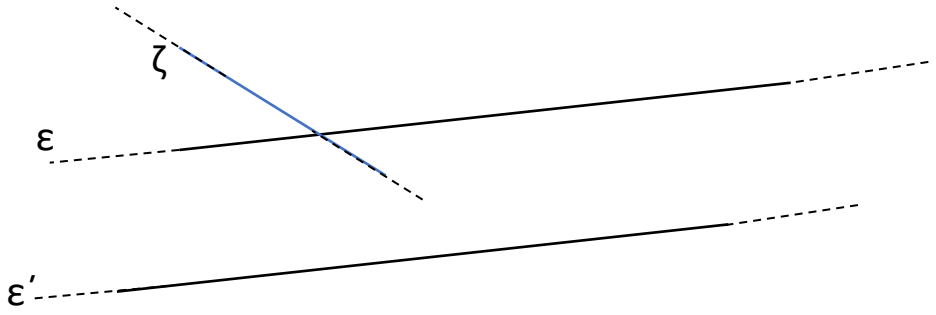
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή σε άτοπο. Έχω από υπόθεση ότι:

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' \wedge \zeta \parallel \varepsilon' \Leftrightarrow \zeta \cap \varepsilon' = \emptyset \wedge \varepsilon \cap \varepsilon' = \emptyset$$



Θέλω να αποδείξω ότι: $\zeta \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \zeta \cap \varepsilon = \emptyset$ άρα θα υποθέσω ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει, άρα ισχύει ο αντίθετός του, δηλαδή ισχύει:

$$\neg(\zeta \parallel \varepsilon) \Leftrightarrow \zeta \nparallel \varepsilon \Leftrightarrow \zeta \cap \varepsilon \neq \emptyset$$



Αλλά τώρα έχω δύο ευθείες ε, ε′ παράλληλες και μία ζ που τέμνει τη μία παράλληλη ε άρα από (Β.Θ) η ζ θα τέμνει και την ε′. Άρα επειδή καταλήγω σε $\zeta \cap \varepsilon' \neq \emptyset$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση κατέληξα σε άτοπο. Άρα τελικά ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' \wedge \zeta \parallel \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon \parallel \zeta$$

Και το (▮) αποδείχθηκε.

<u>1ο Θεώρημα Παραλλήλων (Θ.Π):</u>

Αν δύο ευθείες σχηματίζουν από μία τρίτη τέμνουσα εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο γεωμετρίας Α΄ λυκείου σελίδα 80 χωρίς τη χρήση του 5ου αιτήματος.

<u>Θεώρημα (▮▮):</u>

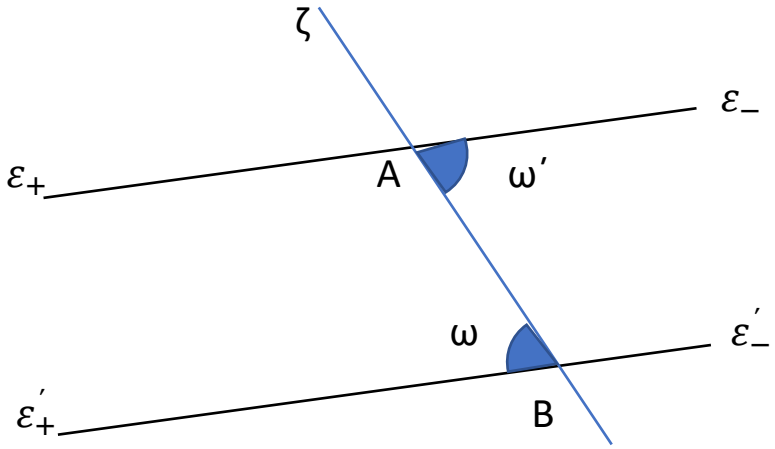
Δύο ευθείες παράλληλες σχηματίζουν από μία τρίτη τέμνουσα εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

