

Εφαρμόζοντας τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου.

Κυριαζής Χρήστος
2^ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας
e-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
e-mail address: lprotopapas@math.ntua.gr

Περίληψη.

Όλοι όσοι αγαπούν τα Μαθηματικά είναι εξοικειωμένοι με τις απαιτήσεις τους, καθώς και με τον τρόπο που είναι δομημένα. Η θεωρία και οι ασκήσεις αποτελούν γι' αυτούς μια ευχάριστη ενασχόληση. Όμως εκείνο που διαφοροποιεί την κατάσταση και αυξάνει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, ακόμη και για τους μη δηλωμένους θαυμαστές τους, είναι οι εφαρμογές τους, οι οποίες αποδεικνύουν πόσο σημαντικό ρόλο κατέχουν στις επιστήμες και πόσο βοηθούν στην εξέλιξη τους. Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν εφαρμογές σε επιστήμες, όπως η Φυσική, η Χημεία, η Βιολογία, η Ιατρική και η Μηχανική. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων, διατυπώνοντας ενδιαφέροντα προβλήματα, τα οποία επιλύουμε στα πλαίσια της σχολικής ύλης.

Λέξεις κλειδιά: Διατύπωση και επίλυση προβλήματος, διαφορικές εξισώσεις, Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου.

Abstract.

Everyone who loves Mathematics is familiar with their requirements as well as the way they are structured. Theory and exercises are a pleasant occupation for them. What differentiates the situation and increases the interest in Mathematics, even for their undisclosed fans, are their applications, which prove their importance in sciences. Differential equations have applications in many scientific fields, such as Physics, Chemistry, Biology, Medicine and Engineering. In this paper we present applications of differential equations, formulating interesting problems that we solve using knowledge of High school math.

Εισαγωγή.

Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά τονίζεται η σπουδαιότητα επίλυσης προβλημάτων και η αναγκαιότητα εμπλοκής των μαθητών σε τέτοιες διαδικασίες, αφού είναι ιδιαίτερα εκπαιδευτικές και διδακτικές. Τα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ' Λυκείου δεν έχουν αρκετές εφαρμογές και προβλήματα, το οποίο δίνει μια λανθασμένη εικόνα στους μαθητές για τη διαθεματικότητα των Μαθηματικών, δεδομένου ότι ο Απειροστικός Λογισμός είναι χρησιμότερος για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Ειδικότερα ο κλάδος των διαφορικών εξισώσεων έχει πληθώρα εφαρμογών.

Η διαμάχη για τον θεμελιωτή του Απειροστικού Λογισμού κρατά μέχρι τις μέρες μας. Οι Isaac Newton (1642-1727) και Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) δούλευαν στο ίδιο θέμα την ίδια περίοδο και οι απόψεις για το ποιος υπήρξε ο θεμελιωτής δίστανται. Ένας από τους πολλούς χρήσιμους κλάδους του Απειροστικού Λογισμού είναι οι διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες οι επιστήμονες χρησιμοποιούν για να ερμηνεύσουν διάφορα φαινόμενα. Διαφορική εξίσωση είναι κάθε εξίσωση, που συσχετίζει την άγνωστη συνάρτηση με μία ή περισσότερες παραγώγους (Σταυρακάκης, 2011). Κυρίαρχος ρόλος των διαφορικών εξισώσεων είναι να περιγράψουν φαινόμενα που περιγράφονται με τη βοήθεια του ρυθμού μεταβολής και ως εκ τούτου έχουν πληθώρα εφαρμογών.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2019) η πρώτη επαφή με τις διαφορικές εξισώσεις είναι στην παράγραφο 2.5 (συνέπειες του Θ.Μ.Τ.), όπου σε εφαρμογή ζητείται να βρεθεί μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια πολύ απλή διαφορική εξίσωση, η οποία θα μπορούσε να δοθεί ως εφαρμογή της εκθετικής μεταβολής, ώστε παράλληλα με την εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις να τονιστεί και η διαθεματικότητα των Μαθηματικών.

