83^{ΟΣ} ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΜΕ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
«Ο ΘΑΛΗΣ»
Σάββατο 12 Νοεμβρίου 2022

Τάξη Α' Λυκείου
Εκφωνήσεις και ενδεικτικές απαντήσεις

Πρόβλημα 1 **(μονάδες 6)**

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$25x^2+8y^2-20xy-10x-12y+17=0$$

Απάντηση – 1^{ος} τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 25x^2+8y^2-20xy-10x-12y+17=0 &\Leftrightarrow \left(5x^2-10x+5\right)+\left(3y^2-12y+12\right)+\left(20x^2-20xy+5y^2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 5\left(x^2-2x+1\right)+3\left(y^2-4y+4\right)+5\left(4x^2-4xy+y^2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 5(x-1)^2+3(y-2)^2+5(2x-y)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } y-2=0 \text{ και } 2x-y=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ και } y=2 \end{aligned}$$

Απάντηση – 2^{ος} τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 25x^2+8y^2-20xy-10x-12y+17=0 &\Leftrightarrow \left(25x^2+4y^2+1-20xy-10x+4y\right)+\left(4y^2-16y+16\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (5x-2y-1)^2+4\left(y^2-4y+4\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (5x-2y-1)^2+4(y-2)^2=0 \\ &\Leftrightarrow 5x-2y-1=0 \text{ και } y-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ και } y=2 \end{aligned}$$

Απάντηση – 3^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την δοσμένη εξίσωση ως προς x και τη διατάσσουμε όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} 25x^2+8y^2-20xy-10x-12y+17=0 &\Leftrightarrow 25x^2-(20y+10)x+8y^2-12y+17=0 \\ &\Leftrightarrow 25x^2-10(2y+1)x+8y^2-12y+17=0 \end{aligned}$$

Για τη διακρίνουσα Δ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= 100(2y+1)^2 - 4\cdot 25(8y^2-12y+17)\\ &= 100(4y^2+4y+1)-100(8y^2-12y+17)\\ &= 100(4y^2+4y+1-8y^2+12y-17)\\ &= 100(-4y^2+16y-16)\\ &= -400(y^2-4y+4)\\ &= -400(y-2)^2\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει λύση ως προς x όταν:

$$\begin{aligned}\Delta\ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -400(y-2)^2\ge 0\\ &\Leftrightarrow \quad (y-2)^2\le 0\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για $y=2$, οπότε τότε είναι $\Delta=0$ και η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x την

$$x=\frac{10(2y+1)}{50}=\frac{10(2\cdot 2+1)}{50}=1$$

Επομένως

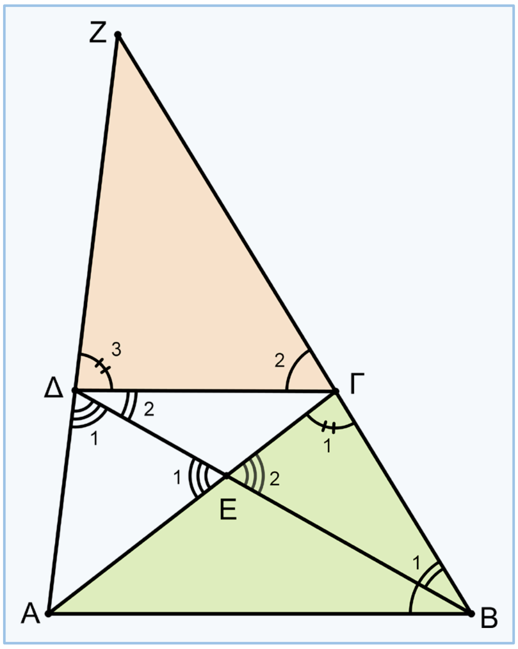
$$x=1 \text{ και } y=2$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Gamma=\Gamma\Delta$. Επίσης, αν Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, ισχύει ότι $A\Delta=AE$. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Delta Z$.