<u>Απόδειξη (▮▮):</u>

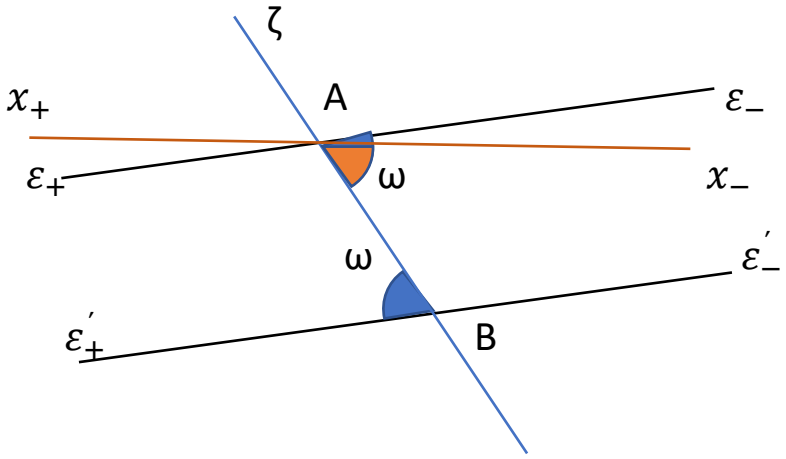
Έστω $\varepsilon \parallel \varepsilon'$ και τέμνουσα ζ με $\varepsilon \cap \zeta = A \wedge \varepsilon' \cap \zeta = B$ άρα ορίζονται ημιευθείες ως εξής:

$$\varepsilon_+ \cup A \cup \varepsilon_- = \varepsilon \wedge \varepsilon'_+ \cup A \cup \varepsilon'_- = \varepsilon$$

Και θέτω: $\angle \varepsilon_- AB = \omega' \wedge \angle AB\varepsilon'_+ = \omega$



Και θέλω να αποδείξω ω΄=ω. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι ω΄≠ω.Έτσι λοιπόν φέρω ευθεία $x_-Ax_+ = x$ όπου $x_-AB = \omega$.



Άρα από (Θ.Π) έχω $x \parallel \varepsilon'$. Επίσης

$$x \cap \varepsilon = \{A\} \quad (1)$$

Αλλά έχω από (▮):

$$x \parallel \varepsilon' \ \wedge \ \varepsilon \parallel \varepsilon' \Longrightarrow x \parallel \varepsilon \quad (2)$$

Αλλά οι σχέσεις (1),(2) δεν μπορούν να ισχύουν ταυτοχρόνως αφού $(2) \Longrightarrow \neg(1)$. Άρα κατέληξα σε άτοπο. Άρα τελικά απέδειξα το (▮▮).

-Έχοντας ορίσει τις καρτεσιανές ορθοκανονικές συντεταγμένες και με τα θεωρήματα που έχω ήδη αποδείξει θα αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα:

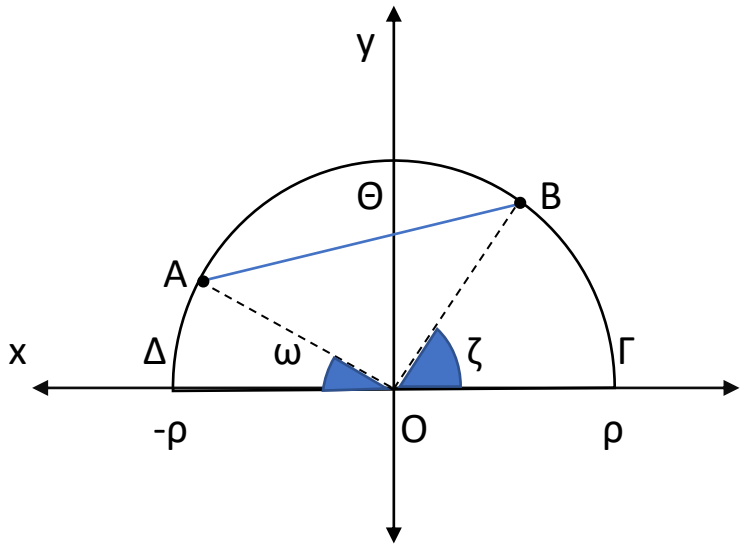
Θεώρημα (▮▮▮):

Σε έναν κύκλο μία επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης.

Απόδειξη (▮▮▮):

Έστω κύκλος C(O,ρ) σε καρτεσιανό σύστημα xOy και έστω χορδή ΑΒ όπου τα Α και Β βρίσκονται αντίστοιχα στο δεύτερο και πρώτο τεταρτημόριο (χωρίς βλάβη της γενικότητας) και Θ η τομή της χορδής ΑΒ με τον άξονα y. Θέτω τώρα:

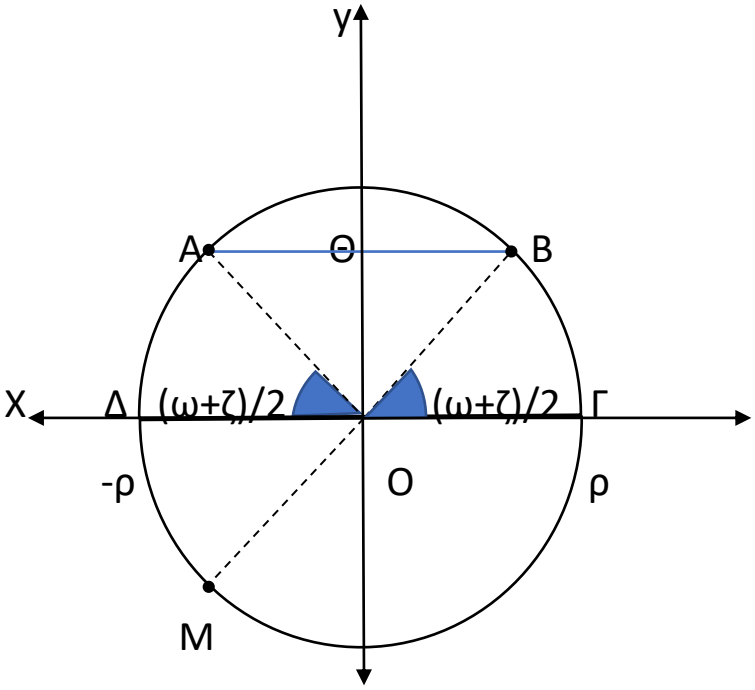
$$\angle AO\Delta = \omega \ \wedge \ \angle BO\Gamma = \zeta$$



Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα περιστρέψω τους άξονες x,y τόσες μοίρες ώστε το ΑΒ να διχοτομείται από τον y. Άρα θα έχω ΑΘ=ΘΒ. Η $\angle AOB$ πρέπει να διατηρηθεί ίδια με $\angle AOB = 180 - (\omega + \zeta)$.Άρα ο y στο ισοσκελές ΔABO ο είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος και ύψος (αφού ΑΘ=ΘΒ) τότε θα ισχύει:

$$\angle AO\theta = \angle BO\Theta = \frac{180 - \angle AOB}{2} \Rightarrow \angle AO\theta = \angle BO\Theta = \frac{\omega + \zeta}{2}$$

Και επειδή ο y είναι και ύψος τότε $\angle A\Theta O = \angle B\Theta O = 90$



Στο ισοσκελές ΔABO έχω $\angle OA\Theta = \angle OB\Theta = \frac{\omega+\zeta}{2}$ από (▮▮) αφού $AB \parallel x$ από το (Θ.Π). Επίσης έχω $\angle \Delta OM = \angle BM\Gamma = \frac{\omega+\zeta}{2}$ ως κατακορυφήν. Άρα έχω:

$$\angle AOM = \angle \Delta OM + \angle AO\Delta \Longrightarrow$$

$$\angle AOM = \frac{\omega + \zeta}{2} + \frac{\omega + \zeta}{2} = \omega + \zeta \Longrightarrow$$

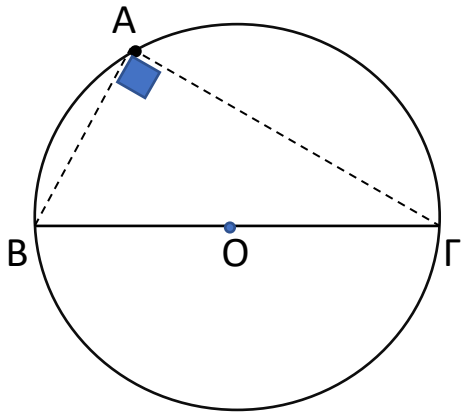
$$\angle AOM = 2\angle ABM$$

Άρα η επίκεντρη $\angle AOM$ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης $\angle ABM$. Άρα αποδείξαμε ότι ισχύει το (▮▮▮) με ευθεία απόδειξη.

Πόρισμα (▮▮▮) (Π.(▮▮▮)):

Η εγγεγραμμένη ορθή γωνία κύκλου βαίνει σε τόξο ίσο με την διάμετρό του και αντίστροφα.

Απόδειξη Π.(▮▮▮):



Ευθύ: Έστω κύκλος C(O,ρ) και εγγεγραμμένη ορθή γωνία $\angle BA\Gamma$ άρα από (▮▮▮) έχω ότι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\angle BO\Gamma$ είναι δύο ορθές (180) άρα τα σημεία Β,Γ είναι αντιδιαμετρικά άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η διάμετρος τους κύκλου (ΑΒ=2ρ).