Προχωρώντας, θετική έκπληξη αποτελεί η ύπαρξη της διαφορικής $f''(x) + f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή) στις γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου 2 του σχολικού βιβλίου και η προσπάθεια επίλυσής της με σχολικά μέσα. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε να υπάρχει και ένα σχετικό πρόβλημα που να φέρνει σε άμεση σύνδεση τα Μαθηματικά και τη Φυσική και όσα μαθαίνουν οι μαθητές στο κεφάλαιο των ταλαντώσεων. Με τον τρόπο αυτό θα επιτυγχάνονταν η βέλτιστη διαθεματική προσέγγιση που δείχνει πως τίποτα δε βρέθηκε τυχαία.

Στο κεφάλαιο 3 και πιο συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.1, υπάρχουν αρκετές απλές ασκήσεις, όπου φαίνεται η σύνδεση παραγωγίσιμης και ολοκλήρωσης, δηλαδή η βασική αρχή της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια στην παράγραφο 3.3 (που διαχρονικά είναι εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης) αναλύονται κάποιες μορφές διαφορικών

εξισώσεων και δίνεται ο ορισμός της διαφορικής εξίσωσης, σύμφωνα με τον οποίο είναι κάθε εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή x μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ και κάποιες από τις παραγώγους της $y', y'', \dots$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ένα κινητό στην αρχική θέση του $s_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει ταχύτητα u_0 και κινείται με σταθερή επιτάχυνση α . Αν $s(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του σώματος, η ταχύτητά του είναι $u(t) = s'(t)$ και η επιτάχυνσή του είναι $a(t) = u'(t)$, όπου $t \geq 0$ ο χρόνος. Τότε ισχύει:

$$a(t) = u'(t) = s''(t) = \alpha, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

οπότε

$$u(t) = s'(t) = \alpha t + c_1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

και αφού $u(0) = u_0$ προκύπτει $c_1 = u_0$, άρα

$$u(t) = s'(t) = \alpha t + u_0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Συνεπώς

$$s(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + u_0 t + c_2, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

όπου $s_0 = s(0) = 0$ άρα $c_2 = 0$ και κατά συνέπεια

$$s(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + u_0 t, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Οι σχέσεις (3), (5) δίνουν τις γνωστές σχέσεις από τη Φυσική για τη ταχύτητα και τη θέση του κινητού στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ελεύθερη πτώση.

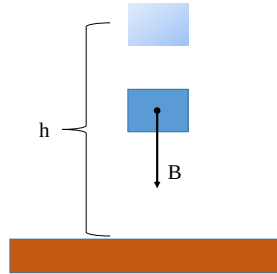
Ένα σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει από ύψος h . Θεωρούμε $s(t)$ τη συνάρτηση θέσης του σώματος (η οποία μετράται από το έδαφος), οπότε η ταχύτητά του είναι $u(t) = s'(t)$ και η επιτάχυνσή του είναι $a(t) = u'(t)$, όπου $t \geq 0$ ο χρόνος. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα ισχύει

$$F(t) = ma(t) = mu'(t) = ms''(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου είναι αμελητέα η αντίσταση του αέρα (σχήμα 1), οπότε η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του και ισχύει

$$F(t) \equiv B(t) = -mg, \quad (7)$$

όπου το μείον δείχνει ότι το βάρος είναι διανυσματικό μέγεθος προς το έδαφος, ενώ η απόσταση μετριέται από το έδαφος.



Σχήμα 1: Ελεύθερη πτώση χωρίς αντίσταση αέρα.

Από τις (6), (7) βρίσκουμε (Boyce & DiPrima, 2017)

$$-mg = ms''(t), t \geq 0,$$

άρα

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2, t \geq 0,$$

όπου οι c_1, c_2 είναι πραγματικές είναι σταθερές.