Απάντηση

Έχουμε:



- $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_2$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΔ.
- $\hat{E}_1=\hat{\Delta}_1$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ.
- $\hat{E}_1=\hat{E}_2$ ως κατακορυφήν, οπότε και $\hat{E}_2=\hat{\Delta}_1$.
- $\hat{\Gamma}_1=180^\circ-\hat{E}_2-\hat{B}_1$ από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΕΒΓ, οπότε $\hat{\Gamma}_1=180^\circ-\hat{\Delta}_1-\hat{\Delta}_2$.
- $\hat{\Delta}_3=180^\circ-\hat{\Delta}_1-\hat{\Delta}_2$ από την ευθεία γωνία $A\hat{\Delta}Z=180^\circ$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_3$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΓΔ έχουν:

- $B\Gamma=\Gamma\Delta$
- $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_3$
- $A\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $AB\parallel\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΒΓ.

Επομένως είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ. Άρα $A\Gamma=\Delta Z$.

Πρόβλημα 3 **(μονάδες 7)**

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β για τους οποίους ο αριθμός $A = \frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}$ είναι ακέραιος. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του Α;

Απάντηση – 1ος τρόπος

Για τον αριθμό Α ισχύει $1 < A < \frac{5}{2}$ διότι ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1<A &\Leftrightarrow 1<\frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta} \\ &\Leftrightarrow 2\alpha+\beta<5\alpha+\beta \\ &\Leftrightarrow 2\alpha<5\alpha \\ &\Leftrightarrow 2<5 \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} A<\frac{5}{2} &\Leftrightarrow \frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}<\frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow 10\alpha+2\beta<10\alpha+5\beta \\ &\Leftrightarrow 2\beta<5\beta \\ &\Leftrightarrow 2<5 \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Άρα η μόνη ακέραια τιμή του Α είναι $A = 2$. Τότε όμως:

$$\begin{aligned} \frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}=2 &\Leftrightarrow 5\alpha+\beta=4\alpha+2\beta \\ &\Leftrightarrow \alpha=\beta \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι α, β είναι αυτοί για τους οποίους $\alpha = \beta$ και η τιμή του ακεραίου Α είναι $A = 2$.

Απάντηση – 2ος τρόπος

Ο αριθμός $A-2$ γράφεται:

$$A-2=\frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}-2=\frac{5\alpha+\beta-4\alpha-2\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}$$

Για τον αριθμό $\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}$ ισχύει $-1<\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}<\frac{1}{2}$ διότι ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} -1<\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta} &\Leftrightarrow -2\alpha-\beta<\alpha-\beta \\ &\Leftrightarrow -2\alpha<\alpha \\ &\Leftrightarrow -2<1 \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}<\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\alpha-2\beta<2\alpha+\beta \\ &\Leftrightarrow -2\beta<\beta \\ &\Leftrightarrow -2<1 \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Ο αριθμός Α είναι ακέραιος αν και μόνο αν ο αριθμός $A-2=\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}$ είναι ακέραιος του οποίου όμως η μόνη ακέραια τιμή είναι το 0. Άρα

$$\frac{\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta.$$

Τότε για την τιμή του αριθμού Α έχουμε:

$$A-2=0 \Leftrightarrow A=2$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι α, β είναι αυτοί για τους οποίους $\alpha = \beta$ και η τιμή του ακεραίου Α είναι $A = 2$.

Απάντηση – $3^{ος}$ τρόπος

Ο αριθμός Α γράφεται:

$$A=\frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{2\alpha+\beta+3\alpha}{2\alpha+\beta}=1+\frac{3\alpha}{2\alpha+\beta}$$

Ο αριθμός Α είναι ακέραιος αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{3\alpha}{2\alpha+\beta}$ είναι ακέραιος. Τότε όμως ισχύει:

$$2\alpha+\beta\le 3\alpha \iff \beta\le\alpha$$

Ο αριθμός $-2A=\frac{-10\alpha-2\beta}{2\alpha+\beta}$ γράφεται:

$$-2A=\frac{-10\alpha-2\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{-10\alpha-5\beta+3\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{-5(2\alpha+\beta)+3\beta}{2\alpha+\beta}=-5+\frac{3\beta}{2\alpha+\beta}$$

Ο αριθμός Α είναι ακέραιος άρα και αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{3\beta}{2\alpha+\beta}$ είναι ακέραιος. Τότε όμως ισχύει:

$$2\alpha+\beta\le 3\beta \iff 2\alpha\le 2\beta \iff \alpha\le\beta$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι α, β είναι αυτοί για τους οποίους $\alpha=\beta$ και η τιμή του ακεραίου Α είναι:

$$A=\frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{6\alpha}{3\alpha}=2$$