Αντίστροφο: Αν στον ίδιο κύκλο η γωνία $\angle BA\Gamma$ έχει εντίστοιχο τόξο την διάμετρο ΒΓ τότε τα σημεία Β,Γ είναι αντιδιαμετρικά άρα η γωνία $\angle BO\Gamma$ είναι δύο ορθές και από (▮▮▮) θα ισχύει ότι η $\angle BA\Gamma$ είναι μισή της $\angle BO\Gamma$ άρα έχει μέτρο μία ορθή.

Αποδείξαμε το Π.(▮▮▮).

Με όλα τα θεωρήματα που έχουμε αποδείξει θα περάσουμε στη 3ο μέρος όπου θα αποδειχθούν τα 2 βασικότερα θεωρήματα αυτής της εργασίας, η μοναδικότητα της καθέτου και το 5ο ευκλείδειο αίτημα.

Το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα.

Πρώτα θα αποδείξουμε ένα θεώρημα το οποίο συνεπάγεται το 5ο αίτημα. Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι από σημείο ευθυγράμμου τμήματος φέρουμε μοναδική κάθετη.

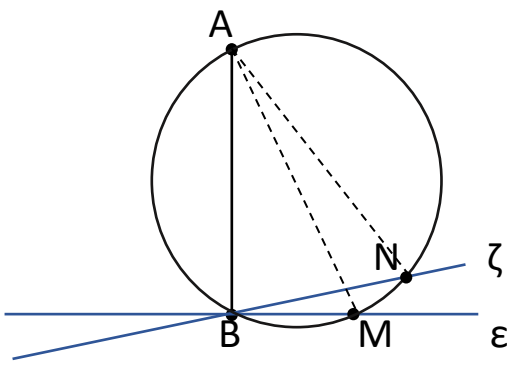
Θεώρημα Καθετότητας (Θ.Κ):

Από άκρο ευθύγραμμου τμήματος διέρχεται μοναδική κάθετη.

Απόδειξη (Θ.Κ):

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή σε άτοπο. Έστω κύκλος C(O,r) και μία χορδή του ΑΒ διάφορη της διαμέτρου. Έστω λοιπόν ότι από το Β διέρχεται κάθετη ε προς το ΑΒ και δεν είναι μοναδική. Άρα θα υπάρχει μία ακόμα τουλάχιστον κάθετη από το Β προς το ΑΒ έστω η ζ. Την τομή του κύκλου με την ε την ονομάζω Μ και την τομή του με την ζ Ν. Άρα έχω:

$$AB \perp \varepsilon \wedge AB \perp \zeta \ \therefore \ \angle ABM = \angle ABM = 90$$



Αλλά αφού τα τρίγωνα ΔABN και ΔABM είναι ορθογώνια τότε οι εγγεγραμμένες τους γωνίες $\angle ABN$ και $\angle ABM$ βαίνουν στη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου C(O,ρ), άρα τα σημεία M,N είναι αντιδιαμετρικά με το A και $N \not\equiv M$ άτοπο. Άρα αφού καταλήξαμε σε άτοπο τελικά αποδείξαμε ότι από σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος φέρω μοναδική κάθετη προς το ευθύγραμμο τμήμα.

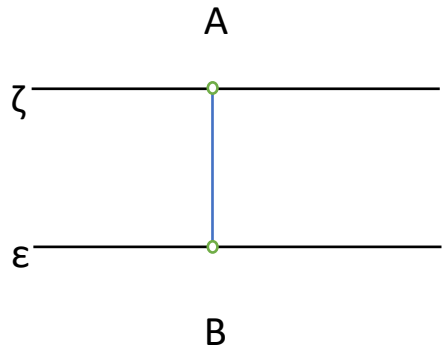
-Τώρα το 5ο αίτημα θα προκύψει ως πόρισμα του (Θ.Κ).

<u>Το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα:</u>

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτή την ευθεία.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Φέρω τότε την απόσταση ΑΒ του Α από την ε (όπου ΑΒ μοναδικό από (Θ.Κ)). Τώρα φέρω ευθεία ζ από το Α κάθετη προς το ΑΒ η οποία είναι μοναδική από (Θ.Κ).



Από (Θ.Π) έχω $\varepsilon \parallel \zeta$ και η ζ είναι μοναδική, άρα αποδείχθηκε το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα.

Βιβλιογραφία:

- https://hellanicus.lib.aegean.gr/bitstream/handle/11610/19587/ptuxiakh_eytyxias_teliko.pdf?sequence=1
- https://www.pe03.gr/abc/sxolika-biblia/biblio-lyk-a-geo-mathiti.html