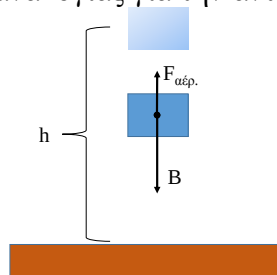
Αφού το σώμα αφήνεται από ύψος h , τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει $s(0) = h$ και $s'(0) = u(0) = 0$, οπότε $c_2 = h$, $c_1 = 0$ και κατά συνέπεια

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h, t \geq 0. \quad (8)$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει αντίσταση του αέρα (σχήμα 2), αυτή ασκείται σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του βάρους και για χαμηλές ταχύτητες είναι ανάλογη της ταχύτητας (Cengel & Palm, 2017), οπότε η συνολική δύναμη είναι

$$F(t) = ku(t) - mg, \quad (9)$$

όπου $k > 0$ είναι η σταθερά αναλογίας για την αντίσταση του αέρα.



Σχήμα 2: Ελεύθερη πτώση με αντίσταση αέρα.

Από το νόμο του Νεύτωνα (6) προκύπτει

$$u'(t) - \frac{k}{m}u(t) = -g, t \geq 0$$

ή

$$\left(e^{-\frac{k}{m}t} u(t) \right)' = \left(\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} g \right)', t \geq 0,$$

άρα

$$u(t) = \frac{m}{k} g + c_1 e^{\frac{k}{m}t}, t \geq 0.$$

Όμως $s'(0) = u(0) = 0$, οπότε $c_1 = -\frac{m}{k} g$, δηλαδή

$$u(t) = \frac{m}{k} g - \frac{m}{k} g e^{\frac{k}{m}t}, t \geq 0 \quad (10)$$

και

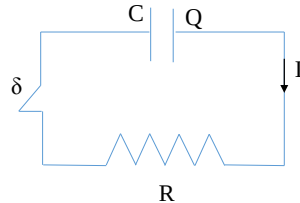
$$s(t) = \frac{m}{k} g t - \frac{m^2}{k^2} g e^{\frac{k}{m}t} + c_2, t \geq 0.$$

Αφού $s(0) = h$ προκύπτει $c_2 = h + \frac{m^2}{k^2} g, t \geq 0$, συνεπώς

$$s(t) = \frac{m}{k} g t - \frac{m^2}{k^2} g e^{\frac{k}{m}t} + h + \frac{m^2}{k^2} g, t \geq 0. \quad (11)$$

Εκφόρτιση πυκνωτή.

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C , τον οποίο φορτίζουμε σε τάση V που συνδέεται μέσω διακόπτη δ με αντιστάτη αντίστασης R .



Σχήμα 3: Εκφόρτιση πυκνωτή.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης (σχήμα 3) και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I (Σταυρακάκης, 2011), οπότε το φορτίο που δημιουργείται είναι

$$Q'(t) = -I, t \geq 0, \quad (12)$$

όπου

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}, V(t) = \frac{Q(t)}{C}, t \geq 0,$$

οπότε

$$I(t) = \frac{Q(t)}{CR}, t \geq 0$$

και από την (12) προκύπτει

$$Q'(t) + \frac{1}{CR} Q(t) = 0, t \geq 0. \quad (13)$$

Η λύση της (13) είναι

$$Q(t) = Ae^{-\frac{1}{CR}t}, \quad (14)$$

και αν το αρχικό φορτίο είναι Q_0 , προκύπτει $A = Q_0$, οπότε

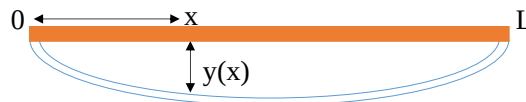
$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{CR}t}, t \geq 0. \quad (15)$$

Παραμορφωμένη δοκός.

Έστω μια ομογενής οριζόντια δοκός πυκνότητας ρ , με ομοιόμορφη διατομή και μήκος L . Η απόκλιση y από την αρχική οριζόντια θέση της δοκού στη θέση της x δίνεται από την εξίσωση

$$y^{(4)}(x) = \frac{\rho g}{EI}, 0 \leq x \leq L, \quad (16)$$

όπου E είναι η σταθερά του Young που καθορίζει το μέτρο της ακαμψίας του υλικού και I η ροπή αδράνειας της διατομής του δοκού.



Σχήμα 3: Παραμορφωμένη δοκός.

Από τη (16) προκύπτει:

$$y(x) = \frac{\rho g}{6EI} \frac{x^4}{4} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4. \quad (17)$$

Εφόσον η δοκός είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της ισχύει $y(0) = y(L) = 0$ και αφού τα δύο άκρα της δεν περιστρέφονται ελεύθερα έχουμε $y'(0) = y'(L) = 0$. Αντικαθιστώντας στην (17) υπολογίζουμε τις

σταθερές $c_1 = -\frac{\rho g L}{2EI}$, $c_2 = \frac{\rho g L^2}{12EI}$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, άρα

$$y(x) = \frac{\rho g}{24EI} x^4 - \frac{\rho g L}{12EI} x^3 + \frac{\rho g L^2}{24EI} x^2. \quad (18)$$

Ραδιοχρονολόγηση με C^{14} .

Ένας αρχαιολόγος σε μια ανασκαφή βρήκε οστά, των οποίων η περιεκτικότητα σε C^{14} είναι το 8% της ποσότητας που καταμετρείται στα έμβια όντα. Αν η σταθερά διάσπασης του C^{14} είναι $k = 1,24 \cdot 10^{-4}$ ανά έτος, ποια είναι η ηλικία των οστών (Cengel & Palm, 2017);

Τα ραδιενεργά υλικά (όπως ο C^{14}) διασπώνται με ρυθμό ανάλογο της παρούσας ραδιενεργής ποσότητας (νόμος εκθετικής μεταβολής). Αν $M = M(t)$ είναι η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού τη στιγμή t ισχύει

$$M'(t) = -kM(t), \quad (19)$$

όπου $k > 0$ είναι η σταθερά διάσπασης του υλικού. Η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι $M(0) = M_0$, οπότε η λύση της εξίσωσης (19) είναι

$$M(t) = M_0 e^{-kt} \quad (20)$$

και

$$t = -\frac{1}{k} \ln \frac{M(t)}{M_0}. \quad (21)$$

Για τα συγκεκριμένα οστά ισχύει

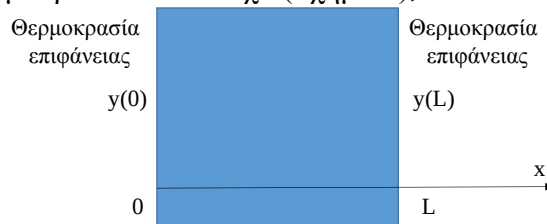
$$\frac{M(t)}{M_0} = 8\% = 0,08, \quad (22)$$

άρα προκύπτει

$$t = -\frac{1}{1,24 \cdot 10^{-4}} \ln 0,08 \approx 20369 \text{ έτη}. \quad (23)$$

Αγωγή θερμότητας σε επίπεδο τοίχο.

Ένας επίπεδος τοίχος μήκους L έχει σταθερή θερμοκρασία 10°C από τη μία μεριά και -2°C από την άλλη (Cengel & Palm, 2017). Πως κατανέμεται η θερμοκρασία στον τοίχο (σχήμα 4);



Σχήμα 4: Αγωγή θερμότητας σε επίπεδο τοίχο.

Αν $y = y(x)$ η θερμοκρασία του τοίχου στη θέση x , η θερμοκρασιακή κατανομή στον τοίχο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y''(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (24)$$

η οποία έχει λύση

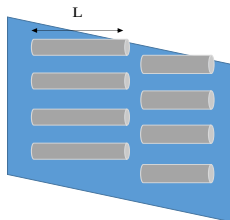
$$y(x) = c_1 x + c_2. \quad (25)$$

Όμως $y(0) = 10$ και $y(L) = -2$, οπότε $c_1 = -\frac{12}{L}$ και $c_2 = 10$, άρα

$$y(x) = -\frac{12}{L}x + 10, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (26)$$

Μεταφορά θερμότητας.

Κυλινδρικά πτερύγια με διάμετρο D και μήκος L βρίσκονται σε τέλεια επαφή με θερμή επιφάνεια (σχήμα 5).



Σχήμα 5: Μεταφορά θερμότητας από πτερύγια.

Αν h είναι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας και k η θερμική αγωγιμότητα, η θερμοκρασία $T(x)$ κατά μήκος κάθε πτερυγίου (Cengel & Palm, 2017) δίνεται από την εξίσωση

$$T''(x) = \frac{4h}{kD} T(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (27)$$

Αν $\frac{h}{kD} = 1 \text{ m}^{-1}$, η εξίσωση του προβλήματος είναι

$$T''(x) = 4T(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (28)$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη $2T'(x)$ και πολλαπλασιάζοντας με e^{2x} βρίσκουμε

$$e^{2x} T''(x) + e^{2x} 2T'(x) = e^{2x} 2T'(x) + e^{2x} 4T(x),$$

άρα

$$e^{2x} T'(x) = 2e^{2x} T(x) + c_1$$

και πολλαπλασιάζοντας με e^{-4x} βρίσκουμε

$$(e^{-2x} T(x))' = c_1 e^{-4x},$$

οπότε

$$T(x) = c_1 \frac{e^{-2x}}{-4} + c_2 e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (29)$$

Αν η θερμοκρασία εκεί που το περύγιο ενώνεται με τη βάση είναι $200\text{ }^{\circ}\text{C}$, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι $-480\text{ }^{\circ}\text{C/m}$ και το μήκος του περυνγίου είναι $L = 0,5\text{ m}$ ισχύει

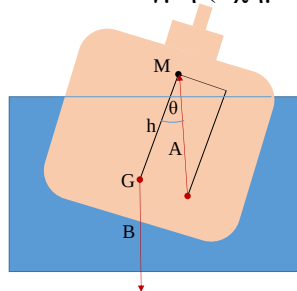
$$T(0) = 200, T'(0) = -480 \quad (30)$$

και με αντικατάσταση στην (23) βρίσκουμε $c_1 = -880$, $c_2 = -20$, άρα

$$T(x) = 220e^{-2x} - 20e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 0,5. \quad (31)$$

Κλυδωνιζόμενο πλοίο.

Σε κάθε πλοίο η θάλασσα και οι πλαϊνοί άνεμοι δημιουργούν μια κρίσιμη κίνηση για το πλοίο. Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει κάθε στιγμή το βάρος του πλοίου με την κατακόρυφη είναι ζωτικής σημασίας, διότι μπορεί να οδηγήσει σε ανατροπή (Cengel & Palm, 2017). Θεωρούμε M το μέτακτρο του πλοίου, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας δράσης της άνωσης και του άξονα συμμετρίας της διατομής του πλοίου, G το κέντρο της μάζας του και $\theta = \theta(t)$ τη συνάρτηση που εκφράζει τη γωνία που μας ενδιαφέρει κάθε στιγμή (σχήμα 6).



Σχήμα 6: Κλυδωνιζόμενη κίνηση πλοίου.

Αν I_G είναι η ροπή αδράνειας της μάζας του πλοίου ως προς το σημείο G και M_G είναι το άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο G , ισχύει ότι

$$I_G \theta''(t) = M_G,$$

όπου $\theta''(t)$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση. Όμως $M_G = -Bh\eta\mu(\theta(t))$ και $B = mg$, οπότε προκύπτει

$$I_G \theta''(t) = -Bh\eta\mu(\theta(t)).$$

Αυτή είναι μια δύσκολη εξίσωση για να λυθεί, αλλά μια ικανοποιητική προσέγγιση προκύπτει από την αντικατάσταση $\theta(t) \approx \eta\mu(\theta(t))$, οπότε

$$\theta''(t) + \frac{mgh}{I_G} \theta(t) = 0. \quad (33)$$

Επίσης το πλοίο αρχικά δεν κινείται και δεν έχει γωνιακή ταχύτητα, οπότε $\theta(0)=0$ και $\theta'(0)=0$. Θέτουμε

$$g(t) = c_1 \eta \mu \left(\sqrt{\frac{mgh}{I_G}} t \right) + c_2 \sigma \upsilon \nu \left(\sqrt{\frac{mgh}{I_G}} t \right) \quad (34)$$

και

$$f(t) = [\theta(t) - g(t)]^2 + [\theta'(t) - g'(t)]^2. \quad (35)$$

Ισχύει $f'(t)=0$, άρα η f είναι σταθερή και θέτοντας $t=0$ προκύπτει $f(t)=0$, οπότε από την (35) η $g(t)$ είναι λύση, της (33) δηλαδή

$$\theta(t) = c_1 \eta \mu \left(\sqrt{\frac{mgh}{I_G}} t \right) + c_2 \sigma \upsilon \nu \left(\sqrt{\frac{mgh}{I_G}} t \right). \quad (36)$$

Χημικές ενώσεις και ταχύτητα.

Ένα γραμμάριο μιας χημικής ουσίας Α ενώνεται με λ γραμμάρια μιας άλλης ουσίας Β και έτσι δημιουργούνται $1+\lambda$ γραμμάρια της ουσίας Χ. Εάν α γραμμάρια της ουσίας Α και $\lambda\alpha$ γραμμάρια της ουσίας Β ενωθούν, ποια είναι η μάζα $x(t)$ της ουσίας Χ, τη τυχαία χρονική στιγμή t (Μπόζη και Παπαδόπουλου, 1999). Θεωρούμε ότι η ταχύτητα σχηματισμού της ουσίας Χ σε κάθε στιγμή είναι ανάλογη (με σταθερά αναλογίας k) με το γινόμενο των μαζών των ουσιών Α και Β που δεν έχουν πάρει μέρος στην αντίδραση (μέχρι τη στιγμή εκείνη).

Τα α γραμμάρια της ουσίας Α και $\lambda\alpha$ γραμμάρια της ουσίας Β δίνουν $\alpha + \lambda\alpha$ γραμμάρια της ουσίας Χ, επομένως κατά τη χρονική στιγμή t δεν έχουν πάρει μέρος στην αντίδραση $\alpha - \frac{x(t)}{1+\lambda}$ γραμμάρια της ουσίας Α. Ομοίως, για την ουσία Β βρίσκουμε πως σε χρόνο t δεν έχουν πάρει μέρος στην αντίδραση $\lambda\alpha - \frac{\lambda x(t)}{1+\lambda}$ γραμμάρια της ουσίας Β. Συνεπώς ισχύει η εξίσωση:

$$x'(t) = k \left(\alpha - \frac{x(t)}{1+\lambda} \right) \left(\lambda\alpha - \frac{\lambda x(t)}{1+\lambda} \right) \quad (37)$$

ή

$$\frac{x'(t)}{\left(\alpha - \frac{x(t)}{1+\lambda} \right)^2} = k\lambda, \quad (38)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{1+\lambda}{\alpha - \frac{x(t)}{1+\lambda}} = \kappa\lambda t + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Όμως για $t = 0$ έχουμε ότι $x(0) = 0$, επομένως $c = \frac{1+\lambda}{\alpha}$ και

$$x(t) = \frac{\alpha^2 \kappa \lambda (1+\lambda) t}{\alpha \kappa \lambda t + 1 + \lambda}. \quad (40)$$

Ενδιαφέρον έχει να παρατηρήσουμε πως μετά από (θεωρητικά) άπειρο χρόνο θα επέλθει η πλήρης ένωση των δύο ποσοτήτων των ουσιών Α και Β αφού $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \alpha + \lambda\alpha$, δηλαδή η συνολική ποσότητα από τις δύο ουσίες.

Χημεία και περιεκτικότητα.

Βάζουμε σε λειτουργία το σύστημα κλιματισμού τη στιγμή που ο αέρας ενός κλειστού δωματίου όγκου $\Omega \text{ m}^3$ έχει περιεκτικότητα σε CO_2 $\alpha\%$. Καθαρός αέρας με περιεκτικότητα σε CO_2 $\beta\%$, αρχίζει να μπαίνει στο δωμάτιο με ταχύτητα $\omega \frac{\text{m}^3}{\text{sec}}$. Ποια είναι η περιεκτικότητα σε CO_2 του δωματίου μετά από χρόνο t (Μπόζη και Παπαδόπουλου, 1999);

Στο χρονικό διάστημα dt μπαίνουν στο δωμάτιο $\omega dt \text{ m}^3$ αέρα που περιέχουν $\frac{\beta \omega dt}{100} \text{ m}^3 \text{ CO}_2$. Στον ίδιο χρόνο βγαίνουν από το δωμάτιο $\frac{x(t) \omega dt}{\Omega} \text{ m}^3 \text{ CO}_2$, όπου $x(t)$ είναι τα $\text{m}^3 \text{ CO}_2$ που θα καταλάμβανε αν αυτό ήταν μόνο του στις συνθήκες πίεσης του δωματίου. Ισχύει ότι:

$$\frac{x(t) \omega dt}{\Omega} - \frac{\beta \omega dt}{100} = -dx, \quad (41)$$

αφού η διαφορά των δύο ποσοτήτων μας δίνει τη στοιχειώδη μεταβολή της $x(t)$ σε χρονικό διάστημα dt . Η διαδικασία επίλυσης αυτής της εξίσωσης ξεφεύγει από τη διδακτέα ύλη της Γ' Λυκείου, αφού είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών (παράγραφος 3.3). Αφού $x(0) = \frac{\alpha \Omega}{100}$, η λύση της (41) είναι

$$x(t) = \frac{\Omega}{100} \left[\beta + (\alpha - \beta) e^{\frac{-\omega t}{\Omega}} \right]. \quad (42)$$

Συμπεράσματα.

Τα Μαθηματικά είναι ο πυλώνας των θετικών επιστημών και όχι μόνο. Η ραγδαία ανάπτυξή τους οφείλεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στη Φυσική, στη Βιολογία, στη Χημεία, στη Μηχανική και στην Ιατρική. Οι Διαφορικές Εξισώσεις είναι εκείνος ο κλάδος των Μαθηματικών που χρησιμοποιείται για την περιγραφή φαινομένων που εμπλέκεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους. Στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ' Λυκείου οι Διαφορικές Εξισώσεις εισάγονται μέσω των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού. Παράλληλα οι εφαρμογές των Μαθηματικών έχουν μειωμένο ρόλο, κάτι που εμποδίζει την ανάδειξη της χρησιμότητάς τους και της σημαντικότητάς τους στην καλυτέρευση της ζωής μας. Προσπαθήσαμε να τονίσουμε αυτή την πτυχή των Μαθηματικών, δείχνοντας εφαρμογές που χρησιμοποιούν Διαφορικές Εξισώσεις.

Ενδεικτική βιβλιογραφία.

- Boyce E. W. & DiPrima C. R. (2019). *Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
- Cengel A. Y. & Palm J. W. (2017). *Διαφορικές εξισώσεις για μηχανικούς και επιστήμονες*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ. και Πολύζος Γ. (2019). *Μαθηματικά Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Μπόζη Γ. και Παπαδόπουλου Δ. (1999). *Προβλήματα διαφορικών εξισώσεων*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σταυρακάκης Ν. (2011). *Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου.